Università
Ca' Foscari
Venezia

Corso di Laurea magistrale
in Economia e Finanza

Tesi di Laurea

Ca' Foscari
Dorsoduro 3246
30123 Venezia

Data Envelopment Analysis con dati negativi e valutazione della performance dei fondi comuni nei periodi di crisi

Relatore
Ch.ma Prof.ssa Antonella Basso

Laureanda
Cristina Pasqualetti
Matricola 821409

Anno Accademico
2012 / 2013

Ringraziamenti

Desidero innanzitutto ringraziare la Prof.ssa Antonella Basso per la sua disponibilità e per il tempo dedicato alla mia tesi.
Ringrazio inoltre gli amici e compagni di corso che mi hanno sempre incoraggiata e supportata.
Infine ringrazio con affetto i miei genitori, Fabrizio e le persone a me più care per il loro sostegno, la loro pazienza e per l'affetto che mi hanno sempre dimostrato.

INDICE

CAPITOLO PRIMO

VALUTAZIONE DELLA PERFORMANCE DEI FONDI COMUNI D'INVESTIMENTO

CAPITOLO SECONDO

LE MISURE DI PERFORMANCE NEI PERIODI DI CRISI

CAPITOLO TERZO

DATA ENVELOPMENT ANALYSIS

CAPITOLO QUARTO

IL PROBLEMA DEI DATI NEGATIVI NELLA DEA

CAPITOLO QUINTO

DEA E PERFORMANCE DEI FONDI COMUNI DI INVESTIMENTO

CAPITOLO SESTO

APPLICAZIONE DI TRE MODELLI DEA AI FONDI COMUNI EUROPEI

Introduzione

La presente tesi si pone l'obiettivo di presentare la Data Envelopment Analysis (DEA) come strumento per la valutazione dei fondi comuni di investimento nei periodi di crisi.
La metodologia DEA, introdotta da Charnes, Cooper e Rhothes nel 1978, consente di misurare l'efficienza relativa di singole unità produttive (*Decision Making Units* o DMU), considerando contemporaneamente una pluralità di input e di output. Tale metodologia può essere applicata anche ai fondi comuni di investimento, al fine di ottenere una misura di performance alternativa alle misure tradizionalmente utilizzate.
La scelta di concentrare la presente analisi nei periodi di crisi deriva dall'osservazione che alcune delle principali misure di performance, come l'indice di Sharpe, possono presentare dei problemi interpretativi, se utilizzate quando il mercato si trova in una fase negativa o ne ha appena passata una. Tuttavia, anche una misura di performance ottenuta grazie alla tecnica DEA standard incontra delle difficoltà nei periodi di crisi. Si osserva, infatti, che i principali modelli che compongono la Data Envelopment Analysis richiedono la non negatività degli input e degli output per fornire una corretta misura di efficienza delle DMU analizzate, ma nelle fasi negative del mercato può capitare che alcune delle variabili utilizzate, come per esempio il rendimento medio del fondo, siano negative.
Di conseguenza, il seguente lavoro mira a individuare alcuni modelli DEA che consentono di ottenere una misura di performance dei fondi comuni di investimento, senza che la presenza di rendimenti medi inferiori a zero comporti delle distorsioni nei risultati ottenibili.
La presente tesi si sviluppa in sei capitoli.
Nel primo capitolo sono esposte le misure di performance tradizionalmente utilizzate per la valutazione dei fondi comuni di investimento.
Nel secondo capitolo, con riferimento all'indice di Sharpe, sono presentate le difficoltà che si possono incontrare nell'interpretazione di alcune tradizionali misure di

performance nei periodi di crisi. Sono quindi esposte le opinioni, contrastanti in letteratura, riguardo all'utilizzo dell'indice di Sharpe quando il valore è negativo e sono illustrati alcuni aggiustamenti che mirano a modificare tale indice, cercando di risolvere i dubbi interpretativi, che possono sorgere quando il rendimento medio del fondo è inferiore al tasso privo di rischio.

Il terzo capitolo introduce la metodologia Data Envelopment Anlysis ed i principali modelli di cui si compone.

Il capitolo quarto, invece, presenta vari aggiustamenti che possono essere apportati ai principali modelli DEA, in modo tale da ottenere una corretta misura di efficienza relativa per ciascuna DMU, anche se alcuni valori negli input o negli output utilizzati sono negativi.

Nel capitolo quinto sono presentati alcuni modelli DEA per la valutazione dei fondi comuni di investimento. In particolare è presentato il *DEA Portfolio Efficiency Index* (DPEI), che rappresenta la prima misura di performance dei fondi d'investimento determinata attraverso la metodologia DEA. Sono inoltre esposti altri modelli che, a differenza dell'indice DPEI, affrontano il problema dei dati negativi e quindi consentono di ottenere una misura di performance utile per il confronto tra fondi comuni d'investimento anche nei periodi di crisi.

Nell'ultimo capitolo si utilizzano tre dei modelli DEA, esposti nel capitolo quinto, per valutare la performance di 317 fondi azionari europei, nel periodo che va da dicembre 2006 a novembre 2013. I modelli utilizzati sono leggermente diversi rispetto ai modelli originali, poiché includono ulteriori input. I risultati ottenuti sono confrontati con i valori determinati applicando le misure di performance tradizionali, presentate nel primo capitolo.

CAPITOLO PRIMO

VALUTAZIONE DELLA PERFORMANCE DEI FONDI COMUNI D'INVESTIMENTO

1.1 Introduzione

Nella valutazione della peformance di un fondo comune d'investimento è importante considerare almeno due componenti: il rischio assunto dal gestore del fondo ed il rendimento offerto. Esistono vari indici di performance che tengono in considerazione il trade-off rischio-rendimento ed in questo capitolo verranno presentati quelli più diffusi ed utilizzati dagli investitori per valutare i fondi presenti sul mercato.

1.2 Indice di Sharpe

L'indice di Sharpe, formulato dall'economista William F. Sharpe nel 1966 ed inizialmente definito *reward to variability ratio* (Sharpe 1966), misura l'extra-rendimento del fondo, rispetto a quello di un'attività non rischiosa, per unità di rischio connessa alla detenzione del fondo. Sharpe, nel suo articolo del 1966 spiega che per prevedere la performance di un fondo è sufficiente conoscere due sue misure: il rendimento atteso e la rischiosità attesa. In particolare, ipotizzando che tutti gli investitori, oltre a condividere le stesse aspettative sulla performance futura dei fondi, possano indebitarsi e prendere a prestito denaro ad un certo tasso privo di rischio, il fondo migliore è quello con l'indice di Sharpe più elevato. Questo fondo è perciò quello che si prevede possa creare il maggior valore per unità di rischio e quindi possa collocarsi nella miglior posizione nell'ambito del trade-off rischio-rendimento.

E' possibile fare una distinzione tra indice di Sharpe calcolato *ex ante* ed *ex post* (McLeod e van Vuuren, 2004). Nel primo caso si fa riferimento al rapporto tra l'extra-rendimento atteso e rischiosità attesa del fondo. Per extra-rendimento si considera la differenza tra il rendimento che ci si aspetta possa essere generato dalla gestione del fondo e quello dell'attività priva di rischio. Solitamente, il rendimento privo di rischio è associato a quello offerto dai Titoli di Stato. La rischiosità del fondo è invece rappresentata dalla deviazione standard, che misura la variabilità del rendimento offerto dal fondo. L'espressione matematica dell'indice di Sharpe *ex ante* è la seguente:

$$SR_{ex\ ante} = \frac{E(R_p) - r_f}{\sqrt{Var(R_p)}}$$

in cui:

- $E(R_p)$ è il rendimento atteso del fondo
- r_f è il rendimento privo di rischio
- $\sqrt{Var(R_p)}$ è la deviazione standard del rendimento atteso del fondo

Si può notare che l'indice aumenta al crescere del differenziale di rendimento e diminuisce all'aumentare della deviazione standard dei rendimenti.
Nella pratica finanziaria, tuttavia, ci si basa sull'utilizzo di serie storiche dei prezzi (quotazioni) o dei rendimenti periodici generati dal fondo in un determinato intervallo temporale, per la formulazione di un giudizio. Di conseguenza ci si riferisce all'indice di Sharpe *ex post*, dove il rendimento atteso è sostituito dal rendimento medio e la rischiosità, espressa sempre come deviazione standard, indica il grado di dispersione dei rendimenti periodali attorno al valore medio.
L'espressione dell'indice di Sharpe calcolato *ex post* sulla base dei rendimenti storici osservati è la seguente:

$$SR_{ex\ post} = \frac{r_p - r_f}{\sigma_p}$$

dove:

- r_p è il rendimento medio del fondo nel periodo campionario preso in considerazione ed è calcolato in base alla seguente formula:

$$r_p = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_t$$

in cui con $r_1, r_2, ..., r_T$ si indicano i rendimenti ottenuti dal fondo nei periodi $t = 1, 2, ..., T$;

- σ_p è la deviazione standard dei rendimenti del fondo, definita come segue:

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(r_t - r_p)^2}$$

La deviazione standard è spesso utilizzata come misura della rischiosità di un investimento (Nadotti, Porzio, Previati, 2010). Una consistente dispersione dei singoli rendimenti periodali attorno a quello medio è indice di un elevato grado d'incertezza sul ritorno atteso. Di conseguenza, maggiore è la dispersione dei rendimenti, maggiore è il valore assunto dalla deviazione standard. Al contrario, quando essa assume valori moderati, significa che vi è una maggiore probabilità di ottenere un rendimento vicino a quello medio. Tuttavia, questa misura di rischio presenta alcuni limiti. Essa, infatti, non è in grado di discriminare tra valori positivi e negativi, quindi anche il manifestarsi di rendimenti molto elevati rispetto a quello medio è indice di un aumento della rischiosità dell'investimento. Inoltre, essa non è in grado di cogliere l'asimmetria della distribuzione dei rendimenti, cioè il mancato rispetto dell'ipotesi di distribuzione normale.

Osservando lo spazio cartesiano rischio-rendimento è possibile dare un'interpretazione grafica all'indice di Sharpe (figura 1.1): esso è rappresentato dalla pendenza della retta che collega l'attività non rischiosa al fondo caratterizzato da un determinato profilo di rischio-rendimento. Nell'esempio della figura 1.1 si può affermare che $SR_A > SR_B$, quindi il fondo A offre un maggior rendimento per unità di rischio.

Figura 1.1: Interpretazione grafica dell'indice di Sharpe

Fonte: McLeod e van Vuuren (2004)

E' importante ricordare che l'indice di Sharpe non è utilizzato per individuare il fondo in cui collocare la totalità delle risorse a disposizione dell'investitore, ma per selezionare quel fondo che, in una strategia d'investimento in cui sia possibile investire e prendere a prestito ad uno stesso tasso privo di rischio, consente di ottenere il maggiore rendimento per unità di rischio (Sharpe, 1997).
Un investitore potrebbe per esempio ripartire le proprie risorse tra il fondo A e l'attività non rischiosa, collocandosi in un qualsiasi punto lungo la retta che li collega, oppure, potrebbe ottenere un rendimento più elevato investendo tutte le proprie risorse e del denaro preso a prestito, sul fondo A. Così facendo si posizionerebbe oltre il punto che identifica tale portafoglio titoli nel piano cartesiano. Nel confronto tra i due fondi A e B della figura 1.1, è possibile affermare la superiorità del primo rispetto al secondo, perché a parità di rischio, il fondo A riesce a garantire un rendimento medio maggiore rispetto al fondo B.
E' da notare che in questo confronto si assume che l'investitore collochi la propria ricchezza in un solo fondo, oltre che a prendere a prestito o investire al tasso privo di rischio, poiché il rischio complessivo della strategia d'investimento è rappresentato solamente dalla rischiosità del fondo preso in considerazione. Se un investitore volesse invece ripartire le proprie risorse tra più fondi, dovrebbe tenere in considerazione sia il rischio di ciascuno, sia la correlazione tra i rendimenti di ogni fondo con quelli degli

altri fondi presenti nel portafoglio. Di conseguenza, l'indice di Sharpe è più adatto ad un investitore che desidera investire in un'unica attività rischiosa.

1.3 Indice di Treynor

Come si è affermato in precedenza, l'indice di Sharpe è una misura di performance appropriata per un investitore che non diversifica la sua ricchezza. In questo caso il fondo oggetto di valutazione rappresenta l'unica attività rischiosa presente nel portafoglio. Se invece il fondo considerato è solamente una delle varie attività rischiose che compongono il portafoglio dell'investitore, una misura di performance più adatta è costituita dall'indice di Treynor (Bodie, Kane, Marcus, 2011).

Si tratta di un indicatore di performance molto simile all'Indice di Sharpe, in quanto anch'esso rappresenta l'extra-rendimento per unità di rischio prodotto dal gestore del fondo. Tuttavia, mentre nell'indice di Sharpe si utilizza il rischio complessivo decritto dalla deviazione standard, nell'indice di Treynor si considera solamente il rischio sistematico (non diversificabile), descritto dal beta del fondo.

Con riferimento ai valori *ex post*, l'indice di Treynor è definito come segue:

$$TR = \frac{r_p - r_f}{\beta_p}$$

dove:

$$\beta_p = \frac{Cov(R_p, R_M)}{\sigma^2{}_M}$$

Con R_p ed R_M si indicano rispettivamente i rendimenti del fondo e quelli del mercato, mentre con σ_M^2 si indica la varianza dei rendimenti del mercato.

Il beta (β) descrive come i rendimenti del fondo si muovono rispetto all'andamento del mercato.

In particolare si dice che:

- se $\beta < 0$ allora il fondo si muove nella direzione opposta rispetto a quella del mercato;
- se $0 < \beta < 1$ allora il fondo si muove nella stessa direzione del mercato;

- se $\beta > 1$ allora il fondo si muove nella stessa direzione del mercato e ne amplifica i movimenti.

Anche graficamente, come si può osservare dalla figura 1.2, l'indice di Treynor è molto simile a quello di Sharpe, poiché entrambi sono rappresentati dalla pendenza della una retta che collega l'attività priva di rischio al fondo. Tuttavia, mentre l'indice di Sharpe viene rappresentato in un piano cartesiano rendimento medio-deviazione standard, l'indice di Treynor viene rappresentato in un piano cartesiano rendimento medio-beta.

Figura 1.2: Interpretazione grafica dell'indice di Treynor

Fonte: Scholz e Wilkens (2005)

Il fondo con l'indice di Treynor più elevato è da preferire ad un fondo con un valore dell'indice più basso, poiché maggiore è il valore di questa misura di performance, maggiore è l'extra-rendimento del fondo per unità di rischio sistematico.

1.4 Indice di Sortino

Nella descrizione dell'indice di Sharpe si è accennato che per descrivere la rischiosità del fondo si utilizza la deviazione standard dei rendimenti. Tuttavia questa misura di rischio, proprio per il fatto di essere calcolata in base agli scostamenti del rendimento periodale rispetto a quello medio, elevati al quadrato, non discrimina tra gli scostamenti positivi e quelli negativi.

Inoltre, è irrealistico ipotizzare che i rendimenti siano distribuiti sempre secondo una v.c. Gaussiana (Bodie, Kane, Marcus, 2011). Perciò, al fine di avere una migliore rappresentazione della distribuzione dei rendimenti bisognerebbe considerare anche la curtosi e l'asimmetria della distribuzione.

La curtosi è una misura che descrive lo spessore delle code della distribuzione: una curtosi maggiore di zero indica che sulle code vi è una maggior massa di probabilità rispetto a quella descritta dalla distribuzione normale, il contrario se invece si è in presenza di una curtosi inferiore a zero. L'asimmetria può essere positiva o negativa. In presenza di un'asimmetria positiva la deviazione standard sovrastima il rischio poiché i rendimenti estremi positivi, che non dovrebbero preoccupare l'investitore, incrementano comunque la misura di rischio utilizzata. Al contrario, in presenza di un'asimmetria negativa il rischio viene sottostimato. La deviazione standard, perciò, per costruzione, non tiene in considerazione il diverso atteggiamento che gli investitori hanno nei confronti degli scostamenti superiori o inferiori rispetto al valore medio.

Esistono invece delle misure di rischio asimmetrico, che si concentrano solo sul lato sinistro della distribuzione dei rendimenti. Queste misure, da un lato affrontano il problema della distribuzione non Gaussiana dei rendimenti, e dall'altro si concentrano solo sui rendimenti indesiderati dell'investitore, che possono essere quelli inferiori al rendimento medio, o quelli inferiori ad un rendimento minimo ritenuto accettabile.

L'indice di Sortino è un indicatore di performance che misura il sovra-rendimento del fondo rispetto ad un rendimento minimo, rapportato ad una misura di rischio asimmetrico (Eling, Schuhmancher, 2007). Questo indice è definito come segue:

$$SR = \frac{r_p - r_{\min}}{DD}$$

dove *DD* è la misura di rischio asimmetrico che considera solo gli scostamenti in negativo rispetto al rendimento minimo ed è così calcolata:

$$DD = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\max\left[r_{\min} - r_{it}, 0\right]^2}$$

Il rendimento minimo ($r_{\min}$) utilizzato potrebbe essere zero oppure un qualsiasi altro rendimento scelto dall'investitore, ma molto spesso ci si riferisce al tasso privo di rischio.

1.5 Risk-Adjusted Performance (RAP) e M²

Nel 1997 Modigliani e Modigliani proposero una misura di performance che tiene in considerazione il trade-off rischio-rendimento, come l'indice di Sharpe, ma che è di più semplice interpretazione per l'investitore medio (Modigliani, Modigliani 1997). L'idea sottostante a questa misura alternativa è quella di confrontare i rendimenti dei fondi portandoli allo stesso livello di rischio del mercato (o benchmark). Quindi, ipotizzando che un investitore collochi le proprie risorse in un solo fondo, e che possa prendere a prestito ed investire ad uno stesso tasso privo di rischio, si varia la rischiosità del fondo fino a farla coincidere con quella del mercato, e si osserva il rendimento del "fondo modificato" risultante. Di conseguenza, per ciascun fondo d'investimento con un determinato profilo di rischio e rendimento, la misura di Modigliani indica il rendimento che il fondo avrebbe ottenuto, se avesse assunto lo stesso livello di rischio del mercato. La misura di Modigliani, inizialmente definita *risk adjusted performance* (RAP) è determinata in base alla seguente espressione:

$$RAP = \frac{\sigma_M}{\sigma_p}\left(r_p - r_f\right) + r_f$$

dove σ_M e σ_p rappresentano rispettivamente la deviazione standard del mercato e del fondo, r_p descrive il rendimento medio del fondo, mentre r_f indica il tasso privo di rischio.

Nel piano cartesiano rischio-rendimento della figura 1.3 è presentata un'interpretazione grafica di questa misura di performance:

Figura 1.3: Interpretazione grafica della misura di Modigliani (RAP)
Fonte: Modigliani e Modigliani (1997)

Dopo aver posizionato sul piano cartesiano i fondi A e B in base ai rispettivi valori di rischio e rendimento, la misura di Modigliani (RAP) è determinata trascinando i fondi sulle semirette che li collegano al tasso privo di rischio, fino al punto in cui raggiungono il livello di rischio del mercato. Questi punti sono stati rappresentati da due quadrati neri. In corrispondenza di tali punti è possibile leggere sull'asse delle ordinate la misura di Modigliani. In base all'analisi grafica della figura 1.3 si può osservare che il fondo B è preferibile al fondo A poiché $RAP_B > RAP_A$. Modigliani e Modigliani nel loro articolo del 1997 sottolineano il fatto che classificare i fondi in base alla loro misura di performance (RAP) o in base all'indice di Sharpe non comporta delle differenze nel ranking e di conseguenza il fondo migliore in base alla misura di Modigliani è il migliore anche in base all'indice di Sharpe. Infatti, dalla figura 1.3 si può notare che la semiretta con la pendenza più elevata è quella che collega il fondo B al tasso privo di rischio. Di conseguenza, anche in base all'interpretazione grafica dell'indice di Sharpe, il fondo B è preferibile al fondo A.

