Università
Ca'Foscari
Venezia

Corso di Laurea magistrale
in
Economia e Finanza

Tesi di Laurea

Barrier e Parisian options nel mercato dei futures sul petrolio: valutazione, criticità e confronto

Relatrice
Ch.ma Prof.ssa Martina Nardon

Correlatrice
Ch.ma Prof.ssa Diana Barro

Laureando
Andrea Penzo
Matricola 886391

Anno Accademico
2026/2027

Indice

Abstract **9**

Introduzione **11**

1 Il mercato del petrolio come sottostante finanziario **15**

1.1 Il ruolo del petrolio nell'economia mondiale 15

1.1.1 La rilevanza economica del greggio 16

1.1.2 Domanda e offerta 16

1.1.3 I benchmark: Brent e WTI 18

1.1.4 Principali aree produttive 19

1.2 La formazione del prezzo del petrolio 21

1.2.1 La domanda mondiale 21

1.2.2 OPEC+ e il coordinamento dell'offerta 22

1.2.3 Geopolitica, conflitti e sanzioni 23

1.2.4 Le scorte 24

1.2.5 Il quadro macroeconomico e finanziario 25

1.3 Il mercato dei derivati sul crude oil 26

1.3.1 I futures 26

1.3.2 Le opzioni 27

1.3.3 Il mercato over-the-counter 28

1.3.4 Hedger e speculatori 29

1.4 Caratteristiche del prezzo del petrolio 30

1.4.1 Volatilità elevata 30

1.4.2 Volatility clustering 31
1.4.3 Salti improvvisi 32
1.4.4 Gli episodi di discontinuità del prezzo 32

2 Fondamenti teorici per la valutazione delle opzioni path-dependent 35

2.1 Le opzioni europee 35
2.1.1 Definizioni e caratteristiche 36
2.1.2 Payoff e profitto 37
2.1.3 I determinanti del premio 38
2.2 Il modello di Black-Scholes-Merton 40
2.2.1 Le ipotesi del modello 40
2.2.2 Il processo stocastico del sottostante 41
2.2.3 Il portafoglio replicante e l'equazione di Black-Scholes 43
2.2.4 La valutazione risk-neutral 44
2.2.5 La formula di Black-Scholes 45
2.2.6 Le principali greche 46
2.3 I limiti del modello di Black-Scholes 47
2.3.1 L'ipotesi di volatilità costante 48
2.3.2 L'ipotesi di continuità delle traiettorie 49
2.3.3 L'ambito di applicabilità della formula 49
2.4 Le opzioni path-dependent 51
2.4.1 Le principali categorie 51
2.4.2 Le motivazioni economiche 52
2.5 First passage time 53
2.5.1 Stopping time e first passage time 53
2.5.2 Il principio di riflessione 54
2.6 Il metodo Monte Carlo per le opzioni path-dependent 56
2.6.1 I vantaggi della simulazione per i payoff path-dependent 56
2.6.2 La simulazione delle traiettorie 57

2.6.3 La stima del prezzo 57
2.6.4 L'applicazione alle opzioni a soglia e il bias di monitoraggio . . . 58

3 Le opzioni barriera **61**

3.1 La struttura contrattuale delle opzioni barriera 62
3.1.1 Le otto tipologie standard 62
3.1.2 La relazione di parità in-out 64
3.1.3 Le varianti contrattuali: rebate, barriere parziali e monitoraggio discreto 65
3.2 La valutazione in forma chiusa 66
3.2.1 La struttura della soluzione 67
3.2.2 L'interpretazione economica dei termini 68
3.2.3 La parametrizzazione di Reiner e Rubinstein 70
3.2.4 Le verifiche di coerenza delle formule chiuse 71
3.3 Le opzioni a doppia barriera 73
3.3.1 La struttura contrattuale e le ragioni economiche 74
3.3.2 La soluzione in serie 75
3.3.3 Convergenza e implicazioni computazionali 76
3.4 Le criticità delle opzioni barriera 77
3.4.1 La discontinuità del payoff e la fragilità della copertura 77
3.4.2 Monitoraggio continuo e monitoraggio discreto 79
3.4.3 La sensibilità alle escursioni transitorie 81
3.4.4 Rischio di manipolazione e barrier event risk 82
3.4.5 Il rischio di modello 83
3.5 Dal contatto istantaneo alla permanenza oltre la soglia 84

4 Le opzioni parigine **87**

4.1 La definizione e la classificazione delle opzioni parigine 88

4.1.1 La definizione dell'evento contrattuale 88
4.1.2 Le configurazioni knock-in e knock-out 89
4.1.3 I casi limite del parametro di permanenza 89
4.1.4 La relazione di parità in-out 90
4.2 La variante standard e la variante cumulativa 91
4.2.1 La variante standard 91
4.2.2 La variante cumulativa 92
4.2.3 L'adeguatezza dei due criteri al mercato del greggio 93
4.2.4 Applicazione di clausole path-dependent nei mercati finanziari . . 94
4.3 Il quadro probabilistico 95
4.3.1 I limiti del first passage time 95
4.3.2 Escursioni browniane e tempi di occupazione 96
4.3.3 Il cambio di misura e il quadro di Black 96
4.4 I metodi di valutazione 97
4.4.1 La trasformata di Laplace del prezzo 98
4.4.2 L'inversione numerica 99
4.4.3 Gli approcci alternativi: le differenze finite, i reticoli e la simulazione 99
4.4.4 Le estensioni oltre il moto browniano geometrico 100
4.4.5 Il ricorso alla simulazione per le opzioni parigine 101
4.5 Il monitoraggio discreto nel caso parigino 101
4.5.1 Il parametro D nella prassi contrattuale 101
4.5.2 Le distorsioni di discretizzazione 102
4.5.3 I limiti della correzione di continuità nel caso parigino 103
4.6 Gli effetti della clausola sulle criticità delle opzioni barriera 104
4.7 I criteri di scelta del parametro D 106