Tuttavia la misura RAP risulta di più semplice interpretazione rispetto all'indice di Sharpe, poiché per ogni fondo j è possibile calcolare RAP_j, in base all'espressione sopra riportata, e confrontare tale misura con il rendimento medio offerto dal mercato (r_M).

Infatti, in seguito all'introduzione della misura RAP, si è iniziato a considerare come misura di performance di Modigliani e Modigliani il valore M_j^2, definito come segue (Bodie, Kane, Marcus, 2011):

$$M_j^2 = RAP_j - r_M$$

Quindi quando si parla della misura di performance di Modigliani e Modigliani spesso ci si riferisce alla differenza tra il rendimento offerto dal fondo, in corrispondenza del livello di rischio del mercato (RAP_j) ed il rendimento del mercato (r_M).

Si può affermare che:

- se $M_j^2 > 0$ allora il fondo j, a parità di rischio, offre un rendimento maggiore rispetto a quello offerto dal mercato;
- se $M_j^2 < 0$ allora il fondo j offre un rendimento inferiore rispetto a quello del mercato, considerando sempre lo stesso livello di rischio.

Emerge chiaramente che è da preferire il fondo con il più alto valore di M^2.

1.6 Information Ratio

L'information Ratio è un indicatore di perfomance che considera l'extrarendimento del fondo rispetto al rendimento del benchmark di riferimento (Goodwin, 1998). Se si indica con R_{P_t} il rendimento del fondo al tempo t e con R_{B_t} il rendimento del benchmark al tempo t, allora è possibile calcolare il *tracking error* al tempo t, definito dalla seguente differenza:

$$TE_t = R_{P_t} - R_{B_t}$$

Il *tracking error* aiuta a confrontare fondi che fanno riferimento allo stesso benchmark. Per i fondi a gestione attiva è preferibile avere un *tracking error* elevato, poiché il gestore mira ad ottenere un rendimento superiore rispetto al benchmark. Se invece si considerano dei fondi a gestione passiva, il successo della gestione è indicato da un *tracking error* uguale a zero poiché, in questo caso, l'obiettivo del gestore è quello di replicare il benchmark il meglio possibile.

Calcolando il *tracking error* per un periodo di tempo che va da $t = 1$ fino a T è possibile determinare il *tracking error* medio definito come segue:

$$\overline{TE} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} TE_t$$

Inoltre si può calcolare la *tracking error volatility* la cui formula algebrica è la seguente:

$$TEV = \sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(TE_t - \overline{TE}\right)^2}$$

La TEV indica il rischio aggiuntivo che viene assunto dal gestore al fine di ottenere un rendimento superiore rispetto al benchmark (Nadotti, Porzio, Previati, 2010). Perciò maggiore è il valore della TEV, maggiore è il rischio assunto dal gestore per conseguire un differenziale di rendimento più elevato.
L'Information Ratio è un indicatore di performance solitamente utilizzato per valutare i fondi a gestione attiva ed è definito dal rapporto tra il *tracking error* medio e la *tracking error volatility* (Goodwing 1998):

$$IR = \frac{\overline{TE}}{TEV}$$

L'Information Ratio consente quindi di sintetizzare in un unico valore sia una misura di extra-rendimento, sia una di extra-rischio del fondo rispetto al benchmark. Di conseguenza si tratta di un indicatore di performance che evidenzia la capacità del gestore di generare extra-rendimento per unità di rischio rispetto al benchmark di riferimento. E' da notare che non avrebbe senso calcolare questo indicatore di performance per un fondo a gestione passiva poiché, come esposto in precedenza, se l'obiettivo del gestore è replicare il rendimento del benchmark, ci si aspetta di ottenere un *tracking error* prossimo a zero. Di conseguenza l'Information Ratio di un qualsiasi fondo a gestione passiva dovrebbe essere zero.

1.7 Alfa di Jensen

Michael C. Jensen nel 1968 formulò un indicatore di performance al fine di valutare la bravura del gestore di un fondo comune d'investimento di prevedere i prezzi futuri delle attività finanziarie (Jensen, 1968). Quindi l'obiettivo era quello di individuare una misura che consentisse di determinare l'abilità del gestore di selezionare i titoli sottovalutati presenti sul mercato.

La misura di Jensen, comunemente conosciuta come *Alfa di Jensen*, rappresenta il sovra-rendimento offerto dal fondo rispetto al rendimento che lo stesso avrebbe dovuto offrire in base al suo livello di rischio sistematico, descritto dal beta. Analiticamente l'Alfa di Jensen può essere determinato come segue (Eling, Schuhmacher, 2007):

$$\alpha_P = \left(r_p - r_f\right) - \left(r_M - r_f\right) \cdot \beta_p$$

dove r_p e r_M sono rispettivamente il rendimento medio del fondo e del mercato (o benchmark), r_f è il tasso privo di rischio e β_p rappresenta il rischio sistematico del fondo.

In base a quanto esposto da Jensen nel suo articolo del 1968 si può affermare che:

- se $\alpha > 0$ allora il manager del fondo possiede una buona abilità di selezione dei titoli sottovalutati, poiché è riuscito ad ottenere un rendimento maggiore di quello atteso, in base al rischio sistematico assunto;
- se $\alpha < 0$ allora il manager del fondo non è riuscito a selezionare titoli più performanti, e di conseguenza, il rendimento offerto risulta inferiore rispetto alla redditività che ci si poteva aspettare sulla base della rischiosità assunta.

Nel piano cartesiano rischio-rendimento della figura 1.4 è rappresentata una retta che collega il tasso privo di rischio al portafoglio di mercato, indicato dalla lettera M (Elton, Gruber, Brown, Goetzmann, 2007).

Figura 1.4: Rappresentazione grafica dell'Alfa di Jensen

Fonte: Elthon, Gruber, Brown, Goetzmann (2007)

Un investitore potrebbe posizionarsi su qualsiasi punto lungo tale retta, collocando le proprie risorse tra l'attività rischiosa ed il portafoglio di mercato. Oppure l'investitore potrebbe indebitarsi al tasso privo di rischio ed investire la propria ricchezza, più il denaro preso a prestito, esclusivamente sul portafoglio di mercato. Investire solo nell'attività non rischiosa e nel portafoglio di mercato significa perseguire una strategia di gestione passiva. La misura di performance formulata da Jensen, invece, mira a valutare la capacità del gestore del fondo di "battere il mercato" e di conseguenza fa riferimento and una politica di gestione attiva. Nella figura 1.4 l'Alfa di Jensen viene rappresentata come differenza, a parità di rischio sistematico, tra il rendimento effettivo del fondo, conseguito attuando una gestione attiva, ed il rendimento che sarebbe stato conseguito perseguendo una politica di gestione passiva. E' quindi possibile affermare che la misura di Jensen può essere determinata confrontando il rendimento del fondo con il rendimento di un portafoglio, che, a parità di rischio, è stato costruito combinando l'attività non rischiosa con il portafoglio di mercato.

La retta rappresento nella figura 1.4 può essere considerata la *security market line*, cioè quella retta che in base al Capital Asset Pricing Model (CAPM), rappresenta la relazione di equilibrio di mercato tra rendimento e rischio (Luenberg, 2006). In base a questa interpretazione, la misura di Jensen descrive la differenza tra il rendimento del fondo ed il suo rendimento di equilibrio così come descritto dal CAPM.

CAPITOLO SECONDO

LE MISURE DI PERFORMANCE NEI PERIODI DI CRISI

2.1 Introduzione

Nella valutazione dei fondi comuni d'investimento nei periodi di crisi si possono incontrare delle difficoltà nell'interpretazione di alcune delle misure di performance descritte in precedenza. In questo capitolo verrà esposto il problema legato all'utilizzo delle informazioni *ex post* per la valutazione delle prestazioni future dei fondi. In particolare verrà spiegato come, utilizzando i dati storici, possano sorgere dei dubbi sull'utilità di alcuni indici, quando il mercato si trova in una fase negativa o ne ha appena passata una, a causa della presenza di extra-rendimenti negativi.

Per la migliore comprensione del problema, con riferimento all'indice di Sharpe, saranno esposti tre esempi in cui si confronteranno due fondi con diverse caratteristiche di rischio e rendimento. Saranno inoltre esposte le opinioni contrastanti in letteratura in merito all'utilizzo dell'indice di Sharpe nei periodi di crisi.

Infine, verranno presentati tre diversi aggiustamenti (uno dei quali applicabile anche all'Information Ratio) che mirano a modificare l'indice di Sharpe, in modo da poterlo utilizzare senza che la presenza di extra-rendimenti negativi comporti dei problemi di interpretazione di tale misura.

2.2 Problemi di interpretazione

Come esposto in precedenza descrivendo l'indice di Sharpe, nella pratica finanziaria si utilizzano le informazioni *ex post* dei fondi comuni d'investimento per la valutazione della performance futura. Perciò, anche se un investitore dovesse scegliere un fondo in

base alle aspettative sul futuro profilo di rischio-rendimento, si assume che sia corretto fare riferimento ai dati del passato, anche se non si è certi che la performance storica possa ripetersi nei periodi a venire (Sharpe 1998).
Questa consuetudine è tuttavia utilizzata anche per la determinazione delle altre misure di performance descritte nel precedente capitolo e ciò può comportare un problema di interpretazione quando tali misure vengono utilizzate nei periodi in cui il mercato è in una fase negativa, o ne ha appena passata una, poiché il valore di tali indici potrebbe risultare negativo. Tra le misure di performance introdotte nel precedente capitolo, si può affermare che la misura di Modigliani e Modigliani (M^2) e l'Alfa di Jensens (α) non presentano delle difficoltà di interpretazione se assumono dei valori negativi.
Infatti:

- se $M^2 < 0$ significa che il fondo oggetto di valutazione offre un rendimento inferiore al rendimento del mercato (o benchmark), a parità di rischio complessivo (misurato dalla deviazione standard del fondo);
- se $\alpha < 0$ significa che il fondo è riuscito ad offrire un rendimento inferiore rispetto alla redditività che ci si poteva aspettare sulla base del rischio sistematico assunto.

McLeod e van Vuuren (2004) espongono invece il problema dell'interpretazione dell'indice di Sharpe in presenza di extra-rendimenti negativi. In questa situazione, infatti, affermare che il fondo migliore è quello con l'indice di Sharpe più elevato (meno negativo) contraddice l'idea di pensare che a parità di rendimento il fondo migliore sia quello meno rischioso. Inoltre l'indice di Sharpe può risultare inferiore a zero sia quando il rendimento offerto dal fondo è negativo, sia quando è positivo, ma inferiore al tasso privo di rischio.
Per una miglior comprensione del problema, sono presentati tre esempi in cui si confrontano due fondi con differenti caratteristiche di rischio-rendimento.
Nella tabella 2.1 si riportano i dati di due fondi, entrambi con un indice di Sharpe positivo.

Tabella 2.1: Confronto tra due fondi con indice di Sharpe positivo

Fonte: McLeod e van Vuuren (2004)

In questo esempio, il fondo B offre un rendimento maggiore rispetto al fondo A, ma considerando anche il rischio assunto dal primo, si può osservare che $SR_A > SR_B$. E' importante notare che se nel confronto fosse stato considerato solo il rendimento offerto da ciascun fondo, si sarebbe giunti ad una conclusione opposta. Il fondo B sarebbe stato considerato erroneamente il migliore: tale fondo ha raggiunto rendimenti migliori perché il gestore si è posizionato su livelli di rischiosità più elevati rispetto al gestore del fondo A, e quindi non perché dispone di particolari abilità. Questa osservazione serve per evidenziare l'importanza di non classificare i fondi considerando solo il loro rendimento, ma di utilizzare per il confronto delle misure, come l'indice di Sharpe, che per costruzione considerano, oltre al rendimento, anche il rischio.

Nella tabella 2.2 sono messi a confronto due fondi che offrono lo stesso rendimento, che però è inferiore al tasso privo di rischio, con la conseguenza che gli extra-rendimenti di entrambi i fondi sono negativi, e lo sono anche gli indici di Sharpe. Sorgono perciò i primi problemi di interpretazione di questa misura di performance.

Tabella 2.2: Confronto tra due fondi con pari rendimento ed indice di Sharpe negativo

Fonte: McLeod e van Vuuren (2004)

Nell'esempio esposto si può osservare che $SR_C > SR_D$, perciò, in base alla definizione dell'indice di Sharpe, il fondo C offre un maggior rendimento per unità di rischio rispetto al fondo D. Tuttavia, è possibile notare che entrambi i fondi offrono lo stesso rendimento, quindi ci si potrebbe chiedere perché un investitore dovrebbe considerare come migliore il fondo C, se il fondo D offre lo stesso rendimento ma con un rischio minore. Inoltre, ci si potrebbe domandare il perché un investitore dovrebbe investire in un fondo che gli offre un extra-rendimento negativo e se non fosse più logico investire solamente nell'attività priva rischio.

In un ultimo esempio, presentato nella tabella 2.3, si confrontano due fondi con rendimenti negativi.

Tabella 2.3: Confronto tra due fondi con rendimenti negativi

Fonte: McLeod e van Vuuren (2004)

In questo esempio il problema dell'interpretazione dell'indice di Sharpe è ancora più evidente: il fondo E offre un minore extrarendimento, con un maggior rischio del fondo F, però $SR_E > SR_G$. Ci si potrebbe chiedere perché investire in uno dei due fondi e perché proprio in quello più rischioso che offre un rendimento più basso. Perciò, come interpretare i valori negativi dell'indice di Sharpe? Ha senso utilizzarlo per selezionare il fondo migliore anche in presenza di extra-rendimenti negativi o in questo caso dovrebbe essere modificato? In molti si sono chiesti come interpretare i valori negativi dell'indice di Sharpe e come utilizzarli per la valutazione della performance.

In letteratura ci sono pareri contrapposti: alcuni sostengono che l'indice di Sharpe, nella sua formulazione originale, può essere utilizzato sempre, a prescindere dall'andamento del mercato (Sharpe 1997,1998, Akeda 2003, McLeod e van Vuuren 2004,); altri, invece, propongono degli aggiustamenti a tale indice, al fine di poterlo utilizzare anche nei periodi di crisi (Ferruz e Sarto 2004, Irealsen 2003, 2005, Scholz e Wilkens 2006, 2006b).

Sharpe (1997,1998) sostiene che, anche in presenza di extra-rendimenti negativi, nel confronto tra due fondi è comunque da preferire quello con l'indice di Sharpe più elevato. Osservando la figura 2.4 si può notare che i fondi A e B presentano entrambi un indice di Sharpe inferiore a zero, poiché le rette che collegano ciascun fondo all'attività priva di rischio hanno una pendenza negativa. Il fondo B, oltre ad essere più rischioso del fondo A, offre anche un extra-rendimento inferiore (più negativo), tuttavia l'indice di Sharpe ad esso associato è più elevato rispetto a quello del fondo A.

Figura 2.4: Performance di due fondi nei periodi di crisi

Fonte: Sharpe (1998)

Sharpe giustifica la preferibilità del fondo B introducendo il fondo B′, il quale ha lo stesso indice di Sharpe del fondo B, poiché si trova sulla stessa semiretta che collega il fondo B all'attività non rischiosa. Come si può notare dalla figura 2.4, il fondo B′ offre un extra-rendimento più elevato rispetto al fondo A, a parità di livello di rischio di quest'ultimo (10%). Di conseguenza la preferibilità del fondo B è giustificata dal fatto che potendo investire e prendere a prestito al tasso privo di rischio è possibile posizionarsi lungo qualsiasi punto sulla retta che collega il fondo all'attività non rischiosa. Quindi il fondo B, che ha un indice si Sharpe più elevato (meno negativo) rispetto al fondo A, è il migliore perché, utilizzato in una strategia d'investimento in cui è possibile prendere a prestito ed investire al tasso privo di rischio, consente di ottenere un extra-rendimento più elevato per qualsiasi livello di rischio scelto dall'investitore.

Anche in base all'opinione di Akeda (2003) la scelta del fondo migliore deve ricadere sul fondo con l'indice di Sharpe maggiore, anche se negativo. Tuttavia, Akeda afferma che in presenza di extra-rendimenti negativi non è più corretto pensare che, a parità di rendimento, il fondo preferibile sia quello meno rischioso. Di conseguenza propone una modalità alternativa di confrontare due fondi che può essere utilizzata a prescindere al segno assunto dell'indice di Sharpe. In particolare, Akeda utilizza l'espressione della Capital Market Line ex-ante per costruire lo *Z-score* di due fondi A e B e dimostra che la differenza tra gli *Z-score* dei due fondi è uguale alla differenza tra gli indici di Sharpe degli stessi fondi.

La Capital Market Line è la retta che in base al CAPM pone in relazione il rendimento atteso del fondo e la sua deviazione standard.

La sua espressione è la seguente:

(2.1)

dove r_p, r_M, r_f rappresentano rispettivamente il rendimento medio del fondo, del mercato e dell'attività priva di rischio; mentre σ_p e σ_M sono rispettivamente la deviazione standard del fondo e quella del mercato.

Graficamente la Capital Market Line può essere descritta nel diagramma deviazione standard-rendimento da una retta che collega l'attività priva di rischio al portafoglio di mercato (figura 2.5). L'inclinazione di tale retta è descritta dal valore $\frac{r_M - r_f}{\sigma_M}$, che nella Capital Market Line *ex-ante* assume un valore positivo poiché, se il mercato è efficiente, ad una elevata rischiosità attesa corrisponde un elevato rendimento atteso.

Figura 2.5: Capital Market Line

Fonte: Luenberg (2006)

Definendo $k = \dfrac{r_M - r_f}{\sigma_M}$ e spostando r_f a sinistra dell'uguaglianza si ottiene:

(2.2)

Considerando per esempio il portafoglio A è possibile definire il suo extra-rendimento atteso come segue:

(2.3)

In seguito Akeda determina il cosiddetto *Z-score* del fondo A in base alla seguente espressione:

(2.4)

Allo stesso modo viene determinato lo *Z-score* del fondo B e si dimostra che:

(2.5)

I valori Z_A e Z_B possono essere considerati come delle realizzazioni di una variabile casuale normalizzata con valore atteso 0 e deviazione standard 1. Maggiore è lo *Z-score* migliore è la performance del fondo. E' possibile osservare che nella determinazione dei valori *Z-score* è presente il parametro k, mentre nella differenza tra gli *Z-score* di due fondi il parametro k scompare e tale differenza equivale a quella tra gli indici di Sharpe dei due fondi, calcolati utilizzando solo i valori *ex post*. Di conseguenza, se si assume che un maggior *Z-score* sia indice di una migliore performance, allora si può concludere che il migliore fondo è sempre quello con l'indice di Sharpe più elevato. Tale affermazione vale anche se si considerano indici di Sharpe negativi poiché nel ragionamento appena esposto non viene fatta alcuna assunzione circa il loro segno.