5 Valutazione numerica e simulazione Monte Carlo **109**

5.1 Le finalità dell'analisi numerica 109

5.2 Le specificazioni del processo del prezzo futures 110

5.2.1 La forma generale e il vincolo di martingala 110

5.2.2 Le tre specificazioni: il moto geometrico browniano, i salti e gli spike 110

5.2.3 La calibrazione sul premio dell'opzione europea 112

5.3 I contratti valutati e la definizione operativa di D 113

5.4 L'impostazione della simulazione Monte Carlo 113

5.4.1 La generazione delle traiettorie e la stima del premio 114

5.4.2 I parametri di base 114

5.4.3 La validazione della simulazione 115

5.5 Il premio e la probabilità di attivazione al variare di D 117

5.5.1 I risultati nel modello di Black 117

5.5.2 La scomposizione del premio per esito delle traiettorie 117

5.5.3 Il divario tra variante standard e cumulativa 118

5.6 La dispersione dei prezzi tra specificazioni del processo 119

5.7 La sensibilità alla barriera e alla volatilità 120

5.8 Gli effetti della frequenza di monitoraggio 121

5.9 La durata delle escursioni sulla serie storica del Brent 122

5.9.1 I dati e la costruzione delle finestre 122

5.9.2 La distribuzione delle durate 123

5.9.3 Le estinzioni evitate dalla clausola di permanenza 124

Conclusioni **125**

A Codice della simulazione **129**

A.1 Simulatore delle tre specificazioni 129

A.2 Calibrazione e confronto tra specificazioni 132

A.3 Validazione della simulazione 133
A.4 Confronto tra strutture contrattuali e sensibilità 135
A.5 Frequenza di monitoraggio 139
A.6 Durata delle escursioni sulla serie del Brent 141

Bibliografia **145**

Sitografia **151**

Dichiarazione del ricorso a strumenti di Intelligenza Artificiale **153**

Abstract

Il lavoro analizza la valutazione delle opzioni barriera e delle opzioni parigine nel mercato dei futures sul petrolio greggio. Il punto di partenza è la caratterizzazione delle proprietà empiriche del prezzo del greggio, dalla volatilità elevata alla presenza di movimenti improvvisi, che ne fanno un sottostante particolarmente esposto alle criticità degli strumenti path-dependent. Dopo aver richiamato i fondamenti della valutazione nel modello di Black-Scholes-Merton e il suo adattamento ai contratti futures, la tesi sviluppa in forma chiusa il pricing delle opzioni barriera standard e a doppia barriera e ne individua cinque criticità, tutte riconducibili alla definizione dell'evento contrattuale come contatto istantaneo con una soglia prefissata. Su questa base viene introdotto il criterio alternativo delle opzioni parigine, che subordinano l'attivazione della clausola alla permanenza del sottostante oltre la soglia per una durata minima.

L'ultima parte del lavoro conduce un confronto numerico tra le due famiglie di contratti mediante simulazione Monte Carlo, facendo variare la durata di permanenza richiesta, la frequenza di monitoraggio e i principali parametri di mercato. L'esperimento è condotto sotto tre specificazioni alternative della dinamica del prezzo futures, il quadro lognormale di Black, una dinamica con salti permanenti e una che aggiunge movimenti transitori, calibrate in modo da attribuire il medesimo valore all'opzione europea, così da esaminare in quale misura il valore dei contratti condizionati dipenda dalla specificazione adottata. Il confronto è infine affiancato da un'analisi descrittiva della serie storica del Brent, volta a verificare se le escursioni di breve durata oltre una soglia, sulle quali la clausola di permanenza interviene, costituiscano un fenomeno ricorrente nel mercato del greggio.

Introduzione

Un'impresa esposta al prezzo del petrolio che voglia proteggersi da un rialzo può acquistare un'opzione call. Se ritiene improbabile un rialzo di ampiezza eccezionale e desidera contenere il costo della copertura, può acquistare un'opzione call up-and-out, che presenta un premio inferiore ma si estingue se il prezzo del sottostante raggiunge una soglia prefissata. Le opzioni barriera rappresentano quindi una modalità per realizzare questo compromesso e hanno trovato ampia applicazione nei mercati delle materie prime.

Il compromesso ha però una conseguenza che la formulazione contrattuale rende inevitabile. L'evento che determina l'estinzione è definito come il contatto con la soglia: è sufficiente che il prezzo la raggiunga una sola volta, anche per un istante, perché il contratto cessi di esistere. Il contratto non distingue quindi tra un rialzo che si consolida su un nuovo livello e un'oscillazione che si riassorbe nel giro di pochi giorni, rispetto alla quale l'impresa si trova priva di protezione nonostante il movimento non abbia prodotto un cambiamento altrettanto persistente della sua esposizione.

Nel mercato del petrolio questa distinzione non è un'astrazione. La ridotta elasticità di breve periodo della domanda e dell'offerta fa sì che gli squilibri vengano assorbiti prevalentemente attraverso il prezzo, caratterizzato da una volatilità relativamente elevata. Una parte dei movimenti di ampia entità può inoltre essere associata a variazioni dei premi per il rischio legate a fattori geopolitici, che possono manifestarsi rapidamente e successivamente attenuarsi. Movimenti di grande ampiezza e di breve durata sono dunque un tratto ricorrente di questo mercato e sono precisamente quelli rispetto ai quali la clausola di barriera presenta le maggiori difficoltà.