McLeod e van Vuuren (2004) sostengono che sia corretto utilizzare l'indice di Sharpe, senza porvi modifiche, anche quando il mercato si trova in una fase negativa, ma al fine di evitare i problemi legati alla presenza di valori inferiori a zero, viene suggerita un'ulteriore interpretazione. McLeod e van Vuuren dimostrano che selezionare il fondo con l'indice di Sharpe maggiore equivale a scegliere il fondo che ha la maggiore probabilità di offrire un rendimento superiore al tasso privo di rischio.
Infatti si può notare che:

(2.6)

da cui:

con $z \sim N\,(0,1)$ (2.7)

di conseguenza:

(2.8)

oppure, in modo alternativo:

(2.9)

Per una miglior comprensione di quanto esposto, viene presentato un esempio numerico, utilizzando i dati della tabella 2.3, in cui entrambi i fondi offrono un rendimento medio negativo.
La probabilità del fondo E di offrire un rendimento superiore al tasso privo di rischio è la seguente:

Mentre la probabilità del fondo G di offrire un rendimento maggiore al tasso privo di rischio è data da:

La preferibilità del fondo E deriva da fatto che $0{,}071 > 0{,}004$. Quindi tale fondo ha una maggiore probabilità di offrire un rendimento superiore al tasso privo di rischio. Dalla tabella 2.3 si può notare che $SR_E > SR_G$, di conseguenza scegliere il fondo con la probabilità più elevata di offrire un rendimento maggiore rispetto al tasso privo di rischio equivale a scegliere il fondo con il più elevato di Sharpe.

Figura 2.6: Distribuzione dei rendimenti dei fondi E e G

Fonte: McLeod e van Vuuren (2004)

L'esempio appena esposto è rappresentato graficamente nella figura 2.6, in cui è possibile osservare la distribuzione dei rendimenti di ciascun fondo.

L'area evidenziata sulla coda superiore di ciascuna distribuzione rappresenta la probabilità che il rendimento del fondo superi il rendimento privo di rischio. Dalla figura sopra esposta, però, è inoltre possibile osservare che al fondo con una più elevata probabilità di superare il tasso privo di rischio è associata anche una maggiore probabilità di andare incontro a perdite molto elevate.

2.3 Alcuni aggiustamenti

Come accennato in precedenza, alcuni ricercatori ritengono che l'indice di Sharpe non possa essere utilizzato nella sua formulazione originale quando vi sono degli extra-rendimenti negativi. Di conseguenza sono state suggerite delle modifiche da apportare a tale indice, al fine di evitare i problemi d'interpretazione evidenziati in precedenza. Gli aggiustamenti che saranno presentati riguarderanno solamente l'indice di Sharpe, ad eccezione della correzione proposta da Irealsen (2003, 2005), che può essere applicata anche all'Information Ratio.

2.3.1 La proposta di Ferruz e Sarto

La correzione che Ferruz e Sarto (2004) hanno suggerito per l'indice di Sharpe consiste nel calcolare l'extra-rendimento del fondo rispetto al tasso privo di rischio in senso relativo, anziché assoluto. Di conseguenza si consiglia di utilizzare la seguente espressione:

(2.10)

La correzione esposta presenta però un limite: consente di ottenere una coerente valutazione della performance dei fondi solo quando il rendimento medio del fondo è maggiore di zero (Ferruz, Vicente, 2005).
Perciò:

- se $r_p < r_f$ e $r_p > 0$ allora è possibile applicare l'espressione 2.10;
- se $r_p < r_f$ e $r_p < 0$ allora l'espressione 2.10 non è più utilizzabile.

2.3.2 La proposta di Irealsen

L'indice di Sharpe, oltre ad essere calcolato in base all'espressione esposta nel precedente capitolo, può essere definito anche come segue:

(2.11)

Dove ER rappresenta l'extra-rendimento del fondo rispetto al tasso privo di rischio e SD è la deviazione standard dell'extra-rendimento.
Irealsen suggerisce di modificare l'espressione 2.11 aggiungendo un esponente al denominatore, come esposto qui di seguito:

(2.12)

L’esponente aggiunto al denominatore è il rapporto tra l’extra-rendimento ed il valore assoluto dell’extra-rendimento. Osservando le tabelle 2.7 e 2.8 si può notare che quando ER è positivo l’indice di Sharpe calcolato in base alla formulazione proposta da Irealsen (SR_I) è identico all’indice di Sharpe originale (SR). Quando invece ER è negativo i valori dei due indici sono molto differenti e differisce anche il ranking in base al quale i fondi possono essere ordinati dal migliore al peggiore. Per esempio il fondo L, rispetto agli altri fondi, è quello che presenta un extra-rendimento più basso ed una rischiosità più elevata. Tale fondo viene considerato il migliore in base all’indice di Sharpe originale ed il peggiore in base all’indice di Sharpe modificato da Irealsen.

Tabella 2.7: Confronto tra SR e SR_I

Fonte: Irealsen (2003)

Tabella 2.8: Confronto tra SR e SR_I con extra-rendimenti negativi

Fonte: Irealsen (2003)

Irealsen (2005) propone di applicare la stessa correzione apportata all’indice di Sharpe anche all’lnformation Ratio. I due indici hanno sono molto simili, solamente che mentre nell'indice di Sharpe l'extra-rendimento viene calcolato rispetto al tasso privo di rischio, nell'Information Ratio l'extra-rendimento è calcolato rispetto al rendimento del benchmark di riferimento. Perciò l'information Ratio corretto da Irealsen è il seguente:

(2.13)

dove ER rappresenta la differenza tra il rendimento del fondo ed il rendimento del benchmark.
Irealsen sostiene che utilizzando SR_I e IR_I nei periodi di crisi, è possibile ottenere un ranking corretto dei fondi, in cui vengono premiati gli elevati extra-rendimenti e le basse deviazioni standard degli extra-rendimenti, proprio come accade quando gli extra-rendimenti sono positivi.

2.3.3 L'indice di Sharpe normalizzato

Scholz e Wilkens (2006, 2006b) hanno evidenziato che l'indice di Sharpe dipende da due componenti: la bravura del gestore e l'andamento del mercato. Perciò nella valutazione della performance di un fondo, utilizzando l'indice di Sharpe tradizionale, si ottengono dei valori che spesso sono distorti dal clima di mercato di breve periodo. Di conseguenza, al fine di poter valutare i fondi a prescindere dall'andamento del clima di mercato, Scholz e Wilkens (2006, 2006b) suggeriscono di utilizzare un indice di Sharpe normalizzato (nSR).
Ipotizzando che l'extra-rendimento del fondo *i* per il periodo *t* dipenda dall'extra-rendimento del mercato, si considera il seguente modello di regressione lineare:

con $\varepsilon_{i\,t} \sim N\left(0, \sigma^2_{\varepsilon_i}\right)$ (2.14)

dove:

- $er_{i\,t} = r_{i\,t} - r_{f\,t}$ è l'extra-rendimento del fondo *i* rispetto al tasso privo di rischio nel periodo *t*;

- $er_{M\,t} = r_{M\,t} - r_{f\,t}$ è l'extra-rendimento del mercato rispetto al tasso privo di rischio nel periodo *t*;
- β_i rappresenta il livello di rischio sistematico del fondo *i*;
- α_i rappresenta l'Alfa di Jensen del fondo *i*;
- $\sigma^2_{\varepsilon_i}$ è la varianza della distribuzione del termine di errore (ε_i) e $\sqrt{\sigma^2_{\varepsilon_i}} = \sigma_{\varepsilon_i}$ rappresenta il rischio specifico del fondo *i*.

In base all'espressione 2.14 è possibile determinare la media e la deviazione standard dell'extra-rendimento del fondo *i* che serviranno in seguito per determinare l'indice di Sharpe normalizzato.
La media dell'extra-rendimento del fondo *i* è così definita:

(2.15)

in cui $\overline{er_M}$ rappresenta l'extra-rendimento medio del mercato rispetto al tasso privo di rischio.
La deviazione standard dell'extra-rendimento del fondo *i* è la seguente:

(2.16)

Utilizzando le espressioni 2.15 e 2.16 è possibile definire un indice di Sharpe normalizzato del fondo *i* come segue:

(2.17)

In base a quanto esposto, Scholz e Wilkens (2006, 2006b) suggeriscono di determinare l'indice di Sharpe normalizzato attraverso tre passi:

1. con riferimento al modello di regressione 2.14 si conduce un'analisi di regressione in modo da stimare le specifiche caratteristiche del fondo *i*, ottenendo: $\hat{\alpha}_i$, $\hat{\beta}_i$ e $\hat{\sigma}^2_{\varepsilon_i}$;

2. si calcola la media e la varianza dell'extra-rendimento del mercato, utilizzando una serie storica di dati più lunga (per esempio 20 anni) rispetto a quella considerata al passo 1. In questo modo si ottengono: $\hat{\mu}_{l\,M}$ e $\hat{\sigma}^2_{l\,M}$;
3. si utilizzano i valori ottenuti nei due passi precedenti e con riferimento all'espressione 2.17 si ottiene l'indice di Sharpe normalizzato (nSR):

(2.18)

L'indice di Sharpe normalizzato, proprio perché considera i valori di lungo periodo $\hat{\mu}_{l\,M}$ e $\hat{\sigma}^2_{l\,M}$, non è influenzato dall'andamento del mercato nel breve periodo e di conseguenza consente di ottenere una più accurata valutazione della gestione del fondo. Per il motivo appesa esposto, tale indice può essere utilizzato sempre, a prescindere dall'andamento del mercato, e quindi non solo nei periodi di crisi.

CAPITOLO TERZO

DATA ENVELOPMENT ANALYSIS

3.1 Introduzione

In questo capitolo verrà presentata la Data Envelopment Analysis (DEA), una metodologia che consente di calcolare l'efficienza relativa delle unità produttive o unità decisionali (Decision Making Units, DMU), definite come delle entità che, in un processo produttivo, utilizzano degli input per ottenere determinati output.
Verranno accennate le origini storiche di questa metodologia, risalenti al 1978, anno in cui Charnes, Cooper e Rhodes estesero l'idea, introdotta da Farrell nel 1957, di determinare una misura di efficienza tecnica facendo riferimento ad una funzione di produzione.
Nei successivi paragrafi saranno spiegati i principali modelli di cui la DEA si compone, partendo dal modello CCR introdotto da Charnes, Cooper e Rhodes nel 1978, seguito dal modello BCC formulato da Banker, Charnes e Cooper nel 1984, in cui si estende il modello CCR al caso in cui possono presentarsi rendimenti di scala variabili. Verrà introdotto il modello Additivo, in cui non è più necessario distinguere tra orientamento agli output ed orientamento agli input, come invece accade per i modelli CCR e BCC, poiché il tale modello opera combinando entrambi gli orientamenti. Infine sarà esposto il modello SBM (Slacks-Based Measures) che non varia rispetto all'unità di misura con cui sono misurati gli inputs e gli outputs ed è monotono decrescente in ciascun output slack ed input slack.

3.2 Origini

La Data Envelopment Analysis (DEA) è una metodologia non parametrica che utilizza tecniche di programmazione lineare al fine di determinare l'efficienza relativa di unità produttive o unità decisionali (Decision Making Units, DMU) simili (Charnes, Cooper, Lewin, Seiford 1994). Una DMU è definita come un'entità che attraverso un processo produttivo trasforma determinati input in output e la similitudine delle DMU, che compongono il campione di analisi, consiste nell'utilizzo, da parte di ciascuna DMU, degli stessi input per produrre gli stessi output nelle medesime condizioni di produzione. Il fatto che la DEA rientri nell'insieme delle metodologie non parametriche favorisce la sua flessibilità di applicazione, poiché non è necessario esplicitare a priori una funzione di produzione che spieghi come gli input e gli output delle unità produttive siano legati tra di loro.

L'origine della DEA risale al 1978, grazie al lavoro di Charnes, Cooper e Rhodes (1978) che utilizzarono la programmazione matematica estendendo gli studi condotti da Farrell (1957). Farrel introdusse la possibilità di determinare una misura di efficienza in una situazione in cui si considera un unico output e più input, mentre Charnes, Cooper e Rhodes (1978) proposero un modello in grado di determinare una misura di efficienza anche utilizzando più di un output e più di un input. Charnes, Cooper e Rhodes formularono così il modello CCR, che venne utilizzato per la prima volta al fine di valutare l'efficienza relativa dei programmi educativi per i bambini svantaggiati, intrapresi dalle scuole pubbliche statunitensi con il sostegno del governo. Tra gli input venne considerato per esempio "il tempo che le madri hanno passato a leggere con i propri figli", mentre tra gli output venne considerato per esempio "l'incremento dell'autostima nei bambini svantaggiati", misurato attraverso dei test psicologici.

Dal 1978 ad oggi sono stati sviluppati ulteriori modelli che rientrano sempre nella metodologia DEA. Per esempio il modello BCC, in cui viene rilassata la condizione di rendimenti di scala costati, presente nel modello CCR, in modo da poter applicare la DEA anche in presenza di rendimenti di scala variabili. Inoltre sono stati condotti molti studi che hanno esteso l'utilizzo di questa metodologia a vari campi, tra cui istruzione, sanità, sport, ricerche di mercato, benchmarking, agricoltura, trasporti e finanza.

3.3 Il modello CCR

Il modello CCR (Charnes, Cooper, Rhodes), formulato nel 1978, consente di determinare l'efficienza relativa di ciascuna unità decisionale del campione di analisi, sotto l'ipotesi di rendimenti di scala costanti (Cooper, Seiford, Tone, 2006).

Si consideri un campione di n unità decisionali in cui ciascuna unità decisionale j (con $j = 1,...,n$) utilizza m input al fine di ottenere s output. Di conseguenza per ciascuna DMU_j si considerino le seguenti notazioni:

$i = 1,...,m$	input
$r = 1,...,s$	output
x_{ij}	quantità dell'input i impiegato dall'unità decisionale j
y_{rj}	quantità dell'output r ottenuto dall'unità decisionale j

Di conseguenza, in base al campione delle n unità decisionali considerate, la matrice degli input X, che è una matrice ($m \times n$), e la matrice degli output Y, che è una matrice ($s \times n$) possono essere rappresentate come segue:

(3.1)

(3.2)

Ai fini della determinazione di una corretta misura di efficienza attraverso questo modello è necessario assumere che tutti i dati siano positivi, mentre non è necessario che siano espressi nella stessa unità di misura.

Si considerino inoltre per ciascuna DMU$_j$ i seguenti pesi:

v_i il peso associato all'input i con $i = 1,...,m$

u_r il peso associato all'output r con $r = 1,...,s$

Se si conoscessero i valori dei pesi associati a ciascun input ed a ciascun output, allora sarebbe possibile determinare l'efficienza di una generica DMU$_j$ calcolando il rapporto tra la somma pesata degli output sulla somma pesata degli input come segue:

(3.3)

Tuttavia fissare a priori dei pesi può comportare dei problemi. Per esempio potrebbe non essere chiaro se il risultato finale ottenuto sia dovuto maggiormente alla scelta di determinati pesi, oppure alle osservazioni sugli input impiegati e sugli output ottenuti. Inoltre, bisognerebbe giustificare l'uso di determinati valori per i pesi al posto di altri.
Nella metodologia DEA non si presentano questi problemi poiché i pesi da associare a ciascun output ed a ciascun input, per ogni unità decisionale, derivano direttamente dai dati a disposizione (Cook, Tone, 2009). Charnes, Cooper e Rhodes, infatti, proposero di determinare i valori dei pesi risolvendo un particolare problema di programmazione non lineare. Più precisamente, per una generica DMU$_0$ si risolve il seguente problema di programmazione frazionaria al fine di ottenere una misura di efficienza tecnica dell'unità decisionale considerata:

(3.4)

con i seguenti vincoli:

$$j = 1,...,n \tag{3.5}$$

$$r = 1,...,s \tag{3.6}$$

$$i = 1,...,m \tag{3.7}$$

in cui ε è un valore strettamente positivo e molto piccolo.

Si può osservare che inizialmente Charnes, Cooper e Rhodes nel loro articolo del 1978 imposero solamente un vincolo di non negatività per i pesi u_r e v_i (considerando perciò $u_r \geq 0$ e $v_i \geq 0$); tuttavia in seguito, in un articolo del 1981, scritto sempre dagli stessi autori, venne introdotto il valore $\varepsilon > 0$ in modo tale che i pesi possano assumere qualsiasi valore non negativo escluso lo zero.

Risolvendo il problema di programmazione frazionaria (3.4) – (3.7), per ogni unità decisionale si ottengono dei valori per i pesi degli output u_r ($r = 1,...,s$) e dei valori per i pesi degli input v_i ($i = 1,...,m$), i quali possono differire per ciascuna DMU. Questo accade poiché per ogni unità produttiva vengono determinati i valori dei pesi u_r e v_i al fine di massimizzare il rapporto tra la somma pesata degli output e la somma pesata degli input. Il valore di questo rapporto, indicato con e_0, rappresenta l'efficienza della DMU_0 considerata. In base ai vincoli imposti, il valore di e_0 può essere al massimo pari a 1. In particolare, se le variabili slack (che verranno spiegate in seguito) sono nulle, $e_0 = 1$ e di conseguenza si è in presenza di una unità produttiva efficiente, cioè che giace sulla frontiera efficiente.

Il modello (3.4) – (3.7) viene definito CCR input-oriented poiché si massimizza il rapporto tra la somma pesata degli output e la somma pesata degli input. Questo significa che il modello mira a minimizzare la quantità di input al fine di ottenere almeno i livelli degli output osservati. Nel modello CCR ouput-oriented, invece, si risolve un problema di minimizzazione del rapporto tra la somma pesata degli input e la somma pesata degli output. In questo caso l'obiettivo è ottenere il maggior numero di output senza impiegare maggiori quantità di input rispetto a quelle osservate.

Il problema di programmazione frazionaria (3.4) – (3.7) può essere trasformato in un problema di programmazione lineare. In particolare ipotizzando che:

dove

il modello (3.4) – (3.7) diventa:

(3.8)

con i seguenti vincoli:

(3.9)

$j = 1,...,n$ (3.10)

$r = 1,...,s$ (3.11)

$i = 1,...,m$ (3.12)

Se risolvendo il problema di programmazione lineare (3.8) - (3.12) si ottiene per la DMU_0 la soluzione ottimale (e_0^* , u'^* , v'^*), allora l'unità produttiva in questione viene definita efficiente in base al modello CCR se $e_0^* = 1$ e le variabili slack sono tutte nulle, con $u'^* > 0$ e $v'^* > 0$; altrimenti è definita inefficiente in base al modello CCR.

Il problema di programmazione frazionaria (3.4) – (3.7) è equivalente al problema di programmazione lineare (3.8) – (3.12). Questo significa che le soluzioni ottimali che si possono ottenere dal problema di massimizzazione (3.4) – (3.7) sono le stesse di quelle che si possono ricavare dal problema di massimizzazione (3.9) – (3.12), per ogni unità produttiva considerata (Cooper, Seiford, Tone, 2006). Inoltre per ogni DMU_j il valore e_j^* non dipende dall'unità di misura con cui sono stati definiti gli input e gli output. Questo significa che se ciascun input viene moltiplicato per una costante $\delta_i > 0$ ($i = 1,...,m$) e ciascun output viene moltiplicato per una costante $p_r > 0$ ($i = 1,...,s$) le soluzioni ottimali non cambiano. Tuttavia è necessario che le unità di misura utilizzate siano le stesse per ciascuna delle unità produttive considerate.

Si consideri ora una generica DMU_0 con $e_0^* < 1$. Per questa unità produttiva inefficiente è possibile utilizzare i valori u^* e v^* per definire il suo *reference set* o *peer group* (E_0), il quale rappresenta l'insieme delle unità produttive in cui la somma pesata degli output è uguale alla somma pesata degli input, utilizzando come pesi i valori u^* e v^*, ottenuti risolvendo il problema di programmazione lineare (3.9) – (3.12) per la generica DMU_0.
Considerando tutte le *j* (con $j = 1,...,n$) unità produttive che compongono il campione di analisi, il *peer group* della DMU_0 è rappresentato dal seguente insieme:

(3.13)

Quindi, il *peer group* di una unità decisionale inefficiente è rappresentato da un sottoinsieme delle DMU efficienti, con le quali la DMU inefficiente può essere più facilmente comparata. Inoltre, il *peer group* può variare per ciascuna unità produttiva inefficiente presente nel campione di analisi.
Qui di seguito sono esposti due esempi (tratti da Cooper, Seiford, Tone, 2006) in cui si utilizza il modello CCR input-oriented per la valutazione di un ristretto gruppo di unità produttive.
Si ipotizzi di dover valutare l'efficienza relativa delle otto unità produttive riportate nella tabella 3.1. In questo caso il processo produttivo è caratterizzato dall'utilizzo di un solo input per produrre un unico output.

Tabella 3.1: Dati esempio un input - un output

Fonte: Cooper, Seiford, Tone (2006)

Se per esempio si considera l'unità produttiva A (DMU_A), la sua efficienza può essere valutata considerando il seguente problema di programmazione lineare:

con i vincoli

(A)	(B)
(C)	(D)
(E)	(F)
(G)	(H)

Risolvendo il problema appena esposto è possibile ottenere la soluzione ottimale per la DMU_A:

In questo esempio l'unità decisionale A è inefficiente poiché $e_A^* < 1$. Come spiegato in precedenza, per ciascuna DMU inefficiente è possibile determinare il rispettivo *reference set* utilizzando i valori dei pesi ottimali della unità produttiva esaminata. In questo esempio per la DMU_A si hanno $v^* = 0{,}5$ e $u^* = 0{,}5$ ed il rispettivo *reference set* è composto solamente dall'unita produttiva B. Infatti, se $v^* = 0{,}5$ e $u^* = 0{,}5$, allora considerando il vicolo sopra esposto riferito alla DMU_B con il segno di uguaglianza si ottiene $3u^* = 3v^*$. Quindi $E_A = \{B\}$ poiché, utilizzando i pesi ottimali dell'unità produttiva A, la somma pesata degli output è uguale alla somma pesata degli input solo per l'unità produttiva B.

L'efficienza dell'unità decisionale B può essere determinata in modo simile a come è stato esposto per l'unità decisionale A. Quindi l'efficienza della DMU_B si ottiene risolvendo il seguente problema di programmazione lineare:

con i vincoli

(A)	(B)
(C)	(D)
(E)	(F)
(G)	(H)

La soluzione ottimale dell'unità produttiva B è:

Perciò la DMU$_B$ è efficiente poiché $e_B^* = 1$ con $u^* > 0$ e $v^* > 0$.

Sarebbe possibile determinare l'efficienza di tutte le atre DMU della tabella 3.1 procedendo in modo simile. Nella figura 3.2 è rappresentata la frontiera efficiente del caso in esame. E' possibile notare che solo l'unità produttiva B giace sulla frontiera efficiente, quindi tutte le altre DMU, che sono invece posizionate al di sotto della frontiera stessa, sono inefficienti. In questo caso particolare, poiché vi è un'unica unità produttiva efficiente, il *reference set* di tutte le unità produttive inefficienti è composto solo dalla DMU$_B$.

Figura 3.2: Frontiera efficiente nel modello CCR un input – un outpu

Fonte: Cook, Seiford (2009)

Osservando la figura 3.2 si nota che l'unità decisionale A, la cui misura di efficienza calcolata in precedenza è $e_A^* = 0{,}5$, è posizionata al di sotto della frontiera efficiente. Inoltre, dato che il modello considerato nell'esempio esposto è input-oriented, sapendo che $e_A^* = 0{,}5$, si può affermare che l'unità decisionale A potrebbe diventare efficiente se a parità di output riducesse gli input del 50%. Infatti, se la quantità dell'input utilizzata dalla DMU_A fosse $0{,}5 \times 2 = 1$ allora l'unità produttiva considerata si posizionerebbe sulla frontiera efficiente.

Nella figura 3.2 si può inoltre osservare che l'efficienza della DMU_A, può essere calcolata come il rapporto Z/R, dove Z rappresenta la distanza orizzontale tra l'asse delle ordinate ed il punto sulla frontiera efficiente che garantisce la stessa quantità di output della DMU_A, impiegando una minor quantità di input; mentre R indica la distanza orizzontale tra la DMU_A e l'asse delle ordinate.

Se invece del modello CCR input-oriented, utilizzato in questo esempio, si considerasse il modello CCR output-oriented, allora la misurazione dell'efficienza delle unità produttive dovrebbe essere determinata facendo riferimento all'asse delle ascisse, dove sono indicate le quantità dell'input impiegate nel processo produttivo. Per esempio, l'efficienza dell'unità produttiva A dovrebbe essere calcolata come il rapporto tra la distanza verticale tra l'asse delle ascisse ed il punto sulla frontiera efficiente (che garantisce un output maggiore impiegando la stessa quantità di input della DMU_A), e la distanza verticale tra l'asse delle ascisse e la DMU_A. In questo caso il valore del rapporto appena descritto è pari a 2. Questo significa che l'unità produttiva A per diventare efficiente, mantenendo costante il livello degli input impiegati, dovrebbe produrre una quantità dell'output pari a $2 \times 1 = 2$. E' interessante notare che $1/2 = 0{,}5$ è la stessa misura di efficienza ottenuta per la DMU_A per il modello input-oriented.

Nella figura 3.2 viene evidenziato anche l'insieme delle possibilità produttive (*production possibility set*). Se si descrive ciascuna DMU attraverso la coppia di vettori positivi (x, y), è possibile definire l'insieme delle possibilità produttive come tutte le possibili coppie di vettori (x, y) che si possono ottenere dal processo produttivo.

Di conseguenza, se si indica la matrice degli input con $X = (x_j)$ e la matrice degli output con $Y = (y_j)$, è possibile definire l'insieme delle possibilità produttive (indicato con P) come segue:

(3.14)

dove λ è un vettore non negativo di dimensione $(n \times 1)$.

L'insieme delle possibilità produttive soddisfa le seguenti proprietà:

- Tutte le coppie di vettori osservate (x_j, y_j) (con $j = 1,...,n$), appartengono a *P*;
- Se la coppia di vettori (x, y) appartiene a *P*, allora anche la coppia di vettori (tx, ty) appartiene a *P*, per ogni scalare positivo *t* (questa proprietà viene definita ipotesi di rendimenti di scala costanti);
- Se la coppia di vettori (x, y) appartiene a *P,* allora qualsiasi altra coppia $(\bar{x}, \bar{y})$ con $\bar{x} \geq x$ e $\bar{y} \leq y$ è inclusa in *P*. Questo significa che appartiene all'insieme delle attività produttive qualsiasi attività che impiega nel processo un ammontare di input non inferiore a *x* per ottenere un ammontare di output non superiore a *y*;
- Appartiene a *P* qualsiasi combinazione lineare positiva delle coppie di vettori (x, y) incluse in *P.*

Si consideri ora il caso in cui il processo produttivo è caratterizzato dall'impiego di 2 input per produrre un solo output. Nella tabella 3.3 sono esposti i dati delle sei unità produttive considerate:

Tabella 3.3: Dati esempio due input – un output

Fonte: Cooper, Seiford, Tone (2006)

L'efficienza dell'unità produttiva A si ottiene risolvendo il seguente problema di programmazione lineare:

con i vincoli

(A)	(B)
(C)	(D)
(E)	(F)

La soluzione ottimale dell'unità produttiva A è:

Si può osservare che $e_A^* < 1$, quindi l'unità produttiva considerata è CCR-inefficiente. Come spiegato in precedenza, è possibile determinare il *reference set* di una unità produttiva inefficiente utilizzando i persi ottimali dell'unità stessa, ottenuti dal problema di ottimizzazione. Nel caso in esame i pesi ottimali per l'unità produttiva A sono $v_1^* = 0{,}1429$ e $v_2^* = 0{,}1429$ per gli input e $u^* = 0{,}8571$ per l'output. Utilizzando questi valori è possibile determinare il *reference set* della DMU_A: $E_A = \{D, E\}$. Infatti, inserendo i valori v_1^*, v_2^* e u^* nei vincoli sopra esposti le uguaglianze sono soddisfatte solo in (E) e in (D).

Proseguendo in modo simile si possono ottenere i risultati ottimali per tutte le altre unità decisionali della tabella 3.3.

La rappresentazione grafica di questo esempio due input – un output è fornita dalla figura 3.4. La frontiera efficiente è formata dalle unità produttive E, D, C. Questo significa che $e_E^* = e_D^* = e_C^* = 1$ con $u^* > 0$ e $v^* > 0$ per ciascuna unità produttiva. Sempre nella stessa figura, si può osservare che viene indicato con Q il punto di intersezione tra la frontiera produttiva e la retta che collega l'origine degli assi con l'unità decisionale in esame. La misura di efficienza dell'unità produttiva A può essere determinata dal rapporto OQ/OA. Perciò $OQ/OA = e_A^* = 0{,}6316$. Il rapporto OQ/OA prende il nome di *misura radiale* e può essere interpretato come il rapporto tra due misure di distanza. La *misura radiale* può essere determinata anche per tutte le altre unità produttive, prendendo in considerazione le rette che collegano le unità stesse con l'origine degli assi.

Figura 3.4: Frontiera efficiente nel modello CCR due input – un output

Fonte: Cooper, Seiford, Tone (2006)

Il problema di programmazione lineare (3.8) – (3.12), definito problema primale, può essere espresso nella forma duale come segue (Cook, Seiford, 2009):

(3.15)

con i vincoli:

(3.16)

(3.17)

(3.18)

dove la variabile θ_0 può assumere valori compresi tra 0 e 1, mentre s_i^- e s_r^+ sono definite variabili slack. In particolare s_r^+ rappresenta il deficit di output e s_i^- rappresenta l'eccesso di input. Con riferimento ai vincoli (3.16) – (3.18) le variabili slack possono essere definite come segue:

(3.19)

(3.20)

Una soluzione ottimale per la generica DMU$_0$, ottenuta risolvendo il problema (3.15) – (3.18) è: (θ_0^*, λ_j^*, s_i^{-*}, s_r^{+*}). Il valore di θ_0^* è compreso tra 0 e 1 ed indica la misura di efficienza dell'unità decisionale esaminata. Con riferimento al teorema della dualità della programmazione lineare il valore θ_0^* corrisponde al valore e_0^*, ottenuto dalla soluzione del problema di programmazione lineare (3.8) – (3.12).

Nel problema duale la generica DMU$_0$ viene definita CCR-efficiente se:

Di conseguenza la generica DMU$_0$ viene definita CCR-inefficiente se si verifica almeno una delle seguenti condizioni:

1. $\theta_0^* < 1$
2. $s_i^{-*} > 0$ per almeno un i (con $i = 1,...,m$)

3. $s_r^{+*} > 0$ per almeno un r (con $r = 1,...,s$)

Come esposto in precedenza per il problema primale, anche con riferimento al problema duale è possibile definire il *reference set* o *peer group* di una generica DMU_0 inefficiente (Cooper, Seiford, Tone, 2006). Quindi, indicando con j ($j = 1,...,n$) tutte le unità produttive considerate, l'insieme che descrive il *peer group* della DMU_0 è descritto come segue:

(3.21)

Indicando con $j \in E_0$ le j unità decisionali che appartengono al *reference set* dell'unità decisionale considerata, una soluzione ottimale che consenta alla DMU_0 di migliorare la propria efficienza può essere così espressa:

(3.22)

(3.23)

Quando esposto può essere interpretato come segue:

(3.24)

(3.25)

Le espressioni (3.24) – (3.25) indicano che attraverso una combinazione lineare di coefficienti positivi degli input e degli output delle DMU_j (con $j \in E_0$), sarebbe possibile ottenere una nuova DMU che rispetto alla DMU_0 consentirebbe di produrre almeno le medesime quantità di output impiegando una minor quantità di input oppure di ottenere una maggiore quantità di output impiegando una quantità di input al massimo pari a quella impiegata dalla DMU_0.

Quindi, con riferimento alle espressioni (3.24) – (3.25) si può affermare che l'efficienza della (x_0, y_0) DMU$_0$ può essere migliorata attraverso una riduzione radiale degli input pari a θ_0^* e l'eliminazione dell'eccesso di input impiegato, registrato da s_i^{-*}. In modo analogo la DMU$_0$ potrebbe diventare efficiente aumentando gli output del valore corrispondente al deficit di output s_r^{+*}.

In base a quanto esposto, è possibile definire la variazione degli input Δx_0 e la variazione degli output Δy_0 della DMU$_0$ come segue:

(3.26)

(3.27)

A questo punto si possono ottenere le formule dei valori $\hat{x}_0$ e $\hat{y}_0$ che identificano la proiezione della DMU$_0$ sulla frontiera efficiente.

(3.28)

(3.29)

Quindi il punto con le coordinate $(\hat{x}_0, \hat{y}_0)$ rappresenta quel punto sulla frontiera efficiente che viene utilizzato per valutare l'efficienza della DMU$_0$.

Al fine di comprendere meglio quanto appena esposto, viene presentato un semplice esempio due input – un output in cui si utilizza il modello duale per la valutazione delle unità produttive considerate. I dati delle unità produttive sono riportati nella tabella 3.5:

Tabella 3.5: Dati esempio due input - un output (modello duale)

Fonte: Cooper, Seiford, Tone (2006)

Il problema duale per l'unità produttiva A, con riferimento al modello (3.15) – (3.18), è il seguente:

con i vincoli

La soluzione ottimale per la DMU_A è la seguente:

per le altre DMU_j rimanenti

In questo esempio l'unità produttiva A è inefficiente ($\theta_A^* < 1$) ed il *reference set* è $E_A = \{D,E\}$, poiché solo per la DMU_D e la DMU_E si verifica che $\lambda_D^* > 0$ e $\lambda_E^* > 0$. I valori $\lambda_D^* = 0{,}7143$ e $\lambda_E^* = 0{,}2857$ indicano quanto le unità produttive E e D contribuiscono alla determinazione del punto sulla frontiera efficiente che viene utilizzato per valutare la DMU_A.

Con riferimento alle espressioni (3.28) – (3.29), è possibile determinare i valori degli input e output che descrivono la proiezione della DMU_A sulla frontiera efficiente:

$\hat{x}_1 \leftarrow \theta_A^* x_1 = 0{,}8571 \times 4 = 3{,}4286$ (riduzione del 14,29%)

$\hat{x}_2 \leftarrow \theta_A^* x_2 = 0{,}8571 \times 3 = 2{,}5714$ (riduzione del 14,29%)

$\hat{y} \leftarrow y = 1$ (nessun cambiamento)

Quindi l'unità decisionale A dovrebbe ridurre entrambi gli input del 14,29% al fine di potersi posizionare sul punto T della frontiera efficiente (figura 3.5).

Figura 3.5: Frontiera efficiente due input – un output

Fonte: Cooper, Seiford, Tone, (2006)

3.4 Il modello BCC

Il modello BCC (Banker, Charnes, Cooper) fu introdotto nel 1984. Il modello in questione rappresenta un'estensione del modello CCR poiché viene rilassata l'ipotesi di rendimenti di scala costanti (presente nel modello CCR) in modo da poter valutare l'efficienza delle unità produttive in presenza di rendimenti di scala variabili (Cooper, Seiford, Tone 2006).

Nella figura 3.6 è rappresentata la frontiera efficiente nel modello CCR (descritta dalla retta tratteggiata) e la frontiera efficiente nel modello BCC, considerando un processo produttivo con un input ed un output. Nell'esempio illustrato si considerano quattro unità produttive (A, B, C, D) e la frontiera efficiente nel modello BCC è rappresentata dalle linee che collegano le unità produttive A, B e C. In base al modello CCR solo l'unità produttiva B è efficiente, mentre in base al modello BCC le unità produttive efficienti sono A, B, e C.

Figura 3.6: Frontiera efficiente nel modello BCC

Fonte: Cooper, Seiford, Tone, (2006)

Come in precedenza spiegato per il modello CCR, anche per il modello BCC è possibile distinguere tra modello output-oriented e modello input-oriented. Con riferimento alla figura 3.6 l'efficienza della DMU_D nel modello BCC input-oriented può essere calcolata dal rapporto PR/PD, mentre nel modello BCC output-oriented l'efficienza della medesima unità produttiva può essere descritta dal rapporto ST/DT. Tuttavia per il modello BCC non vale la relazione tra i reciproci dell'efficienza nel modello input-oriented ed efficienza nel modello output-oriented. Quindi, considerando sempre l'unità produttiva D, l'efficienza di tale DMU nel modello output-oriented non può essere ottenuta dal rapporto tra 1 ed il valore dell'efficienza della medesima DMU_D nel modello input-oriented e viceversa.

Si consideri ora il modello BCC dal punto di vista matematico. Considerando sempre una generica unità produttiva (DMU_0), il problema di programmazione frazionaria per il modello BCC è il seguente (Cook, Seiford, 2009):

(3.30)

con i seguenti vincoli:

(3.31)

(3.32)

(3.33)

Confrontando il problema appena scritto con il problema (3.4) – (3.7) è possibile osservare che il modello BCC è molto simile al modello CCR. Infatti, i due modelli differiscono poiché nella formulazione del problema di programmazione frazionaria del modello BCC viene aggiunta la variabile u_0, che non ha vincoli di segno.

Indicando con (x_0, y_0) un punto sulla frontiera efficiente nel modello BCC, è possibile sapere come sono i rendimenti di scala nel punto considerato, osservando il valore assunto dalla variabile u_0 (Cooper, Seiford, Tone, 2006).

In particolare, con riferimento al punto (x_0, y_0):

- se $u_0^* < 0$ si è in presenza di rendimenti di scala crescenti;
- se $u_0^* > 0$ si è in presenza di rendimenti di scala decrescenti;
- se $u_0^* = 0$ si è in presenza di rendimenti di scala costanti.

Dalla figura 3.7 (Cook, Seiford, 2009) è possibile osservare come i rendimenti di scala possano essere differenti (crescenti, costanti o decrescenti) nelle unità produttive che compongono il campione di analisi.

In questo esempio grafico, la frontiera efficiente nel modello BCC è descritta dai segmenti $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$.

Figura 3.7: Rendimenti di scala nel modello BCC

Fonte: Cook, Seiford (2009)

Il tratto della frontiera efficiente che collega l'unità produttiva A all'unità produttiva B (escluso il punto B) è caratterizzato da rendimenti di scala crescenti, nel punto B i rendimenti di scala sono costanti e la parte di frontiera efficiente che collega la DMU_B alla DMU_C e quest'ultima alla DMU_D è caratterizzata da rendimenti di scala decrescenti. Di conseguenza, in base a quanto esposto in precedenza, si può affermare che la variabile u_0^* è inferiore a zero per l'unità produttiva A, è nulla per l'unità produttiva B ed è maggiore di zero per le unità produttive C e D.

Il problema di programmazione frazionaria (3.30) – (3.33) può essere trasformato nel seguente problema di programmazione lineare:

(3.34)

con i seguenti vincoli:

(3.35)

$j = 1,...,n$ (3.36)

$r = 1,...,s$ (3.37)

$i = 1,...,m$ (3.38)

L'insieme delle possibilità produttive per il modello BCC (indicato con P_B) può essere descritto come segue:

(3.39)

dove $X = (x_j) \in R^{m \times n}$ e $Y = (y_j) \in R^{s \times n}$ rappresentano rispettivamente la matrice degli input e la matrice degli output, $\lambda \in R^n$ e con e si indica un vettore riga di tutti 1.