Le opzioni parigine, introdotte da Chesney, Jeanblanc-Picqué e Yor (1997), propongono una risposta a questa difficoltà. L'evento contrattuale non è più il semplice contatto con la soglia, bensì la permanenza oltre di essa per una durata minima D, stabilita nel contratto. Un'escursione più breve di D non produce alcun effetto; soltanto una permanenza sufficientemente prolungata determina l'estinzione. Il parametro D rende quindi progressivamente meno rilevanti le escursioni di breve durata, avvicinando la struttura a quella di un'opzione priva di barriera al crescere della permanenza richiesta.

La domanda che il presente lavoro si pone è se, e in quale misura, questa modifica del criterio contrattuale incida sul valore del contratto e sulle criticità che caratterizzano le opzioni barriera nel mercato del greggio. Rispondervi richiede di misurare, e non soltanto di argomentare: la valutazione delle configurazioni considerate in questo lavoro viene pertanto condotta per via numerica mediante simulazione Monte Carlo.

Il lavoro si articola in cinque capitoli.

Il Capitolo 1 esamina il mercato del petrolio come sottostante finanziario, con un'esposizione selettiva volta a individuare gli elementi rilevanti per la valutazione dei derivati: il ruolo del greggio nell'economia mondiale, i fattori che concorrono alla formazione del prezzo, la struttura del mercato dei derivati e le proprietà empiriche delle quotazioni, dalla volatilità elevata alla presenza di movimenti improvvisi.

Il Capitolo 2 richiama i fondamenti teorici della valutazione. Muovendo dal modello di Black-Scholes-Merton e dal suo adattamento ai contratti futures dovuto a Black (1976), vengono introdotti gli strumenti necessari al seguito della trattazione: i limiti del quadro lognormale, le opzioni path-dependent, la distribuzione del first passage time e il metodo Monte Carlo.

Il Capitolo 3 sviluppa la valutazione delle opzioni barriera nel quadro di Black, presentando le formule in forma chiusa di Reiner e Rubinstein (1991) per le otto tipologie standard e la soluzione in serie per le opzioni a doppia barriera. Ne individua quindi cinque criticità: la fragilità della copertura in prossimità della barriera, la dipendenza dalla convenzione di monitoraggio, la sensibilità alle escursioni transitorie, il rischio connesso all'accertamento dell'evento e l'amplificazione del rischio di modello. Tutte, si argomenta, risultano accentuate dal modo in cui l'evento contrattuale è definito.

Il Capitolo 4 introduce le opzioni parigine. Ne formalizza la struttura contrattuale, distingue la variante che richiede una permanenza continua da quella che somma le escursioni successive, presenta il quadro probabilistico delle escursioni browniane su cui si fonda la loro valutazione e ne esamina i metodi disponibili. Discute infine in che misura la clausola di permanenza incida su ciascuna delle cinque criticità individuate nel Capitolo 3.

Il Capitolo 5 sottopone l'argomento a verifica numerica. Mediante simulazione Monte Carlo vengono valutate e confrontate quattro strutture contrattuali, al variare della durata richiesta, della frequenza di monitoraggio e dei parametri di mercato. L'esperimento è condotto sotto tre specificazioni alternative della dinamica del prezzo futures, calibrate in modo da attribuire il medesimo valore all'opzione europea, così da verificare in quale misura la clausola di permanenza attenui la dipendenza del prezzo dal modello adottato. Il capitolo si chiude con un'analisi descrittiva della serie storica del Brent, volta a verificare se il fenomeno su cui la clausola interviene, cioè l'escursione di breve durata oltre una soglia, sia effettivamente osservabile nel mercato.

Le Conclusioni riprendono i risultati, ne discutono le implicazioni per il confronto tra le due strutture contrattuali e indicano i limiti dell'analisi e le direzioni in cui può essere estesa.

Capitolo 1

Il mercato del petrolio come sottostante finanziario

Il presente capitolo non si propone di offrire una rassegna esaustiva del mercato petrolifero, bensì di individuare gli elementi che rendono il prezzo del greggio un sottostante finanziario peculiare e che incidono sulla valutazione dei derivati aventi tale commodity come sottostante. L'esposizione procede pertanto in modo selettivo: tra i numerosi aspetti che caratterizzano questo mercato vengono richiamati soltanto quelli che risulteranno rilevanti ai fini della trattazione sviluppata nei capitoli successivi.
Il percorso si articola in quattro sezioni. La prima descrive il ruolo del petrolio nell'economia mondiale, la struttura della domanda e dell'offerta e i principali benchmark sui quali si concentra la negoziazione dei derivati. La seconda analizza i fattori che concorrono alla formazione del prezzo, distinguendo tra dinamiche fondamentali, decisioni di coordinamento dell'offerta, eventi geopolitici, evoluzione delle scorte e variabili macroeconomiche e finanziarie. La terza illustra i principali strumenti derivati scritti sul greggio e le esigenze economiche degli operatori che vi ricorrono. La quarta esamina infine le principali caratteristiche empiriche delle serie storiche dei prezzi, tra cui l'elevata volatilità, la persistenza dei regimi e la presenza di movimenti improvvisi, che costituiscono la motivazione empirica per gli strumenti teorici introdotti nel capitolo successivo e per l'analisi delle barrier e delle Parisian options sviluppata nel prosieguo della tesi.