E' possibile osservare che l'insieme delle possibilità produttive nel modello BCC differisce rispetto al modello CCR solo nell'aggiunta del vincolo di convessità

$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$, che può anche essere scritto come $e\lambda = 1$ (dove e è vettore riga di tutti 1 e λ è un vettore colonna di elementi non negativi), come riportato nell'espressione (3.39).

Il problema di programmazione lineare del modello BCC (3.34) – (3.38) è espresso nella forma duale come segue (Cook, Seiford 2008):

(3.40)

con i vincoli:

(3.41)

(3.42)

(3.43)

(3.44)

E' possibile notare che il modello (3.15) – (3.18) differisce dal modello (3.40) – (3.44) poiché in quest'ultimo è stato aggiunto il vincolo di convessità $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$.

Risolvendo il problema (3.40) – (3.44) è possibile ottenere per la generica DMU_0 la soluzione ottimale (θ_B^*, λ_j^*, s_i^{-*}, s_r^{+*}). θ_B^* (il cui valore è compreso tra 0 e 1) descrive l'efficienza, nel modello BCC, dell'unità decisionale considerata.

La generica DMU_0 è BCC efficiente se:

E' possibile dimostrare che le unità decisionali efficienti in base al modello CCR sono efficienti anche in base al modello BCC.

Alla pari del modello CCR, anche per il modello BCC è possibile determinare il *reference set* di una DMU inefficiente, conoscendo i valori di λ_j^* (con $j = 1,...,n$) (Cooper, Seiford, Tone 2006). Quindi, se la DMU_0 è inefficiente, il suo *reference set* è dato dal seguente insieme:

$$R_0 = \left\{ j \middle| \lambda_j^* > 0 \right\} \qquad j = 1,...,n \tag{3.45}$$

Considerando le unità produttive che sono incluse nell'insieme R_0, una soluzione ottimale che consenta alla DMU_0 di diventare efficiente è la seguente:

(3.46)

(3.47)

da cui si possono ottenere i valori $\hat{x}_0$ e $\hat{y}_0$:

(3.48)

(3.49)

$(\hat{x}_0, \hat{y}_0)$ descrivono il punto sulla frontiera efficiente utilizzato per valutare la DMU_0.

3.5 Il modello Additivo

Nei modelli CCR e BCC è necessario distinguere tra orientamento agli output ed orientamento agli input (Cook, Seiford, 2009). Questa distinzione è necessaria poiché tali modelli sono costruiti sulla base delle proiezioni radiali. In particolare, nei modelli input-oriented, gli input vengono ridotti proporzionalmente mantenendo costanti gli output; mentre nei modelli output-oriented, gli output vengono ridotti proporzionalmente mantenendo costanti gli input. Il modello additivo, invece, differisce dai modelli descritti in precedenza poiché combina entrambi gli orientamenti in un unico modello.

Nella figura 3.8 è illustrato il caso un input – outut in presenza i rendimenti di scala costanti.

Figura 3.8: Modello additivo con rendimenti di scala costanti

Fonte: Cook, Seiford (2009)

Con riferimento all'unità decisionale C, viene esposta l'idea sottostante il modello additivo: l'unità in esame, che è inefficiente, può raggiungere la frontiera efficiente muovendosi in qualsiasi direzione all'interno del triangolo formato dall'unità decisionale C ed i punti T ed S, giacenti sulla frontiera efficiente. Quindi l'unità produttiva C potrebbe diventare efficiente modificando sia gli input che gli output al fine di posizionarsi su qualsiasi punto sulla frontiera efficiente compreso tra T ed S.

Esistono varie versioni del modello additivo, ma in questo caso viene presentato il seguente problema di ottimizzazione lineare, in cui si considerano rendimenti di scala variabili:

(3.50)

con i vincoli

(3.51)

(3.52)

(3.53)

(3.54)

Nella figura 3.9 è rappresentata la frontiera efficiente in un modello additivo con rendimenti di scala variabili, sempre con riferimento al caso un input-un output (Cooper, Seiford, Tone, 2006).

Figura 3.9: Modello additivo con rendimenti di scala variabili

Fonte: Cooper, Seiford, Tone (2006)

La frontiera efficiente è rappresentata dai segmenti $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$. L'unità decisionale D è inefficiente, ma può diventare efficiente spostandosi nelle direzioni delle frecce riportate nella figura sovrastante. Come riportato nell'espressione (3.50), il modello additivo mira a massimizzare la somma delle variabili slack. Nella figura 3.9 la retta tratteggiata indica che la massimizzazione di $s_i^- + s_r^+$ (con $i = 1,...,m$ e $r = 1,...,s$) per la DMU_D è raggiunta nel punto B. Quindi, il modello additivo considera contemporaneamente gli eccessi di input ed i deficit di output dell'unità produttiva D per arrivare ad un punto sulla frontiera efficiente che è quello più distante dalla DMU considerata.

Una soluzione ottimale, per la generica DMU$_0$, ottenuta risolvendo il problema (3.50) – (3.54) è: (λ_j^*, s_i^{-*}, s_r^{+*}).

La DMU$_0$ è efficiente in base al modello additivo solo se:

Se la DMU$_0$ è invece inefficiente, alla pari di quanto esposto per i modelli CCR e BCC, è possibile determinare il *reference set* della unità produttiva considerata osservando i valori di λ_j^*(con $j = 1,...,n$). Di conseguenza, *il reference set* per la DMU$_0$ è il seguente insieme:

(3.55)

Conoscendo i valori di s_i^{-*} e s_r^{+*} per la generica DMU$_0$ (x_0, y_0) è possibile determinare i valori $\hat{x}_0$ e $\hat{y}_0$ che descrivono la proiezione della DMU$_0$ sulla frontiera efficiente.

(3.56)

(3.57)

Quindi ($\hat{x}_0, \hat{y}_0$) descrivono il punto sulla frontiera efficiente che viene utilizzato per valutare l'unità produttiva considerata.

In base a quanto esposto, si può affermare che il modello additivo valuta l'efficienza delle unità decisionali considerando solo le variabili slack. Tuttavia non fornisce una misura di efficienza, come i modelli descritti in precedenza.

Al fine di trovare una soluzione per il problema appena esposto Charnes, Cooper, Golany, Seiford (1985) proposero di utilizzare per la generica DMU$_0$, il valore di Q_0 definito come segue:

(3.58)

dove Q_0 è soggetto ai vincoli (4.51) – (3.54) e $\delta = \frac{1}{m+s}$.

In questo modo è possibile ottenere una misura di efficienza nel modello additivo. Inoltre la divisione di ciascuna variabile slack s_i^{-*} e s_r^{+*} per i rispettivi x_0 ed y_0 rende gli eccessi di input e i deficit di output invarianti rispetto all'unità di misura con cui sono stati definiti gli input e gli output.

E' importante sapere che modello additivo consente di valutare l'efficienza delle unità produttive anche in presenza di valori negativi negli output e negli input. Questo è possibile grazie alla proprietà di invarianza in traslazione (*translation invariance*) che verrà spiegata nel capitolo quarto.

3.6 Il modello SBM (Slack-Based Measure)

Il modello SBM fu introdotto da Tone nel 2001. La misura di efficienza ottenuta da tale modello, definita SBM (Slack-Based Measure), soddisfa le seguenti proprietà (Cooper, Seiford, Tone, 2006):

(P1) è una misura che non varia rispetto all'unità di misura con cui sono definiti gli input e gli output (questa proprietà viene definita *units invariant* o *dimension free*);

(P2) è una misura monotona decrescente in ciascun input slack ed output slack.

Dal punto di vista matematico, sempre con riferimento alla generica DMU_0, il problema di programmazione frazionaria del modello SBM è il seguente:

(3.59)

con i vincoli

(3.60)

(3.61)

(3.62)

E' possibile notare che i vincoli (3.51), (3.53) e (3.54) sono simili ai vincoli (3.60), (3.61) e (3.62), solamente che in quest'ultimo caso è stata utilizzata la forma matriciale.
E' possibile verificare che la misura SBM, indicata con ρ è compresa nell'intervallo $[0,1]$. Perciò, in questo aspetto, il modello SBM è simile ai modello CCR e BCC. Inoltre, ρ soddisfa la proprietà di *units invariant*, poiché al numeratore le variabili s_i^- sono divise per i rispettivi x_{i0}, ed al denominatore le variabili s_r^+ sono divise per i rispettivi y_{i0}. La misura di efficienza ρ soddisfa anche la proprietà (P2), poiché un incremento di s_i^- o s_r^+, mantenendo tutto il resto costante, comporta una riduzione di ρ in un modo strettamente monotono.
L'insieme delle possibilità produttive per il modello SBM (indicato con P_{SBM}) è il seguente:

(3.63)

dove $X = (x_j) \in R^{m \times n}$ e $Y = (y_j) \in R^{s \times n}$ rappresentano rispettivamente la matrice degli input e la matrice degli output e λ è un vettore non negativo di dimensione $(n \times 1)$.
Il problema di programmazione frazionario (3.59) – (3.62) può essere trasformato in un problema di programmazione lineare, come dimostrato da Tone (2001).
Inizialmente il problema (3.59) – (3.62) viene modificato introducendo la variabile scalare t (con $t > 0$), come qui esposto:

(3.64)

con i vincoli

(3.65)

(3.66)

(3.67)

(3.68)

Il problema di cui sopra non comporta alcun cambiamento nel valore di ρ , tuttavia non è un problema di programmazione lineare perché contiene il termine ts_r^+ (con $r = 1,...,s$) che non è lineare. Di conseguenza, al fine di ottenere un problema di programmazione lineare è necessario definire:

(3.69)

In seguito, utilizzando le variabili appena scritte, si ottiene il seguente problema di programmazione lineare per il modello SBM con la variabile scalare t:

(3.70)

con i vincoli

(3.71)

(3.72)

(3.73)

(3.74)

Una soluzione ottimale per la generica DMU_0 ottenuta risolvendo il problema appena esposto è la seguente:

(3.75)

Di conseguenza, con riferimento alle definizioni riportate in (3.69), una soluzione ottimale per il modello SBM è la seguente:

(3.76)

In base a quest'ultima soluzione ottimale, è possibile stabilire se una generica DMU$_0$ è efficiente in base al modello SBM: la DMU$_0$ è efficiente in base al modello SBM se $\rho^* = 1$. Tale condizione equivale a $s^{-*} = 0$ e $s^{+*} = 0$.
Una DMU (x_0, y_0) inefficiente, quindi con $\rho^* < 1$, può essere così descritta:

(3.77)

(3.78)

Conoscendo i valori di s^{-*} e s^{+*}, è possibile far diventare la DMU efficiente, eliminando gli eccessi di input ed aumentando i deficit di output come segue:

(3.79)

(3.80)

I valori ($\hat{x}_0, \hat{y}_0$) descrivono il punto sulla frontiera efficiente raggiungibile dalla DMU considerata eliminando gli eccessi di input ed aumentando i deficit di output, in base alla soluzione ottimale ottenuta dal modello SBM.
I valori di λ^*, sono invece utilizzati per determinare il *reference set* dell'unità produttiva considerata, descritto dal seguente insieme:

(3.81)

Considerando le unità produttive che compongono il *reference set* della DMU$_0$ è possibile esprimere la coppia di vettori ($\hat{x}_0, \hat{y}_0$) come segue:

(3.82)

(3.83)

In base a quanto esposto, si può affermare che $(\hat{x}_0, \hat{y}_0)$ descrive il punto sulla frontiera efficiente che può essere ottenuto attraverso una opportuna combinazione delle DMU_j (con $j \in R_0$), ciascuna delle quali si trova sulla frontiera efficiente.

CAPITOLO QUARTO

IL PROBLEMA DEI DATI NEGATIVI NELLA DEA

4.1 Introduzione

Nella descrizione dei principali modelli che compongono la metodologia DEA è stata assunta la non negatività degli input e degli output. Tuttavia, nella pratica, può talvolta capitare di trovare alcuni dati negativi. Questo rappresenta un problema poichè in presenza di valori inferiori a zero, negli output o negli input, la misura di efficienza ottenibile attraverso la metodologia DEA potrebbe risultare scorretta. Di conseguenza diventa importante conoscere gli aggiustamenti, apportabili ai principali modelli DEA, che consentano di utilizzare la Data Envelopment Analysis anche in presenza di valori negativi. In questo capitolo verranno perciò presentate alcune soluzioni a tale problema. In particolare, verrà esposta la proprietà di invarianza in traslazione (*translation invariance*), che in alcuni casi consente di trasformare i dati negativi in positivi senza che ciò comporti delle variazioni nella misura di efficienza ottenibile dal modello considerato. Verranno inoltre presentati alcuni modelli formulati con il fine di poter applicare la DEA anche quando alcuni valori negli input o negli output sono negativi. Si tratta dei modelli SORM (*semi-oriented radial measure*), VRM (*variant of radial measure*), RDM (*range directional model*) con le sue variazioni ed infine il modello MSBM (*modified Slack-Based Measure*).

4.2 La proprietà di invarianza in traslazione

Quando si deve valutare l'efficienza relativa di un campione di unità decisionali, e si è in presenza di dati negativi negli input e/o negli output, si fa spesso ricorso ad un modello invariante in traslazione (*translation invariance model*).

Un modello viene definito invariante in traslazione se traslando gli originali valori degli input e/o degli output, aggiungendo una costante ai dati originari, non cambia il valore ottimale della funzione obiettivo, il quale rappresenta la misura di efficienza dell'unità decisionale considerata (Cooper, Seiford, Tone, 2006).

Come accennato nel capitolo terzo, il modello additivo viene spesso utilizzato quando negli input e negli output possono presentarsi dei valori negativi, e questo è possibile proprio perché il modello additivo è invariante in traslazione.

Per dimostrare questa proprietà del modello additivo si consideri l'insieme dei dati a disposizione, costituito dalla matrice degli input (*X*) e dalla matrice degli output (*Y*). Se a ciascun valore in *X* e *Y* vengono aggiunte delle costanti positive (α_i : $i = 1,...,m$) e ($\beta_r : r = 1,...,s$) si ottengono dei nuovi dati così definiti:

(4.1)

(4.2)

Ora considerando il vincolo (3.51) del modello additivo presentato nel precedente capitolo e sostituendo $x_{ij} + \alpha_i$ al posto di x_{ij} si ottiene:

quindi il vincolo diventa

dove λ_i e s_i^- sono gli stessi valori che soddisfano anche

cioè il vincolo (3.51) del modello additivo presentato nel precedente capitolo.
Allo stesso modo i valori λ_i e s_r^+ che soddisfano il vincolo (3.52) del modello additivo così definito:

sono gli stessi valori che soddisfano

Di conseguenza si può affermare che:

Pertanto i valori ottimali della funzione obiettivo non variano quando i dati degli input e degli output vengono modificati aggiungendo una costante. Di conseguenza la soluzione ottimale per una generica DMU_0 nel problema originale (λ_j^*, s_i^{-*}, s_r^{+*}) è anche la soluzione ottimale per la medesima DMU_0 nel problema in cui i dati sono stati traslati aggiungendo una costante e vice versa.
Dalla figura 4.1 è possibile osservare che il modello additivo è invariante in traslazione sia negli input che negli output, poiché la valutazione dell'efficienza dell'unità decisionale considerata non cambia se, traslando gli input e gli output, viene modificata l'origine del sistema di coordinate.

Figura 4.1: Traslazione nel modello Additivo

Fonte: Cooper, Seiford e Tone (2006)

Come affermato da Lovell e Pastor (1995), il modello CCR non è invariante in traslazione, mentre il modello BCC lo è ma in senso parziale, cioè è possibile traslare gli input o gli output a seconda del tipo di orientamento considerato nella valutazione dell'efficienza delle unità decisionali.

Figura 4.2: Traslazione nel modello BCC

Fonte: Cooper, Seiford e Tone (2006)

Con riferimento alla figura 4.2 (Cooper, Seiford, Tone, 2006), la misura di efficienza dell'unità decisionale D, in un modello BCC input-oriented, può essere calcolata dal rapporto PR/PD. E' possibile osservare che tale rapporto non varia se il valore dell'output viene modificato traslando l'origine degli assi da *O* a *O'*. Di conseguenza si può affermare che nel modello BCC input-oriented la misura di efficienza delle unità decisionali non varia se vengono traslati i valori degli output (ma non quelli degli input). Se invece si considera il modello BCC output-oriented, allora la misura di efficienza delle unità decisionali non varia se vengono traslati gli input (ma non gli output).

4.3 I modelli SORM

Emrouznejad, Anoue e Thanassoulis (2010) espongono la difficoltà nell'applicazione della metodologia DEA quando si utilizzano variabili che possono presentare valori positivi in alcune unità decisionali e negativi in altre. Quando infatti si considerano dati di questo tipo, è importante osservare anche il segno delle variabili per stabilire se un input o un output dovrebbe diminuire o aumentare al fine di migliorare l'efficienza dell'unità decisionale oggetto di valutazione. Emrouznejad, Anoue e Thanassoulis propongono di affrontare il problema dei valori negativi nella DEA trattando ciascuna variabile, che può assumere valori positivi in alcune unità decisionali e valori negativi in altre unità decisionali, come la somma di due variabili.

Per una migliore comprensione degli aggiustamenti proposti dagli studiosi sopra citati, si consideri il modello standard BCC input-oriented (4.3 – 4.7) ed il modello standard BCC output-oriented (4.8 – 4.12), descritti qui di seguito.

Il modello standard BCC input-oriented è il seguente:

(4.3)

con i vincoli:

(4.4)

(4.5)

(4.6)

(4.7)

dove l’efficienza della DMU_0 è il valore ottimale *h*.
Il modello standard BCC output-oriented è invece così descritto:

(4.8)

con i vincoli

(4.9)

(4.10)

(4.11)

(4.12)

dove l’efficienza della DMU_0 è il valore ottimale $1/h$.
Si consideri ora una variabile di output che per alcune unità decisionali è positiva e per altre è negativa. Con riferimento a tale variabile, indicata con y_k, vengono definite le variabili y_k^1 e y_k^2. In generale, per ciascuna DMU_j i valori y_{kj}^1 e y_{kj}^2 sono:

e (4.13)

Dove $y_{kj}^1 \geq 0$, $y_{kj}^2 \geq 0$ e $y_{kj} = y_{kj}^1 - y_{kj}^2$ con $j = 1,...,n$.

Con riferimento a quanto esposto, Emrouznejad, Anoue e Thanassoulis (2010) suggeriscono di valutare la DMU_0 utilizzando il seguente modello input-oriented, con rendimenti di scala variabili:

(4.14)

con i vincoli

(4.15)

(4.16)

(4.17)

(4.18)

(4.19)

(4.20)

Quindi, per la variabile di output y_k sono state create due variabili positive: y_k^1 e y_k^2. La variabile y_k^1 può essere vista come un output e la variabile y_k^2 può essere vista come un input. In questo modo, i valori negativi della variabile y_k vengono trattati come degli input (cioè il modello mira a ridurre il valore assoluto dell'output negativo), mentre i valori positivi della medesima variabile output vengono trattati come dei normali output. E' inoltre possibile dimostrare (Emrouznejad, Anoue, Thanassoulis, 2010) che l'insieme delle possibilità produttive, quando vengono introdotte le variabili y_k^1 e y_k^2, è lo stesso che si ottiene senza disaggregare la variabile y_k.

Il modello (4.14) – (4.20) può essere esteso considerando più variabili, sia output che input, che possono presentare valori negativi.

Si consideri quindi la variabile di input y_i, $i \in I$ e la variabile di output y_r, $r \in R$, entrambe variabili positive per tutte le unità decisionali. Si consideri inoltre la variabile di input x_ℓ, $l \in L$ e la variabile di output y_k, $k \in K$; entrambe le variabili possono assumere valori sia positivi che negativi nelle unità decisionali considerate. Si noti che $I \cup L = \{1,...,m\}$, $I \cap L = \varnothing$, $R \cup K = \{1,...,s\}$ e $R \cap K = \varnothing$.

Le variabili y_{kj}^1 e y_{kj}^2 sono definite come nell'equazione (4.13), mentre le variabili $x_{\ell j}^1$ e $x_{\ell j}^2$ sono:

e (4.21)

dove $x_{\ell j}^1 \geq 0$, $x_{\ell j}^2 \geq 0$ e $x_{\ell j} = x_{\ell j}^1 - x_{\ell j}^2$ con $j = 1,...,n$.

Per valutare l'efficienza di una generica DMU$_0$, considerando un modello input-oriented con rendimenti di scala variabili e dove possono esserci sia input che output con valori negativi, è stato proposto il seguente modello:

(4.22)

con i vincoli

(4.23)

(4.24)

(4.25)

(4.26)

(4.27)

(4.28)

(4.29)

(4.30)

Nel modello appena esposto, si considera la possibilità che anche alcuni input possano presentare valori inferiori a zero in alcune DMU oggetto di analisi. Per ciascun input che può assumere negativi vengono create due variabili: una per i valori positivi ed una per i valori negativi. Un input positivo viene trattato come un normale input, mentre un input negativo viene trattato come un output. Cioè in quest'ultimo caso il modello (4.22) – (4.30) mira alle soluzioni che possano aumentare il valore assoluto dell'input negativo.

L'efficienza della generica DMU_0 calcolata attraverso il modello (4.22) – (4.30) viene definita "*input reduction semi-oriented radial measure (SORM)*" ed è descritta dal valore di *h*.

Il modello (4.22) – (4.30) può essere modificato per valutare l'efficienza della DMU_0 con un orientamento agli output, come segue:

(4.31)

con i vincoli:

(4.32)

(4.33)

(4.34)

(4.35)

(4.36)

(4.37)

(4.38)

(4.39)

In quest'ultimo modello la misura di efficienza della DMU_0 è chiamata "*output augmentation semi-oriented radial measure (SORM)*" ed è descritta da $1/h^*$, dove h^* è il valore ottimale di h nel modello (4.31) – (4.39).
In un articolo del 2010 Emrouznejad, Amin, Anoue e Thanassoulis espongono le condizioni necessarie e sufficienti per la limitatezza dei modelli SORM input-oriented e output-oriented.

4.4 I modelli VRM

Anche Gang, Panagiotis e Zhenhua si sono interessati di trovare una soluzione pratica al problema dei dati negativi nella DEA, proponendo nel 2011 una variazione della misura radiale.
Il tradizionale modello radiale input-oriented può essere formulato come segue:

(4.40)

con i vincoli

(4.41)

(4.42)

(4.43)

(4.44)

dove X rappresenta la matrice degli input e Y rappresenta la matrice degli output.
Il tradizionale modello radiale output-oriented è invece il seguente:

(4.45)

con i vincoli

(4.46)

(4.47)

(4.48)

(4.49)

La misura di efficienza della generica DMU_0 è espressa da θ^* nel modello (4.40) – (4.44), mentre nel modello (4.45) – (4.49) l'efficienza della medesima DMU è descritta da $1/\phi^*$. E' importante notare che se si considera un modello CCR il vincolo $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$ deve essere eliminato, mentre è mantenuto quando si considera un modello BCC con rendimenti di scala variabili.

I modelli radiali input-oriented ed output-oriented appena descritti possono essere trasformati in modelli equivalenti sostituendo $1-\beta$ al posto di θ nel modello (4.40) – (4.44) e $1+\beta$ al posto di ϕ nel modello (4.45) – (4.49).

Di conseguenza il modello radiale input-oriented diventa:

(4.50)

con i vincoli

(4.51)

(4.52)

(4.53)

(4.54)

ed il modello output-oriented diventa:

(4.55)

con i vincoli

(4.56)

(4.57)

(4.58)

(4.59)

Con questa trasformazione la misura di efficienza della DMU_0 è descritta da $1-\beta^*$ nel modello (4.50) – (4.54) e da $1/(1+\beta^*)$ nel modello (4.55) – (4.59).

Il valore di β può essere considerato, in entrambi i modelli, come una misura di inefficienza dell'unità decisionale considerata. In particolare, nel modello input-oriented il valore di β descrive il grado di miglioramento dell'unità decisionale valutata necessario per raggiungere la frontiera efficiente, applicando il rapporto di diminuzione degli input agli input osservati. Nel modello output-oriented, invece, β descrive sempre il grado di miglioramento dell'unità decisionale valutata necessario per raggiungere la frontiera efficiente, ma in questo caso applicando il rapporto di incremento degli output agli output osservati.

In entrambi i modelli, tuttavia, la presenza di valori negativi potrebbe indirizzare il miglioramento dell'efficienza della DMU considerata verso una direzione sbagliata (attraverso un incremento degli input o una riduzione degli output). Gang, Panagiotis e Zhenhua (2011) propongono quindi di modificare i tradizionali modelli radiali applicando il valore assoluto degli input nella parte sinistra del vincolo (4.51), nel modello input-oriented ed il valore assoluto degli output nella parte sinistra del vincolo (4.57), nel modello output-oriented.

Con gli aggiustamenti appena descritti, il modello VRM (*variant of radial measure*) input oriented, con rendimenti di scala variabili, formulato da Gang, Panagiotis e Zhenhua, è il seguente:

(4.60)

con i vincoli:

(4.61)

(4.62)

(4.63)

(4.64)

Il modello VRM output-oriented, con rendimenti di scala variabili, è invece il seguente:

(4.65)

con i vincoli:

(4.66)

(4.67)

(4.68)

(4.69)

I modelli VRM (4.60) – (4.64) e (4.65) – (4.69) possono quindi essere utilizzati quando si considerano variabili che possono presentare valori sia positivi che negativi nelle DMU analizzate. Tali modelli, infatti, assicurano che il miglioramento dell'efficienza delle DMU considerate rispetti il tradizionale concetto della DEA e che quindi una DMU inefficiente possa migliorare la propria performance attraverso una riduzione degli input, oppure un incremento degli output.

4.5 Il modello RDM e le sue variazioni

Silva Portela, Thanassoulis e Simpson proposero nel 2004 una soluzione al problema dei dati negativi nella DEA che non richiede alcuna trasformazione dei dati stessi e che, allo stesso tempo, consente di ottenere una misura di efficienza utile per confrontare le DMU nel campione di analisi considerato.

Gli studiosi sopra citati dimostrano che, in presenza di dati che possono assumere valori inferiori a zero, diviene difficile utilizzare un modello con rendimenti di scala costanti. Invece, con riferimento ad un modello con rendimenti di scala variabili, si evidenziano le problematiche legate all'impiego della tradizionale misura di efficienza radiale nella valutazione delle unità produttive. Di conseguenza si propone di utilizzare il modello RDM (*range directional model*), che viene descritto come il generico *directional distance model*, ma modificato in base all'esigenza di determinare una corretta misura di efficienza delle unità decisionali, anche quando alcuni dati utilizzati sono negativi (Silva Portela, Thanassoulis, Simpson, 2004).

Il generico *directional distance model* formulato da Chambres, Chung e Färe (1996, 1998), in presenza di rendimenti di scala variabili, è il seguente modello:

(4.70)

con i vincoli:

(4.71)

(4.72)

(4.73)

Nel modello generale appena esposto, non viene stabilito alcun orientamento (agli input o agli output), tuttavia definendo g_{y_r} o g_{x_i} pari a zero è possibile fissare l'orientamento desiderato. Quando si considerano dati strettamente positivi, per vettori direzionali (g_{x_i}, g_{y_r}) si utilizzano i valori degli input e degli output osservati. Tuttavia ciò non è possibile quando si osservano dati negativi, poiché in quest'ultimo caso verrebbe violato il vincolo (4.73) di non negatività dei vettori direzionali. Silvia Portela, Thanassoulis e Simpson propongono perciò di considerare un "punto ideale" (I) così definito:

y$_{\mathbf{j}}$,

,

x$_{\mathbf{j}}$,)

In seguito, al posto dei vettori direzionali g_{x_i} e g_{y_r} vengono definiti i vettori R_{i0} e R_{r0} come segue:

(4.74)

(4.75)

I vettori R_{i0} e R_{r0} descrivono la gamma dei possibili miglioramenti della DMU_0 considerata. Il vettore R_{i0} definisce il miglior miglioramento che l'unità produttiva considerata potrebbe raggiungere in ciascun input, mentre R_{r0} definisce il miglior miglioramento che l'unità produttiva considerata potrebbe raggiungere in ciascun output. Tali miglioramenti non saranno mai negativi, e di conseguenza i vettori R_{i0} e R_{r0} soddisfano il vincolo di non negatività dei vettori direzionali. Di conseguenza il modello RDM formulato da Silva Portela, Thanassoulis, Simpson è il seguente:

(4.76)

con i vincoli:

(4.77)

(4.78)

(4.79)

E' possibile dimostrare che il modello (4.76) – (4.79) soddisfa le proprietà di *units invariant* e *translation invariant* ed il valore $1-\beta_0$ rappresenta la misura di efficienza della generica DMU_0.
Per una migliore comprensione della misura di efficienza determinata in base al modello RDM si osservi la figura 4.3 in cui si considera un modello RDM output-oriented.

Figura 4.3: Esempio modello RDM con due output

Fonte: Silva Portela, Thanassoulis e Simpson (2004)

La misura di efficienza $(1-\beta_3)$ della DMU_3 è determinata dal rapporto $\overline{CB}/\overline{CA}$, che equivale al rapporto $\overline{FE}/\overline{FD}$. E' possibile notare che $\overline{CB}/\overline{CA}$ misura la distanza tra il livello osservato dell'output 1 definito nel punto U3 ed il suo valore target definito nel punto $U3^*$. In modo analogo si può interpretare il rapporto $\overline{FE}/\overline{FD}$ rispetto all'output 2. Di conseguenza l'efficienza della DMU_3, che rappresenta la distanza relativa tra i punti U3 e $U3^*$, è così determinata: $(5-1{,}07273)/(5-(-4)) = (6-4{,}25455)/(6-2) = 43{,}36\%$. Per le DMU efficienti il valore $1-\beta_0$ è pari a 1, e ciò si verifica quando $\beta_0 = 0$. Tuttavia Silvia Portela, Thanassoulis e Simpson sottolineano che la misura di efficienza ottenibile dal modello RDM non incorpora tutte le fonti di inefficienza poiché nella determinazione di β_0 non si considera il valore delle variabili slack. Di conseguenza le DMU efficienti in base al modello RDM potrebbero non soddisfare le condizioni dell'efficienza di Pareto, poiché in questo caso per la DMU_0 viene richiesto che sia β_0 che tutte la variabili slack siano nulle.

E' interessante osservare che esiste una somiglianza tra la misura di efficienza determinata nel modello RDM e la misura di efficienza radiale solitamente utilizzata nella metodologia DEA. Ruotando infatti la figura 4.3 si ottiene la figura 4.4, dove il "punto ideale", definito in base alle espressioni (4.74) e (4.75), si trova al posto dell'origine degli assi nei tradizionali modelli DEA.

Figura 4.4: Figura 4.3 ruotata

Fonte: Silva Portela, Thanassoulis e Simpson (2004)

Si può quindi affermare che la differenza tra la misura di efficienza nel modello RDM e quella solitamente utilizzata nella DEA risiede nel diverso punto di riferimento considerato per misurare l'efficienza stessa: nel modello RDM non si considera l'origine solitamente utilizzata nei modelli DEA, ma si fa riferimento al punto ideale (I), come esposto nella figura 4.4. Quindi il modello RDM si comporta in modo simile ad un modello radiale, e consente di ottenere una misura di efficienza delle DMU anche quando alcune variabili possono essere negative. Tuttavia la misura di efficienza ottenuta con questo modello, pur non considerando tutte le fonti di inefficienza, riesce in alcuni casi a identificare una mancanza di efficienza. Per esempio, le unità decisionali X e Y rappresentate nelle figure 4.3 e 4.4 non si trovano sulla frontiera efficiente, poiché la loro misura di efficienza ($1-\beta_X$ e $1-\beta_Y$), calcolata in base al modello RDM, è risultata diversa da 1.

Silva Portela, Thanassoulis e Simpson propongono inoltre il seguente modello, definito IRDM (*inverse range directional model*), che come il modello RDM, può essere utilizzato anche in presenza di variabili con valori negativi:

(4.80)

con i vincoli:

(4.81)

(4.82)

(4.83)

E' possibile notare che in questo caso al posto dei vettori direzionali R_{i0} e R_{r0} si utilizzano i vettori $1/R_{i0}$ e $1/R_{r0}$. Quando R_{i0} o R_{r0} sono nulli allora i rispettivi valori $1/R_{i0}$ e $1/R_{r0}$ vengono sostituiti da zero. Si consiglia di adottare tale modello quando, per incrementare l'efficienza della DMU considerata, si preferisce dare precedenza alla variabile che si trova più vicino al miglior valore raggiungibile. Tuttavia nel modello (4.80) – (4.83) il "punto ideale" non è più unico ma varia per ciascuna unità decisionale. Di conseguenza non si ritiene corretto adoperare la misura di efficienza ottenibile dal modello IRDM per confrontare le unità produttive. Tale misura risulta però utile se utilizzata con uno scopo di definizione degli obiettivi.

Kerstens e Van de Woestyne (2009) propongono una variazione del modello RDM dove, per la generica DMU$_0$, si utilizzano i vettori direzionali $|x_{i0}|$ e $|y_{r0}|$. Il modello risultante è il seguente:

(4.84)

con i vincoli:

(4.85)

(4.86)

$$\lambda_j \geq 0 \tag{4.87}$$

Anche in questo modello più il valore di β_0 è vicino a zero, maggiore è l'efficienza dell'unità decisionale valutata.

4.6 Il modello MSBM

Nel terzo capitolo è stato presentato il modello SMB (Slack-Based Measure) in cui la misura di efficienza dell'unità decisionale è rappresentata dal valore di ρ, compreso nell'intervallo $[0,1]$. Tuttavia, in presenza di dati negativi, il valore di ρ potrebbe risultare inferiore a zero e ciò comporterebbe una difficile interpretazione della misura di efficienza ottenuta. Per evitare questo problema Sharpe, Meng e Liu (2007) propongono di modificare il modello generale SBM, definito in (3.59) – (3.62), ottenendo il seguente modello MSBM (modified Slack-Based Measure):

(4.88)

con i vincoli:

(4.89)

(4.90)

(4.91)

(4.92)

(4.93)

dove i divisori indicati nella funzione obiettivo con R_{i0} e R_{r0} sono definiti come in (4.74) e (4.75).

Sharpe, Meng e Liu (2007) dimostrano che nel modello (4.88) – (4.93) la misura di efficienza ρ è compresa nell'intervallo $[0,1]$, anche se alcune variabili dovessero presentare valori negativi. Inoltre, ρ soddisfa entrambe le proprietà di *units invariant* e *translation invariant*.

Come esposto nel precedente capitolo per il modello SBM, formulato da Tone nel 2001, anche il problema (4.88) – (4.93) può essere trasformato in un problema di programmazione lineare introducendo la variabile scalare $t > 0$ e definendo i valori S^-, S^+ e Λ come in (3.69). Il problema risultante è il seguente:

(4.94)

con i vincoli:

(4.95)

(4.96)

(4.97)

(4.98)

(4.99)

da cui si ottiene la soluzione ottimale:

(4.100)

In seguito, si può ottenere la soluzione ottimale per il modello MSBM come segue:

(4.101)

CAPITOLO QUINTO

DEA E PERFORMANCE DEI FONDI COMUNI DI INVESTIMENTO

5.1 Introduzione

Nel capitolo terzo si è accennato che la metodologia Data Envelopment Analysis può essere utilizzata in diversi settori, compreso quello finanziario. In questo capitolo verrà esposto l'utilizzo della DEA nella valutazione della performance dei fondi comuni di investimento.

Sarà descritto l'indice DPEI, il quale rappresenta la prima misura di performance dei fondi comuni determinata attraverso la metodologia DEA. Verrà inoltre evidenziato un aspetto negativo di tale indice, e cioè il suo difficile utilizzo nei periodi in cui il mercato di trova in una fase negativa, poiché il valore dell'output scelto potrebbe essere negativo.

Di conseguenza saranno introdotti altri modelli DEA che, oltre a fornire una misura di performance utile per il confronto tra fondi comuni di investimento, affrontano il problema dei dati negativi.

5.2 DEA portfolio efficiency index (DPEI)

Nel 1997 Murthi, Choi e Desai proposero il *DEA portfolio efficiency index (DPEI)* come misura di performance per la valutazione dei fondi comuni di investimento.

Tale indice è importante, poiché rappresenta la prima misura di performance dei fondi di investimento determinata applicando la metodologia DEA. L'indice DPEI viene calcolato considerando un unico output e quattro input. Come output si può scegliere di utilizzare il rendimento del fondo oppure l'extra rendimento del fondo rispetto al tasso privo di rischio (rendimento del fondo – rendimento privo di rischio). Tra gli input si considera invece una misura di rischio, rappresentata dalla deviazione standard dei rendimenti del fondo (σ), ed alcuni costi di transazione, che sono sostenuti dai gestori dei fondi al fine di ottenere un determinato rendimento, ma che ricadono sugli investitori. I costi di transazione considerati sono tre: l'*expence ratio* (include le spese di marketing, i compensi dei manager ed altre spese di gestione del fondo), le *loads* (cioè le commissioni pagate dall'investitore per entrare in un fondo o uscire da un fondo) ed il *turnover* (che è un costo legato all'attività di trading del manager del fondo). Di conseguenza il *DEA portfolio efficiency index* di un generico fondo j_0 è determinato risolvendo il seguente problema di massimizzazione (Murthi, Choi, Desai, 1997):

(5.1)

con i vincoli:

(5.2)

(5.3)

dove:

- J è il numero dei fondi considerati;
- R_j è i rendimento di ciascun fondo;
- I è il numero di input;
- x_{ij} è il valore dell' i-esimo costo di transazione per il j-esimo fondo;
- ε è un valore positivo molto piccolo.

Risolvendo il problema (5.1) – (5.3) si ottengono i valori dei pesi che massimizzano il rapporto tra il rendimento del fondo e la somma pesata degli input. Se si indicano i pesi ottimali con w_i^* e v^*, l'indice DPEI del generico fondo j_0 è il seguente:

(5.4)

Il valore dell'indice DPEI, compreso nell'intervallo $[0,1]$, indica l'efficienza relativa del fondo considerato. Un fondo viene definito efficiente solo se tale indice è pari a 1 e tutte le variabili slack sono nulle.

5.3 Il problema dei rendimenti negativi nell'indice DPEI

L'indice DPEI appena descritto può essere considerato un ulteriore indicatore di performance da utilizzare nella valutazione dei fondi comuni di investimento. Tuttavia nei capitoli precedenti si sono accennate le problematiche relative all'utilizzo della metodologia DEA in presenza di dati negativi e di come, molto spesso, nei periodi di crisi, il rendimento o l'extra-rendimento di un fondo possa risultare negativo. Tenendo in considerazione le problematiche appena esposte, si può affermare la difficoltà nell'utilizzo dell'indice DPEI nei periodi in cui il mercato si trova in una fase negativa. In questo caso, infatti, potrebbe capitare che l'input (rendimento del fondo o extra-rendimento rispetto al tasso privo di rischio) sia negativo e ciò non consentirebbe di ottenere una corretta misura di performance dei fondi comuni di investimento applicando la metodologia DEA.