1.1 Il ruolo del petrolio nell'economia mondiale

Prima di analizzare le modalità di formazione del prezzo del petrolio e gli strumenti derivati che vi fanno riferimento, è opportuno soffermarsi sulle caratteristiche economiche che rendono il greggio una materia prima peculiare. A tal fine, questa sezione ne esamina

il ruolo nell'economia mondiale, la struttura della domanda e dell'offerta, i principali benchmark di riferimento e la distribuzione geografica della produzione.

1.1.1 La rilevanza economica del greggio

Il petrolio greggio rappresenta, in termini di valore degli scambi, la commodity più importante del commercio internazionale. La sua rilevanza va ben oltre il ruolo di semplice fonte energetica: costituisce infatti una delle principali fonti di entrata per i Paesi esportatori, un costo strutturale per le economie importatrici, un fattore determinante per l'andamento dell'inflazione e, di conseguenza, una variabile attentamente monitorata dalle banche centrali nelle proprie decisioni di politica monetaria.
L'importanza del petrolio è riconducibile a un insieme di caratteristiche che poche altre fonti energetiche possiedono contemporaneamente. Tra queste si distinguono l'elevata densità energetica, la relativa semplicità di trasporto e stoccaggio e, soprattutto, il ruolo ancora predominante che esso ricopre nel settore dei trasporti, dove le alternative tecnologicamente ed economicamente praticabili su larga scala risultano tuttora limitate. Per questo motivo, nel breve periodo la domanda di greggio tende a essere poco elastica rispetto alle variazioni di prezzo.
La centralità del petrolio nell'economia mondiale si riflette inevitabilmente anche nei mercati finanziari. Le oscillazioni del suo prezzo incidono infatti su una vasta gamma di operatori economici, tra cui compagnie petrolifere, imprese di trasporto aereo e marittimo, utility e Stati fortemente dipendenti dalle entrate derivanti dall'esportazione di greggio. L'esigenza di gestire tale esposizione ha favorito lo sviluppo di un mercato dei derivati estremamente liquido, oggi tra i più importanti e dinamici a livello internazionale.

1.1.2 Domanda e offerta

Dal lato della domanda, secondo le stime dell'*Energy Information Administration (EIA*), il consumo mondiale di combustibili liquidi si attesta intorno ai 104 milioni di barili al giorno nel 2025, con previsioni pari a 102,8 milioni nel 2026 e 104,8 milioni nel 2027[1].
Negli ultimi vent'anni, la crescita della domanda è stata trainata quasi esclusivamente dalle economie emergenti dell'Asia, mentre nei Paesi appartenenti all'OCSE i consumi hanno mostrato un andamento sostanzialmente stabile o lievemente decrescente.
I principali impieghi del petrolio riguardano il settore dei trasporti, che rappresenta la componente dominante della domanda, e l'industria petrolchimica, il cui peso è progressivamente aumentato nel tempo. I due comparti presentano tuttavia prospettive differenti

[1]EIA, *Short-Term Energy Outlook*, luglio 2026, tabella 3a.https://www.eia.gov/outlooks/steo/

nel lungo periodo: da un lato, la diffusione della mobilità elettrica e i continui miglioramenti nell'efficienza energetica tendono a ridurre la crescita della domanda di carburanti; dall'altro, la richiesta di prodotti petrolchimici appare destinata a mantenersi più sostenuta e resiliente.

Anche l'offerta mondiale presenta una struttura eterogenea. Una parte della produzione proviene da Paesi che operano secondo logiche prevalentemente concorrenziali, tra cui Stati Uniti, Brasile, Canada, Guyana e Norvegia; un'altra è invece influenzata dalle decisioni coordinate dell'alleanza OPEC+, che riunisce i membri dell'OPEC e alcuni importanti produttori esterni. Le proiezioni elaborate dall'EIA indicano che nel 2027 la produzione dei Paesi OPEC dovrebbe attestarsi intorno ai 29,9 milioni di barili al giorno, mentre quella dei produttori non appartenenti all'organizzazione raggiungerebbe circa 79,9 milioni di barili giornalieri[2].

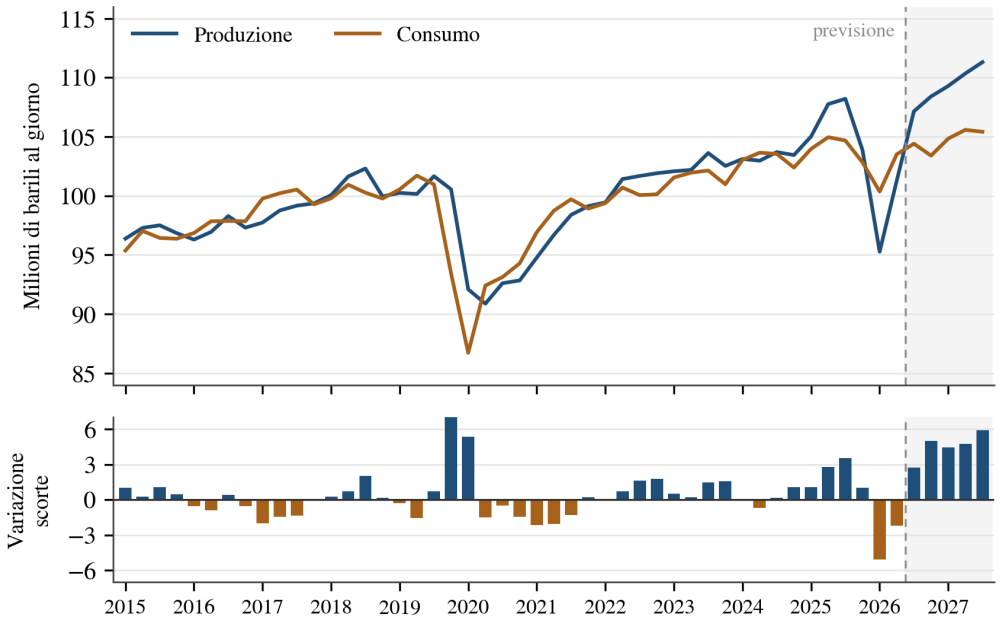

Figura 1.1: Bilancio mondiale dei combustibili liquidi. Il pannello superiore riporta produzione e consumo mondiali, quello inferiore la variazione implicita delle scorte. Dati trimestrali 2015–2027 in milioni di barili al giorno; l'area ombreggiata indica il periodo di previsione. *Fonte: U.S. Energy Information Administration.*