Fortunatamente, dal 1997 ad oggi sono stati scritti molti altri articoli in cui vengono proposti diversi modelli DEA per valutare i fondi comuni di investimento ed alcuni di questi modelli, che verranno esposti in questo capitolo, affrontano proprio il problema di individuare una misura di performance, utilizzando la metodologia DEA, senza che la presenza di dati negativi comporti delle distorsioni nella misura di efficienza ottenibile.

5.4 Il modello BCC input-oriented di Wilkens e Zhu

Wilkens e Zhu (2001) propongono un modello DEA Considerando gli input e gli output esposti nella seguente tabella:

Tabella 5.1: Input e output nel modello BCC input-oriented

Con riferimento agli input e output esposti nella tabella 5.1, il problema dei valori negativi può verificarsi per tutti gli output, cioè: il rendimento medio mensile, il rendimento minimo e l'asimmetria. Come spiegato nel precedente capitolo, spesso il problema dei dati negativi nella DEA viene affrontato ricorrendo alla proprietà di *translation invariance*, che però vale solo parzialmente se si considera il modello BCC. Cioè, in un modello BCC output-oriented è possibile traslare solo gli input, mentre in un modello BCC input-oriented è possibile traslare solo gli output, senza che ciò comporti delle variazioni nella misura di efficienza calcolata.
Di conseguenza, Wilkens e Zhu suggeriscono di risolvere il seguente modello BCC input-oriented, che consente di trasformare gli output negativi in positivi, aggiungendo una costante ai valori originari, ottenendo una corretta misura di efficienza per gli n fondi considerati:

(5.5)

con i vincoli

(5.6)

(5.7)

(5.8)

(5.9)

Un generico fondo j_0 è definito efficiente se $\theta_0^* = 1$ e tutte le variabili slack sono nulle. Se invece $\theta_0^* \neq 0$ allora il fondo considerato è inefficiente.

5.5 I modelli proposti da Basso e Funari

Basso e Funari hanno formulato diversi modelli relativi alla valutazione dei fondi comuni di investimento attraverso la metodologia DEA. Qui di seguito verranno presentati tre di questi modelli DEA, in cui è trattato anche il problema dei dati negativi.

5.5.1 Il modello DEA–S

Considerando un insieme di n fondi comuni di investimento ($j_0 = 1,...,n$), Basso e Funari (2007) propongono di applicare la metodologia DEA per determinare una misura di performance di tali fondi, utilizzando gli input e gli output esposti nella seguente tabella:

Tabella 5.2: Input e output nel modello DEA–S

Per ciascun fondo j si consideri perciò una misura di rischio, descritta dalla deviazione standard (σ_j), le commissioni di entrata (f_j^I) e di uscita (f_j^E), il capitale iniziale investito in ciascun fondo e pari a 1 ed il fattore di capitalizzazione $\overline{U}_j$ che descrive il valore finale del capitale inizialmente investito dopo un anno.

In questo modello, utilizzando come output il fattore di capitalizzazione $(\overline{U}_j = 1 + r_j)$ anziché il semplice rendimento medio del fondo (r_j), si evita il problema dei valori negativi negli output. La quantità $\overline{U}_j$ infatti, è sempre positiva, dal momento che nel peggiore dei casi, è possibile al massimo perdere tutto il capitale investito.

Di conseguenza, il modello DEA–S proposto da Basso e Funari nel 2008 è il seguente:

(5.10)

con i vincoli

(5.11)

(5.12)

(5.13)

dove ε è un valore positivo molto piccolo.

Risolvendo il problema (5.10) – (5.13) si ottengono i valori dei pesi ottimali $(u^*, v_1^*, v_2^*, v_3^*, v_4^*)$ che consentono di determinare, per il generico fondo j_0, la misura di perfomance $I_{j_0, DEA-S}$, così descritta:

(5.14)

Tale misura è compresa nell'intervallo $[0,1]$.

5.5.2 I modelli DEA–KC e DEA-KV

Nel modello DEA–KC, Basso e Funari (2013) propongono di utilizzare un modello CCR con due input e un output. Come input sono stati scelti il capitale iniziale $K = 1$, uguale per tutti i fondi, e la deviazione standard dei rendimenti di ciascun fondo (σ_j). Come output, invece, è stato utilizzato il valore finale netto dell'investimento M_j, calcolato alla fine del periodo di investimento in un determinato fondo j.
Se si indica con c_{Ij} e c_{Ej} rispettivamente le commissioni di entrata e di uscita richieste dal fondo j e con r_j il rendimento medio del fondo calcolato in un periodo di investimento di lunghezza T, allora il valore finale netto dell'investimento M_j, ottenuto investendo un capitale iniziale di $K = 1$, è così determinato:

(5.15)

Anche in questo modello il valore dell'output M_j è sempre positivo, poiché nel peggiore dei casi è possibile perdere al massimo tutto il capitale investito nel fondo.
Il modello CCR output-oriented con due input e un output, formulato da Basso e Funari nel 2013 per la valutazione dei fondi comuni di investimento è perciò il seguente:

(5.16)

con i vincoli

(5.17)

(5.18)

(5.19)

dove ε rappresenta sempre un valore positivo molto piccolo.

Risolvendo il problema appena esposto si ottengono i valori di u^*, v_1^* e v_2^* consentono di calcolare la misura di efficienza $I_{j_0,DEA-KC}$ per il fondo j_0, come segue:

(5.20)

E' possibile notare che le soluzioni del problema di programmazione frazionaria (5.16) – (5.19) possono essere determinate risolvendo l'equivalente problema di programmazione lineare, così descritto:

(5.21)

con i vincoli

(5.22)

(5.23)

(5.24)

(5.25)

La misura di efficienza $I_{j_0,DEA-KC}$ è compresa nell'intervallo $[0,1]$. Inoltre, è possibile valutare la performance dei fondi comuni di investimento anche utilizzano il modello BCC output-oriented che può essere descritto nella forma lineare (5.21) – (5.25) con l'aggiunta del vincolo di convessità:

(5.26)

Tale modello, in cui si considerano i rendimenti di scala variabili, viene definito modello DEA-KV.

5.5.3 I modelli DEA-C e DEA-V

Un ulteriore modello DEA proposto da Basso e Funari (2013b) assomiglia al modello DEA-KC appena esposto, in quanto come input si considerano sempre una misura di rischio ed il capitale inizialmente versato dall'investitore nel fondo e come output il valore finale netto dell'investimento, tuttavia in questo caso:

- la misura di rischio scelta è il coefficiente beta (β);
- il capitale iniziale K_j rappresenta il capitale che l'investitore deve versare nel fondo al fine di partire con un capitale investito nel fondo j pari a 1. Di conseguenza, indicando con c_{Ij} le commissioni di entrata richieste dal fondo j, il capitale iniziale è così determinato:

(5.27)

- il valore finale netto dell'investimento alla fine di un periodo di tempo di lunghezza T è calcolato come segue:

(5.28)

dove c_{Ej} sono le commissioni di uscita e r_j è il rendimento medio annuo del fondo calcolato nel periodo di investimento di lunghezza T.

Anche in questo modello, considerando come output il valore finale dell'investimento anziché il rendimento medio, si evita il problema dei dati negativi nel modello DEA.

Infatti, in questo modo si ottiene una misura di redditività che è sempre positiva, anche nei periodi di crisi, quando il rendimento medio di molti fondi è negativo.
Considerando quindi l'output e gli input appena descritti, il modello DEA-C, con rendimenti di scala costanti, per la valutazione della performance di un generico fondo j_0, è il seguente:

(5.29)

con i vincoli

(5.30)

(5.31)

(5.32)

dove ε è un valore positivo piccolo a piacere.
Definendo con u^*, v_1^* e v_2^* i pesi ottimali assegnati al valore finale M_{j_0}, al capitale iniziale K_{j_0} ed alla misura di rischio β_{j_0}, si determina la misura di efficienza $I_{j_0,DEA-C}$ per il fondo j_0, come segue:

(5.33)

Anche in questo caso è possibile trasformare il problema di programmazione frazionaria (5.29) – (5-32) in un problema di programmazione lineare equivalente, come qui esposto:

(5.34)

con i vincoli

(5.35)

(5.36)

(5.37)

(5.38)

La misura di efficienza $I_{j_0,DEA-C}$ è compresa nell'intervallo $[0,1]$. Anche in questo caso inserendo il vincolo (5.26) nel modello (5.34) – (5.38) si ottiene un modello ouput-oriented con rendimenti di scala variabili che può essere utilizzato per la valutazione della performance dei fondi comuni di investimento. Tale modello viene chiamato DEA-V.

5.6 Il modello MV-loads

Kerstens, Mounir e Van de Woestyne, in un articolo del 2011, suggeriscono di confrontare la performance dei fondi comuni di investimento attraverso una misura DEA, determinata applicando il modello introdotto da Kerstens e Van de Woestyne nel 2009, che consente di utilizzare la metodologia DEA anche quando si è in presenza di dati negativi.

In particolare, Kerstens, Mounir e Van de Woestyne, avendo a disposizione un insieme di *n* fondi comuni di investimento, utilizzano il seguente modello per la valutazione del generico fondo j_0:

(5.39)

con i vincoli

(5.40)

(5.41)

(5.42)

(5.43)

E’ da notare che in questo caso, come esposto da Kerstens, e Van de Woestyne (2009), il valore β_{j_0} rappresenta una misura di inefficienza dell’unità decisionale (in questo caso il fondo j_0), quindi più piccolo è β_{j_0}, maggiore è la performance del fondo valutato.

Nel modello (5.39) – (5.43) si utilizza come output il rendimento medio del fondo, mentre come input la varianza dei rendimenti, e tre costi di transazione: *maximun front load* (cioè le commissioni più elevate richieste all’investitore per entrare nel fondo), *deferred load* (cioè le commissioni di uscita dal fondo) e l’*annual net expense ratio* (che include, i compensi dei manager le spese di marketing ed altre spese di gestione del fondo). Di conseguenza questo modello viene definito modello MV-loads.

Kerstens, Mounir e Van de Woestyne, propongono anche delle variazioni al modello MV-loads, ma per un maggiore approfondimento si veda (Kerstens, Mounir e Van de Woestyne, 2011).

CAPITOLO SESTO

APPLICAZIONE DI TRE MODELLI DEA AI FONDI COMUNI EUROPEI

6.1 Introduzione

Tra i modelli DEA precedentemente esposti, che possono essere utilizzati per la valutazione dei fondi comuni di investimento anche nei periodi di crisi, ne sono stati scelti tre da adottare per valutare la performance di circa 300 fondi comuni europei nel periodo che va da dicembre 2006 a novembre 2013. I modelli scelti sono stati leggermente modificati rispetto ai modelli base, aggiungendo ulteriori input. In questo capitolo verranno descritti i fondi oggetto di analisi e saranno in seguito esposti i risultati ottenuti applicando la metodologia DEA con i tre differenti modelli. Infine, tali risultati saranno confrontanti con quelli ottenuti utilizzando le tradizionali misure di performance per la valutazione dei fondi comuni di investimento.

6.2 Descrizione dei fondi

I fondi di investimento scelti in questa analisi sono 317 fondi europei azionari; nella tabella 6.1 i fondi elencati, suddivisi in base all'obiettivo e all'area di investimento:

Tabella 6.1: Fondi europei inclusi nell'analisi

I 317 fondi considerati sono stati numerati come riportato nella prima colonna della tabella 6.1, poiché in seguito, ciascun fondo verrà identificato in base al rispettivo numero.

Nell'ultima colonna della tabella 6.1 sono riportati i codici Bloomberg dei fondi selezionati poiché tutti i dati utilizzati derivano dai valori raccolti dalla banca dati di Bloomberg. Nella tabella 6.2 sono esposti i dati utilizzati nei tre modelli DEA che verranno presentati in seguito.

Tabella 6.2: Dati dei fondi europei

Nella seconda e terza colonna della tabella 6.2 sono state raccolte le commissioni di entrata e le commissioni di uscita richieste da ciascun fondo. Il rendimento medio mensile, esposto nella quinta colonna, deriva dalla media aritmetica dei rendimenti mensili, nel periodo che va da dicembre 2006 a novembre 2013. I rendimenti mensili sono dei rendimenti logaritmici, cioè calcolati come segue:

(6.1)

dove R_t è il rendimento mensile nel periodo t, P_t è il prezzo (o quotazione) alla fine del mese t e P_{t-1} è il prezzo alla fine del mese $t-1$.

Tuttavia è importante ricordare che esistono sia fondi "ad accumulazione" (che non distribuiscono dividendi), sia fondi "income" (che distribuiscono periodicamente idividendi agli investitori) ed il rendimento di un fondo dipende anche dagli eventuali dividendi distribuiti durante il periodo di investimento. Di conseguenza per calcolare i rendimenti mensili di ogni fondo sono state raccolte le quotazioni (espresse in Euro), nel periodo che va da novembre 2006 a novembre 2013, che considerano anche gli eventuali dividendi distribuiti.

La deviazione standard mensile è stata determinata applicando la seguente formula:

(6.2)

dove $r_{p\,j}$ è il rendimento medio del fondo *j*.

Nelle altre colonne della tabella 6.2 sono riportati i valori della percentuale di rendimenti mensili negativi durante il periodo di analisi (PropNeg%), il rendimento mensile minimo (Min) e l'asimmetria della distribuzione dei rendimenti mensili (Skew).

Ulteriori dati necessari per la presente analisi sono il coefficiente beta, il rendimento medio annuale e la deviazione standard annuale dei rendimenti del fondo. Il rendimento medio annuale di ciascun fondo è stato determinato moltiplicando il rendimento medio mensile per 12. La deviazione standard annuale di ciascun fondo deriva invece dalla deviazione standard mensile moltiplicata per $\sqrt{12}$, poiché utilizzando i rendimenti logaritmici è possibile esprimere il rendimento annuale come la somma di k rendimenti mensili (con $k = 1,...,12$).

Nel calcolo del coefficiente beta è stato scelto come benchmark lo STOXX Europe Total Market Index (TMI), di cui è stata raccolta la serie storica delle quotazioni da novembre 2006 a novembre 2013, necessaria per la determinazione del rendimento medio mensile e della varianza mensile. Di conseguenza il beta di ciascun fondo è stato calcolato come segue:

(6.3)

dove con R_{jt} ed R_{Mt} si indicano rispettivamente i rendimenti del fondo j e quelli del benchmark, mentre con σ_M^2 si indica la varianza dei rendimenti del benchmark.

6.3 Il modello DEA-T

Si è deciso di nominare DEA-T il primo modello scelto per l'analisi del campione di fondi europei. Si tratta del modello formulato da Wilkens e Zhu nel 2001, considerando però gli input e gli output esposti nella seguente tabella:

Tabella 6.3: Input e output nel modello DEA-T

Il modello utilizzato per la valutazione del generico fondo j_0 è il seguente:

(6.4)

con i vincoli

(6.5)

(6.6)

(6.7)

(6.8)

Nella tabella 6.4 sono riportati i valori degli input e degli output per ciascun fondo:

Tabella 6.4: Dati di input e di output modello DEA-T

Come spiegato nel quinto capitolo, nel modello formulato da Wilkens e Zhu (2001) il problema dei dati negativi negli output viene risolto traslando i dati in modo tale da avere tutti valori positivi. Nei valori esposti nella tabella 6.4 si può notare che in tutti gli output considerati sono presenti alcuni dati inferiori a zero. Di conseguenza nelle ultime tre colonne sono stati riportati gli output modificati aggiungendo per ciascun output i valori:

- $\pi_1 = 1{,}3632\%$ è la costante aggiunta al rendimento medio mensile;
- $\pi_2 = 55{,}4608\%$ è la costante aggiunta la rendimento minimo;
- $\pi_3 = 2{,}1949$ è la costante aggiunta all'asimmetria (Skew).

Tali valori non sono stati scelti a caso: è stato selezionato il valore che consentisse di trasformare in zero il dato più piccolo presente in ciascun output.
Di conseguenza, se y_1, y_2 e y_3 sono gli output indicati nella tabella 6.4, gli output modificati indicati nelle ultime tre colonne della medesima tabella sono determinati come segue:

(6.9)

(6.10)

(6.11)

6.4 Il modello DEA-KC con tre input e un output

Il secondo modello DEA utilizzato nella presente analisi è il modello DEA-KC formulato da Basso e Funari nel 2013. Tuttavia in questa valutazione è stato deciso di aggiungere come ulteriore input il beta di ciascun fondo. Nella tabella 6.5 sono indicati gli input e gli output considerati:

Tabella 6.5: Input e output modello DEA-KC

Con riferimento alla tabella 6.5, il valore di M_j è stato determinato con riferimento all'espressione 5.15.

Il modello CCR output-oriented con tre output e un input, applicato per la valutazione del generico fondo j_0 è il seguente:

(6.12)

con i vincoli

(6.13)

(6.14)

3 (6.15)

dove ε è un valore positivo molto piccolo.

Il problema di programmazione frazionaria (6.12) – (6.15) può essere trasformato in un problema di programmazione lineare, come qui esposto:

(6.16)

con i vincoli

(6.17)

(6.18)

(6.19)

3 (6.20)

dove ε è sempre un valore positivo molto piccolo.

Tutti gli input e gli output di ciascun fondo sono stati riportati nella seguente tabella 6.6:

Tabella 6.6: Dati di input e di output modello DEA-KC

6.5 Il modello DEA-V con tre input e un output

L'ultimo modello che in questa analisi è stato utilizzato per valutare i fondi europei è il modello DEA-V di Basso e Funari (2013b), con l'aggiunta negli output della deviazione standard annuale dei rendimenti. Nella tabella che segue sono indicati gli input e gli output considerati:

Tabella 6.7: Input e output modello DEA-V

I valori di K_j sono determinati come esposto in (5.27), mentre i valori di M_j sono calcolati come in (5.28).

Il modello DEA-V con tre input e un output, scritto in forma lineare, utilizzato per la valutazione del generico fondo j_0 è il seguente:

(6.21)

con i vincoli

(6.22)

(6.23)

(6.24)

(6.25)

3 (6.26)

dove ε è rappresenta un valore positivo molto piccolo.

E' importante osservare che nel modello (6.21) – (6.26) è presente anche il vincolo di convessità, descritto dall'espressione 6.24. Quindi il modello DEA-V è un modello BCC.

Tutti gli input e gli output di ciascun fondo, utilizzati in questo modello, sono riportati nella seguente tabella 6.8:

Tabella 6.8: Dati di input e di output modello DEA-V

6.6 I risultati ottenuti con i modelli DEA

In questo paragrafo vengono riportati i risultati ottenuti applicando i modelli DEA-T, DEA-KC e DEA-V ai fondi europei della tabella 6.1. Gli score DEA di ciascun fondo, esposti nella tabella 6.9, sono stati calcolati utilizzando il software MaxDEA Basic. Nella stessa tabella è possibile osservare anche i ranking relativi agli score DEA per ciascun modello utilizzato, dove il ranking di ciascuna DMU efficiente è pari a 1.

Tabella 6.9: Risultati dei modelli DEA per i fondi analizzati

Nella tabella 6.10 sono messi a confronto i risultati forniti dai modelli DEA-T, DEA-KC e DEA-V. Come si può notare, nella tabella 6.10 sono indicati i fondi efficienti in ogni modello e la loro percentuale rispetto ai 317 fondi considerati. Sono inoltre riportati lo score minimo e lo score medio per ciascun modello.