Una delle caratteristiche economiche più rilevanti del mercato petrolifero è rappresentata dalla ridotta elasticità di domanda e offerta nel breve periodo (Baumeister e Kilian 2016). Dal lato della domanda, infatti, il consumo di combustibili dipende da uno stock di capitale costituito da veicoli, impianti industriali e sistemi di riscaldamento, il cui adeguamento richiede tempi relativamente lunghi. Sul versante dell'offerta, invece, la produzione convenzionale è caratterizzata da elevati costi fissi e dall'irreversibilità degli investimenti

[2]EIA, *Short-Term Energy Outlook*, luglio 2026, tabella 3a.

(Pindyck 1991). Anche la produzione di shale oil, pur essendo più flessibile rispetto a quella tradizionale, necessita comunque di diversi mesi per adeguarsi alle variazioni delle condizioni di mercato.
La limitata capacità di domanda e offerta di reagire rapidamente agli shock implica che gli squilibri del mercato vengano assorbiti prevalentemente attraverso variazioni dei prezzi piuttosto che delle quantità scambiate (Caldara, Cavallo e Iacoviello 2019). Questo meccanismo rappresenta una delle principali spiegazioni dell'elevata volatilità che caratterizza il mercato petrolifero, dove anche modeste variazioni nei fondamentali possono tradursi in oscillazioni di prezzo particolarmente accentuate.

1.1.3 I benchmark: Brent e WTI

Il petrolio greggio non costituisce un bene omogeneo, bensì un insieme di miscele di idrocarburi che si distinguono principalmente per due caratteristiche: la densità, espressa attraverso la gravità API[3], e il contenuto di zolfo, in base al quale i greggi vengono classificati in sweet, a basso tenore di zolfo, e sour. I greggi leggeri e dolci richiedono processi di raffinazione meno onerosi e consentono di ottenere una maggiore quantità di prodotti ad alto valore aggiunto, come benzina, diesel e cherosene; per questo motivo sono generalmente scambiati a prezzi superiori rispetto alle qualità più pesanti e solforose. Di conseguenza, non esiste un unico prezzo del petrolio, ma una pluralità di quotazioni che fanno riferimento a pochi benchmark internazionali sui quali si concentra la maggior parte degli scambi.
I principali punti di riferimento del mercato sono il West Texas Intermediate (WTI) e il Brent, ai quali si affianca il benchmark Dubai/Oman, utilizzato prevalentemente per il commercio di greggio destinato ai mercati asiatici.
La quasi totalità dei contratti futures e delle opzioni sul petrolio negoziati nei mercati regolamentati ha come sottostante uno di questi due benchmark. Di conseguenza, Brent e WTI costituiscono i principali riferimenti anche per la valutazione dei derivati energetici e rappresentano il punto di partenza per gran parte della letteratura finanziaria sul crude oil.

Il WTI è un greggio leggero e sweet estratto negli Stati Uniti. La peculiarità di questo benchmark risiede nel fatto che il contratto futures di riferimento prevede la consegna fisica presso Cushing, in Oklahoma, un importante hub logistico che, secondo la documentazione del CME Group, è collegato a circa ventiquattro oleodotti e quindici impianti

[3]La gravità API è una scala di densità relativa definita dall'American Petroleum Institute: valori superiori corrispondono a greggi più leggeri. Convenzionalmente si definiscono leggeri i greggi con gravità superiore a 31,1 gradi e pesanti quelli al di sotto di 22,3.

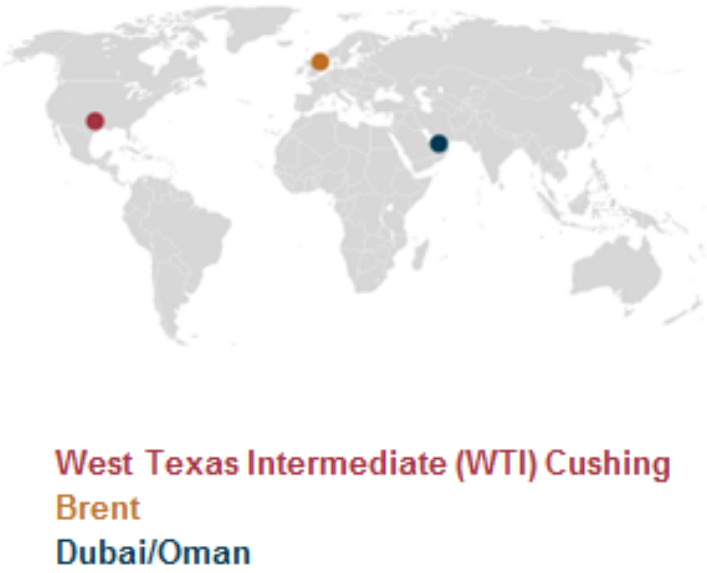

Figura 1.2: Collocazione geografica dei tre principali benchmark del greggio. *Fonte: U.S. Energy Information Administration.*

di stoccaggio[4]. Cushing svolge quindi un ruolo centrale nella raccolta, nello stoccaggio e nella distribuzione del greggio prodotto negli Stati Uniti, pur essendo caratterizzato da una capacità di immagazzinamento necessariamente limitata.
Il Brent rappresenta invece un benchmark waterborne, basato sulla produzione di un paniere di giacimenti del Mare del Nord, identificato con l'acronimo BFOET e ampliato negli ultimi anni con l'inclusione del WTI Midland. A differenza del WTI, il suo sistema di determinazione del prezzo si fonda su differenziali monetari e beneficia del collegamento con un mercato fisico trasportabile via mare, caratteristica che lo rende meno vulnerabile a vincoli logistici locali. Per questa ragione il Brent costituisce oggi il principale riferimento per la determinazione del prezzo della maggior parte del petrolio commercializzato a livello mondiale.
Il differenziale di prezzo tra Brent e WTI non è fisso, ma varia nel tempo in funzione di diversi fattori, tra cui i costi di trasporto, l'andamento delle esportazioni statunitensi e l'eventuale insorgenza di criticità logistiche che interessino uno dei due mercati di riferimento.

1.1.4 Principali aree produttive

La produzione mondiale di petrolio è fortemente concentrata in un numero relativamente ristretto di aree geografiche, ciascuna caratterizzata da specifiche peculiarità economiche

[4]CME Group, *The Importance of Cushing, Oklahoma.* https://www.cmegroup.com/education/courses/introduction-to-crude-oil/product-overview/the-importance-of-cushing-oklahoma.html

e strategiche.

Il Medio Oriente rappresenta tuttora il principale polo produttivo a livello globale, sia in termini di volumi estratti sia di riserve accertate. Arabia Saudita, Iraq, Emirati Arabi Uniti, Kuwait e Iran figurano tra i maggiori produttori mondiali e detengono la maggior parte della capacità produttiva inutilizzata (spare capacity), ossia la quota di produzione che può essere attivata in tempi relativamente brevi per compensare eventuali interruzioni dell'offerta. Tale capacità costituisce uno degli strumenti più importanti per garantire la stabilità del mercato petrolifero internazionale.

Negli ultimi quindici anni il Nord America ha assunto un ruolo sempre più centrale grazie alla diffusione delle tecniche di estrazione da giacimenti non convenzionali. Lo sviluppo dello shale oil ha consentito agli Stati Uniti di diventare il primo produttore mondiale di petrolio. Rispetto alla produzione convenzionale, il tight oil è caratterizzato da tempi di investimento e sviluppo più contenuti, che rendono l'offerta maggiormente reattiva alle variazioni del prezzo del greggio.

Anche la Russia occupa tradizionalmente una posizione di primo piano nel panorama petrolifero mondiale. Oltre a essere tra i maggiori produttori, rappresenta il principale partner esterno dell'OPEC nell'ambito dell'alleanza OPEC+. A partire dal 2022, tuttavia, le sanzioni internazionali hanno determinato un significativo riassetto delle rotte commerciali e dei mercati di destinazione delle esportazioni russe.

Tra le altre aree di rilievo figurano l'America Latina, dove Brasile e Guyana hanno registrato una rapida crescita della produzione, mentre il Venezuela continua a perdere importanza rispetto al passato; l'Africa, con numerosi produttori concentrati soprattutto nelle regioni occidentale e settentrionale; e il Mare del Nord, il cui livello produttivo è progressivamente diminuito pur mantenendo un ruolo strategico grazie alla presenza dei giacimenti che costituiscono il benchmark Brent.

Dal punto di vista logistico, il commercio internazionale di petrolio dipende inoltre da alcuni passaggi marittimi di fondamentale importanza. Tra questi, lo Stretto di Hormuz rappresenta il passaggio più critico: non per il volume in transito, superato da quello dello Stretto di Malacca, bensì perché le uniche vie di aggiramento sono costituite da un numero limitato di oleodotti, la cui capacità copre una frazione modesta dei flussi. A esso si aggiungono altri snodi strategici, quali il Canale di Suez e il Bab el-Mandeb.