Tabella 6.10: Confronto fra i modelli DEA

Dalla tabella 6.10 si nota che i cinque fondi risultati efficienti nel modello DEA-KC (139, 140, 193, 305 e 309) risultano efficienti anche negli altri due modelli considerati. Inoltre, al modello DEA-KC sono associati i valori più bassi dello score minimo e dello score medio, mentre i valori più elevati sono associati al modello DEA-T. E' possibile osservare che quest'ultimo modello presenta una percentuale di fondi efficienti (6,31%) molto più elevata rispetto alla percentuale calcolata nei modelli DEA-KC (1,58%), e DEA-V (1,89%). Di conseguenza si può affermare che i modelli DEA-KC e DEA-V forniscono dei risultati molti simili (questo lo si può notare anche osservando gli score di ciascun fondo nella tabella 6.9), mentre vi è una maggiore differenza di risultati tra gli score di questi due modelli e quelli del modello DEA-T.
Nella tabella 6.11, esposta qui di seguito, sono invece riportati gli score medi di ciascuna categoria di fondi, determinata in base all'obiettivo e all'area di investimento. In ciascuna categoria è riportato anche il numero di fondi di cui è composta.

Tabella 6.11: Risultati medi dei modelli DEA per categoria

Dalla tabella 6.11 è interessante notare che la categoria *Multiple Countries-Austria, Germany, Switzerland* (composta solamente dal fondo 309) risulta efficiente in tutti e tre i modelli. Nel modello DEA-T anche nella categoria *Health Care Sector - Global* si osserva uno score pari a 1, mentre è classificata come seconda migliore categoria negli altri due modelli. Quest'ultima categoria è infatti composta da quattro fondi (138, 139, 140 e 141) tutti efficienti nel modello DEA-T e solo due (138 e 139) efficienti per i modelli DEA-KC e DEA-V.

6.7 Un confronto con le principali misure di performance

In questo paragrafo vengono esposti i risultati ottenuti calcolando per ciascun fondo le principali misure di performance utilizzate nella valutazione dei fondi comuni di investimento: indice di Sharpe, indice di Treynor, indice di Sortino, Risk-Adjusted-Performance (RAP), M^2, Information Ratio e Alfa di Jensen. Le misure di performance appena citate sono state determinate su base annuale, con riferimento alle espressioni riportate nel primo capitolo.

Come benchmark è stato scelto lo STOXX Europe Total Market Index (TMI), utilizzato anche nella determinazione del beta, inserito tra gli input dei modelli DEA esposti in precedenza.

Come tasso privo di rischio è stato scelto il tasso Euribor a 12 mesi (EURIBOR 360), di cui è stata raccolta la serie storica dei valori mensili da dicembre 2006 a novembre 2013.

Tutti i rendimenti utilizzati sono composti continuamente, ricordando che la relazione tra il tasso istantaneo di interesse (δ) ed il tasso di interesse determinato in base alla legge di capitalizzazione composta (i) è la seguente:

$$\delta = \ln(1 + i) \qquad (6.26)$$

Nella tabella 6.12 sono riportati i valori delle misure di performance, sopra citate, per ciascun fondo:

Tabella 6.12: Misure di performance per fondo

Nella tabella 6.12 è esposto anche il ranking di ciascun fondo, in base al valore più elevato, calcolato per ciascuna misura di performance.
Nelle tabelle 6.13 e 6.14, esposte qui di seguito, sono invece messi in evidenza i fondi con i più elevati e i più bassi valori nelle misure di performance considerate.

Tabella 6.13: Fondi con i valori più elevati nelle misure di performance

Tabella 6.14: Fondi con i valori più bassi nelle misure di performance

Si ricorda che i fondi risultati efficienti in tutti e tre i modelli DEA sono i fondi 139, 140, 193, 305 e 309. In base a quanto riportato nella tabella 6.13, si osserva che il fondo 305 è considerato il migliore nell'indice di Sharpe, nell'indice di Sortino e nelle misure RAP e M^2, è al secondo posto nell'Information Ratio (IR), mentre è al terzo posto in base all'indice di Treynor e all'Alfa di Jensen. I fondi 139 e 193 sono presenti in tutte le misure di performance della tabella 6.13, escluso l'Information Ratio. Sempre nella medesima tabella, si osserva che il fondo 140 non è presente nell'Information Ratio e nell'Alfa di Jensen, mentre il fondo 309 non è tra i primi dieci fondi delle misure di performance considerate.

Per un confronto tra i fondi con i più bassi valori nelle principali misure di performance e i fondi con gli score DEA più bassi nei modelli DEA-T, DEA-KC e DEA-V si osservino le tabelle 6.14 e 6.15.

Tabella 6.15: Fondi con gli score DEA più bassi

Dal confronto tra le due tabelle si nota che il fondo 285 ha ottenuto lo score più basso in tutti e tre i modelli DEA e nella tabella 6.14 lo stesso fondo si trova all'ultimo posto nel ranking di tutte le misure di perfomance considerate, ad eccezione dell'indice di Treynor, dove occupa il terzultimo posto del ranking.

Nella tabella 6.16 che segue sono esposti i valori medi delle misure di performance in ogni categoria, determinata in base all'obiettivo e all'area di investimento di ciascun fondo:

Tabella 6.16: Misure di performance per categoria

Dalla tabella 6.16 si osserva che al primo posto del ranking si trova la seguente categoria in base agli indici di performance considerati:

- la categoria *Consumer Stamples – Global*, in base all'indice di Sharpe, RAP e M^2;
- la categoria *Health Care Sector – Global*, in base all'indice di Treynor e all'indice di Sortino;
- la categoria *Value Broad Market – Switzerland*, in base all'Information Ratio e all'Alfa di Jensen.

Confrontando la tabella 6.16 con la tabella 6.11 si nota che la categoria *Health Care Sector - Global* è tra le categorie efficienti nel modello DEA-T e la seconda, in termini di score, in base ai modelli DEA-KC e DEA-V.

Nelle tabelle 6.17 e 6.18 sono invece riportate le matrici di correlazione tra tutte le misure di performance utilizzate nell'analisi dei fondi europei (sia le classiche misure di performance sia le misure DEA), al fine di analizzare come le diverse misure si muovano assieme nella determinazione della performance dei fondi oggetto di analisi. Le correlazioni della tabella 6.17 sono state determinate considerando i valori di tutti i fondi, mentre le correlazioni presenti nella tabella 6.18 sono state determinate considerando solo i fondi che nel periodo di analisi hanno presentato un valore dell'indice di Sharpe positivo. Tali fondi sono solo 112 e rappresentano il 35,33% del totale dei fondi considerati.

Tabella 6.17: Correlazione tra le misure di performance (tutti i fondi)

Tabella 6.18: Correlazione tra le misure di performance (solo fondi con indice di Sharpe positivo)

Dalle tabelle 6.17 e 6.18 sopra esposte, si riscontra una forte correlazione positiva tra i modelli DEA-KC e DEA-V. Osservando invece la correlazione tra l'indice di Sharpe e i modelli DEA, nella tabella 6.17 si nota una forte correlazione positiva tra l'indice di Sharpe e i modelli DEA-KC (0,9373) e DEA-V (0,9147), mentre si osserva una correlazione positiva più bassa tra il modello DEA-T e l'indice di Sharpe (0,5772). Analizzando invece i medesimi valori nella tabella 6.18, si nota che la correlazione tra l'indice di Sharpe e i modelli DEA-KC e DEA-V diminuisce, ma resta comunque elevata (0,8938 e 0,8352). Invece, la correlazione tra l'indice di Sharpe e il modello DEA-T è maggiore quando si considerano solo i fondi con l'indice di Sharpe positivo (0,6167).

Osservando sempre le tabelle 6.17 e 6.18 si nota inoltre che i valori di correlazione tra le altre misure di performance utilizzante nella presente analisi (indice di Treynor, indice di Sortino, RAP, M^2, Information Ratio e Alfa di Jensen) ed i modelli DEA-KC e DEA-V sono abbastanza elevati, mentre si riscontrano valori di correlazione molto più bassi tra le misure di performance appena citate ed il modello DEA-T.

Conclusioni

L'obiettivo di questa tesi è stato quello di verificare se la metodologia Data Envelopment Analysis possa essere considerata uno strumento utile per la valutazione dei fondi comuni di investimento nei periodi di crisi.

Nel primo capitolo sono state presentate alcune tra le più conosciute misure di performance solitamente utilizzate nella valutazione dei fondi di investimento: indice di Sharpe, indice di Treynor, indice di Sortino, Information Ratio, Risk Adjusted Performance (RAP), M^2 e Alfa di Jensen.

Nel capitolo secondo è stato evidenziato che alcune tradizionali misure di performance possono presentare dei problemi di interpretazione se utilizzate quando il mercato si trova in una fase negativa, o ne ha appena passata una. Questo problema è legato al fatto che nella pratica finanziaria si è soliti utilizzare le informazioni *ex post* dei fondi comuni d'investimento per la valutazione della loro performance futura. Di conseguenza, può capitare che alcune misure presentino valori negativi, proprio perché sono calcolate utilizzando valori ottenuti da serie storiche. In questa tesi sono state esposte tre modifiche all'indice di Sharpe, proposte per offrire la possibilità di utilizzare tale indice anche nei periodi di crisi, senza che vi siano dei problemi legati alla sua interpretazione. Tuttavia, in base al parere di alcuni studiosi l'indice di Sharpe non richiede aggiustamenti e quindi può essere utilizzato anche nella sua formulazione originale, a prescindere dalle fasi di mercato.

Il terzo capitolo ha presentato la metodologia Data Envelopment Analysis con i principali modelli di cui si compone: CCR, BCC, additivo e SBM.

Nel quarto capitolo è stato evidenziato il fatto che i principali modelli DEA forniscono una corretta misura di efficienza solo in assenza di valori negativi, negli input e negli output. Tuttavia, poiché nella pratica può capitare di trovare alcuni dati inferiori a zero, sono state esposte alcune soluzioni che consentono di applicare la tecnica DEA anche in presenza di dati negativi. E' stata quindi presentata la proprietà di *traslation invariance* e sono stati esposti alcuni modelli che consentono di utilizzare la DEA anche quando alcuni valori negli input o negli output sono inferiori a zero.

Nel quinto capitolo è stata evidenziata la difficoltà dell'utilizzo dell'indice DPEI nei periodi di crisi, poiché l'output scelto per il calcolo di questa misura potrebbe essere negativo, e ciò non consentirebbe di ottenere un corretto valore di efficienza per i fondi considerati. Sono stati quindi presentati dei modelli DEA che, in modi differenti, affrontano il problema dei dati negativi e consentono perciò di ottenere, anche nei periodi di crisi, una misura di performance alternativa alle tradizionali misure utilizzate per valutare i fondi di investimento.

La parte più importante di questa tesi è costituita dal capitolo sesto, dove sono stati esposti i risultati ottenuti applicando tre differenti modelli DEA nella valutazione della performance di 317 fondi azionari europei, nel periodo cha va da dicembre 2006 a novembre 2013. I modelli applicati sono stati denominati DEA-T, DEA-KC e DEA-V. Tutti e tre i modelli tengono in considerazione le commissioni di entrata e di uscita, applicate da ciascun fondo, e alcune misure di rischio, rappresentate dal coefficiente beta e dalla deviazione standard dei rendimenti del fondo. Nel modello DEA-T il problema dei dati negativi è stato affrontato ricorrendo alla proprietà di *translation invariance*, mentre nei modelli DEA-KC e DEA-V è stato utilizzato come unico output il valore finale netto dell'investimento (anche se determinato in modo differente nei due modelli), ottenendo così un valore sempre positivo. E' da notare che, in tutti e tre i modelli, il problema dei dati negativi ha riguardato solo gli output, poiché tutti gli input utilizzati in questa analisi presentavano valori maggiori di zero.

Dai risultati ottenuti si è osservato che le misure di performance determinate attraverso la tecnica DEA con i modelli scelti non presentano problemi di interpretazione nei periodi di crisi, poiché l'efficienza di ciascun fondo è descritta da un valore compreso tra zero e uno.

Analizzando i risultati ottenuti con i tre modelli, è stato osservato che i cinque fondi efficienti in base al modello DEA-KC lo sono anche nei modelli DEA-T e DEA-V. Tuttavia la percentuale di DMU efficienti è differente: 6,31% nel modello DEA-T, 1,58% nel modello DEA-KC e 1,89% nel modello DEA-V.

Dal confronto tra i risultati ottenuti con i modelli DEA ed i valori calcolati applicando le tradizionali misure di performance è stata notata una forte correlazione tra i valori dei modelli DEA-KC e DEA-V ed i valori delle misure di performance tradizionali. Invece, sono stati osservati valori di correlazione più bassi tra i risultati del modello DEA-T e quelli di tutte le altre misure di performance utilizzate in questa analisi.
Alla luce di quanto esposto, si può affermare che la metodologia DEA fornisce delle misure di performance per i fondi comuni d'investimento nei periodi di crisi, che possono essere utilizzate come misure alternative a quelle tradizionali.
Inoltre, a differenza di alcune misure tradizionali, i risultati ottenuti con i modelli DEA sono di facile interpretazione, anche quando alcuni fondi possono presentare rendimenti medi negativi nel periodo di analisi.
Infine, è interessante notare che i valori di performance ottenuti con i modelli DEA, considerano non solo il rendimento del fondo e la sua rischiosità, ma anche i costi di transazione, i quali possono avere la loro importanza nelle scelte d'investimento.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Akeda, Y., (2003). *Another Interpretation of Negative Sharpe Ratio*. The Journal of Perfotmance Measurement, pp. 2-5.

Basso, A., Funari, S., (2007). *DEA models for ethical and non ethical mutual funds*. Department of Applied Mathematics, Ca' Foscari University of Venice.

Basso, A., Funari, S., (2013). *DEA models with a costant input for SRI mutual funds. With an application to European and Swedish funds*. Department of Economics Ca'Foscari University of Venice, Department of Management Ca' Foscari University of Venice.

Basso, A., Funari, S., (2013b). *Costant and variable to scale DEA models for socially responsable investment funds*. Department of Economics Ca'Foscari University of Venice, Department of Management Ca' Foscari University of Venice.

Bodie, Z., Kane, A., Marcus, A.J., (2011). *Investments*. McGraw-Hill.

Charnes, A., Cooper, W., Lewin, A.Y., Seiford, L.M., (1994). *Data Envelopment Analysis. Theory, Methodology and Applications*. Kluwer Academic Publishers.

Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E., (1978). *Measuring the efficiency of decision making units*. European Journal of Operational Research, 2, pp. 429-444.

Cook, W.D., Seiford, L.M., (2009). *Data envelopment analysis (DEA) — Thirty years on*. European Journal of Operational Research, 192, pp. 1-17.

Cooper, W., Seiford, L.M., Tone, K., (2006). *Introduction to Data Envelopment Analysis and Its Uses With DEA-Solver Software and References*. Springer.

Eling, M., Schuhmancher, F., (2007). *Does the choice of performance measure influence yhe evaluation of hedge fund?*. Journal of Banking & Finance, 31, pp. 2632-2647.

Elton, E.J., Gruber, M.J., Brown, S.J., Goetzmann, W.N., (2007). *Teorie di portafoglio e analisi degli investimenti*. Apogeo.

Emrouznejad, A., Anouze, A.L., Thanassoulis, E., (2010). *A semi-oriented radial measure for measuring the efficiency of decision making units with negative data, using DEA*. European Journal of Operational Research, 200, pp. 297-304.

Emrouznejad, A., Amin, G.R., Thanassoulis, E, Anouze, A.L., (2010). *On the boundedness of the SORM DEA models with negative data*. European Journal of Operational Research, 206, pp. 265-268.

Ferruz, L., Sarto, J.L., (2004). *An Analysis of Spanish Investment Fund Performance: Some Considerations Concerning Sharpe's Ratio*. Omega — The International Journal of Management Science, 32, pp. 273-284.

Ferruz, L., Vicente, L., (2005), *Style portfolio performance: Empirical evidence from the Spanish equity funds*. Journal of Asset Management, 5, pp. 397-409.

Gang, C., Panagiotis, Z., Zhenhua, Q., (2011). *A variant of radial measure capable of dealing with negative inputs and outputs in data envelopment analysis.* China Center for Health Development Studies, Peking University, Department of Economic and Regional

Development Panteion University of Athens, School of Social Science, University of Science and Tecnology Beijing.

Goodwin, T.H., (1998). *The Information Ratio*. Financial Analysts Journal, 54, pp. 34-43.

Irealsen, C.L., (2003). *Sharpening the Sharpe Ratio*. Financial Planning, 33, pp. 49-51.

Irealsen, C.L., (2005). *A Refinement to the Sharpe Ratio and Information Ratio*. Journal of Asset Management, 5, pp. 423-427.

Jensen, M.C., (1968). *The performance of mutual fund in the period 1945-1964*. The Journal of Finance 23, pp. 389-416.

Kerstens, K., Van de Woestyne, I., (2009). *Negative data in DEA: a simple proportional distance function approach.* IESEG Working Paper Series 2009-ECO-03.

Kerstens, K., Mounir, A., Van de Woestyne, I., (2011). *Non-parametric frontier estimates of mutual fund performance using C- and L-moments: some specification tests.* Journal of Banking & Finance, 35, pp. 1190-1201.

Lovell, C.A.K., Pastor, J.T., (1995). *Units invariant and traslation invariant DEA models*. Operations Research Letters, 18, pp. 147-151.

Luenberg, D.G., (2006). *Finanza e Investimenti. Fondamenti matematici*. Apogeo

McLeod, W. e van Vuuren, B., (2004). *Interpreting the Sharpe Ratio When The Excess Returns are Negative*. Investment Analysts Journl, 59, pp. 15-20.

Modigliani, F., Modigliani, L., (1997). *Risk-Adjusted performance*. The Journal of Portfolio Management, pp. 45-54.

Murthi, B.P.S., Choi, Y.K., Desai, P., (1997). *Efficiency of mutual funds and portfolio performance measurement: A non-parametric approach*. European Journal of Operational Research, 98, pp.408-418.

Nadotti, L., Porzio, C., Previati, D., (2010). *Economia degli intermediari finanziari*. McGraw-Hill.

Scholz, H., Wilkens, M., (2005). *A Jigsaw Puzzle of Basic Risk-adjusted Performance Measure.* The Journal of Performance Measurement, pp. 57-64.

Scholz, H., Wilkens, M., (2006). *The Sharpe Ratio's Market Climate Bias — Theoretcal and Empirical Evidence from US Equity Mutual Funds*. Working Paper, Ingolstadt School of Management, Catholic University of Eichstaett-Ingolstadt.

Scholz, H., Wilkens, M., (2006b). *Interpreting Sharpe Ratios — The Market Climate Bias*. Finance Letters (Forthcoming), Catholic University of Eichstaett-Ingolstadt.

Sharp, J.A., Meng W., Liu, W., (2007). *A Modified Slacks-Based Measure Model for Data Envelopment Analysis with 'Natural' Negative Outputs and Inputs*.The Journal of the Operational Research Society, 58, pp. 1672-1677.

Sharpe, W. F., (1966). *Mutual fund performance*. Journal of business 39, pp. 119-138.

Sharpe, W.F., (1997). *Morningstar Performance Measures*. http://www.sharpe.stanford.edu./stars0.htm

Sharpe, W.F., (1998). *Morningstar's Risk-Adjusted Ratings*. Financial Analysts Journal, 54, pp. 21-33.

Silva Portela, M.C.A., Thanassoulis, E., Simpson G., (2004). *A directional distance approach applied to bank branches*. The Journal of Operational Research Society 55, pp. 1111-1121.

Wilkens, K., Zhu, J., (2001). *Portfolio Evaluation and Benchmark Selection: A Mathematical Programming Approach*. The Journal of Alternative Investments, pp. 9-18.