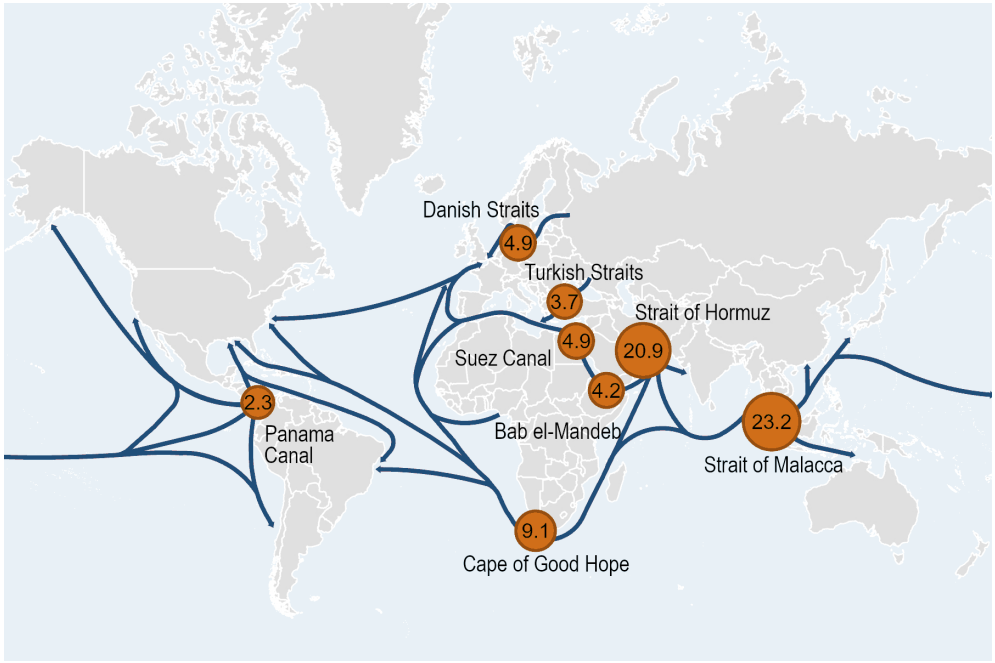

Figura 1.3: Volumi giornalieri di greggio e prodotti petroliferi in transito attraverso i principali chokepoint marittimi, milioni di barili al giorno. *Fonte: U.S. Energy Information Administration.*

La concentrazione di una quota significativa dei flussi petroliferi in pochi corridoi marittimi costituisce una delle principali vulnerabilità strutturali del mercato globale del greggio e spiega perché eventi geopolitici localizzati possano produrre ripercussioni significative sui prezzi internazionali.

1.2 La formazione del prezzo del petrolio

L'obiettivo di questa sezione è analizzare i principali fattori che influenzano la formazione del prezzo del greggio. Sebbene vengano esaminati separatamente, nella realtà essi agiscono contemporaneamente e su orizzonti temporali molto diversi. Alcuni producono effetti che si sviluppano nell'arco di anni, come gli investimenti in capacità produttiva, mentre altri incidono sui prezzi nel giro di pochi minuti, ad esempio in seguito alla pubblicazione di dati economici o ad annunci inattesi. È proprio l'interazione tra questi fattori a determinare la complessità e l'irregolarità dell'evoluzione dei prezzi del petrolio.

1.2.1 La domanda mondiale

La domanda di petrolio è una domanda derivata, strettamente connessa al livello dell'attività economica e ai bisogni di mobilità. Per questo motivo presenta un andamento fortemente pro-ciclico: nelle fasi di espansione economica tende ad aumentare, mentre

rallenta durante le fasi recessive. In condizioni ordinarie la sua evoluzione risulta relativamente prevedibile, poiché riflette la crescita dell'economia mondiale; le variazioni più significative si osservano invece in corrispondenza dei cambi di fase del ciclo economico o di eventi eccezionali che modificano improvvisamente i livelli di mobilità e di consumo. Un esempio emblematico è rappresentato dalla crisi sanitaria del 2020. Le restrizioni introdotte per contenere la diffusione della pandemia determinarono un crollo della domanda di petrolio senza precedenti in tempo di pace, verificatosi in un intervallo temporale troppo breve perché il lato dell'offerta potesse adattarsi efficacemente alle nuove condizioni di mercato.

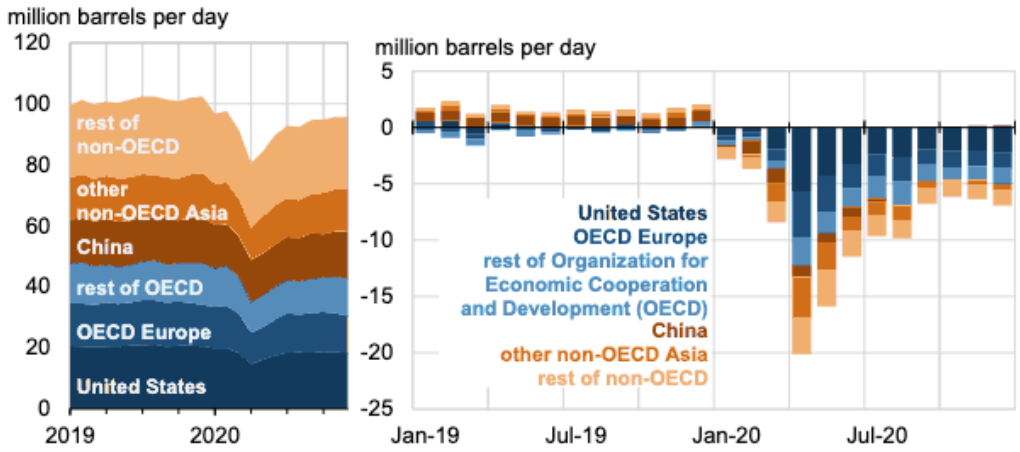

Figura 1.4: Consumo mondiale mensile di combustibili liquidi e variazione rispetto allo stesso mese dell'anno precedente, gennaio 2019 – dicembre 2020, milioni di barili al giorno. *Fonte: U.S. Energy Information Administration.*

Alle incertezze di breve periodo si affiancano inoltre quelle di natura strutturale, legate al processo di transizione energetica. Le principali istituzioni internazionali formulano infatti scenari differenti sull'evoluzione futura della domanda di petrolio, riflettendo il diverso grado di diffusione atteso delle fonti energetiche alternative e delle nuove tecnologie. Tali aspettative influenzano le decisioni di investimento nel settore petrolifero e, pur manifestando i propri effetti solo nel lungo periodo, contribuiscono a determinare l'evoluzione futura dei prezzi.

1.2.2 OPEC+ e il coordinamento dell'offerta

Una parte rilevante dell'offerta mondiale di petrolio non è il risultato delle sole dinamiche concorrenziali del mercato, ma dipende dalle decisioni coordinate dei principali Paesi produttori. Fondata nel 1960, l'Organizzazione dei Paesi Esportatori di Petrolio (OPEC) ha ampliato il proprio raggio d'azione nel 2016 attraverso un accordo con alcuni produttori non appartenenti all'organizzazione, tra cui la Russia, dando origine all'alleanza oggi nota

come OPEC+.
L'attività dell'alleanza si basa principalmente sulla definizione di quote di produzione assegnate ai singoli Paesi membri, periodicamente riviste durante riunioni programmate. L'efficacia di questo sistema dipende tuttavia da fattori che non sempre risultano pienamente controllabili. Da un lato è necessario che i Paesi aderenti rispettino le quote concordate, nonostante il naturale incentivo ad aumentare la produzione per beneficiare di prezzi elevati; dall'altro, le riduzioni dell'offerta possono essere compensate dall'espansione produttiva dei Paesi non appartenenti all'alleanza, limitandone l'impatto sul mercato.
Gli sviluppi degli ultimi anni mostrano chiaramente questa dinamica. Tra il 2014 e il 2016 l'OPEC decise di mantenere elevati i livelli produttivi, accettando un marcato calo delle quotazioni con l'obiettivo di rallentare l'espansione della produzione statunitense da shale oil. Nel 2020, al contrario, il drastico crollo della domanda provocato dalla pandemia portò l'OPEC+ ad approvare i più consistenti tagli alla produzione mai concordati fino a quel momento. Negli anni successivi la politica dell'alleanza è stata caratterizzata da una continua alternanza tra riduzioni volontarie dell'offerta e graduali aumenti delle quote produttive.
Dal punto di vista della formazione dei prezzi, la presenza di un soggetto in grado di coordinare una parte significativa dell'offerta mondiale rappresenta un elemento peculiare del mercato petrolifero. Le decisioni dell'OPEC+ vengono assunte in date prestabilite, ma il loro contenuto rimane incerto fino alla conclusione delle riunioni, concentrando la reazione del mercato in un arco temporale molto ristretto. Di conseguenza, le quotazioni del greggio tendono a registrare variazioni improvvise in corrispondenza di questi appuntamenti, riflettendo l'incertezza sulle decisioni adottate e sulle aspettative degli operatori.

1.2.3 Geopolitica, conflitti e sanzioni

La forte concentrazione geografica della produzione e delle principali rotte commerciali rende il mercato petrolifero particolarmente esposto agli eventi geopolitici. Conflitti, tensioni internazionali e sanzioni economiche possono infatti influenzare il prezzo del greggio attraverso due principali canali di trasmissione.
Il primo è rappresentato dalla riduzione effettiva dell'offerta. Un conflitto che coinvolga aree produttive o infrastrutture strategiche, oppure che ostacoli il transito del petrolio attraverso uno dei principali *chokepoint* marittimi, determina una diminuzione della quantità di greggio disponibile sul mercato, esercitando una pressione al rialzo sui prezzi.
Il secondo canale è più indiretto, ma spesso ancora più rilevante. Quando aumenta la probabilità di future interruzioni dell'offerta, imprese e operatori di mercato tendono ad accrescere le proprie scorte per ragioni precauzionali. In questo modo il prezzo del petro-

lio incorpora un premio per il rischio legato all'incertezza geopolitica, ancora prima che si verifichino reali riduzioni della produzione o dei flussi commerciali. Trattandosi di un premio strettamente connesso alle aspettative, esso tende a ridursi rapidamente quando le tensioni si attenuano.
Le sanzioni economiche incidono sul mercato attraverso un meccanismo parzialmente diverso. Nella maggior parte dei casi non determinano una riduzione della produzione mondiale, ma modificano la destinazione dei flussi commerciali, rendendo necessarie rotte più lunghe, aumentando i costi di trasporto e di intermediazione e contribuendo alla formazione di differenziali di prezzo tra i principali benchmark petroliferi. L'esperienza successiva al 2022 ha mostrato come il mercato sia stato in grado di adattarsi riorientando gran parte delle esportazioni russe verso i Paesi asiatici. Tuttavia, questo processo di riallocazione non è immediato e, durante la fase di transizione, può determinare una marcata volatilità delle quotazioni.
Un esempio recente è rappresentato dalla crisi dello Stretto di Hormuz del 2026. Secondo l'*Energy Information Administration (EIA)*[5], il traffico marittimo attraverso lo Stretto è rimasto fortemente compromesso dal 28 febbraio fino alla firma del memorandum d'intesa tra Stati Uniti e Iran, avvenuta il 18 giugno 2026. Durante questo periodo le interruzioni della produzione hanno raggiunto un massimo di 11,2 milioni di barili al giorno nel mese di maggio, per poi ridursi a una media di 8,3 milioni di barili giornalieri nel mese successivo. L'EIA evidenzia inoltre come la capacità del mercato di riorganizzare rapidamente i flussi commerciali e di contenere la domanda abbia superato le aspettative formulate nelle precedenti previsioni, contribuendo a un progressivo riequilibrio del mercato.

1.2.4 Le scorte

Le scorte rappresentano il principale collegamento tra il mercato fisico del petrolio e le aspettative degli operatori. Poiché il greggio può essere immagazzinato, la scelta tra venderlo immediatamente o conservarlo dipende dal confronto tra il prezzo corrente, le aspettative sui prezzi futuri e i costi associati allo stoccaggio. Di conseguenza, il livello delle scorte riflette l'equilibrio tra le condizioni del mercato fisico e le aspettative sull'evoluzione futura dei prezzi.
La teoria dello storage (Kaldor 1939; Working 1949) descrive questa relazione attraverso il concetto di convenience yield, ossia il beneficio implicito derivante dal possesso fisico della commodity rispetto alla semplice detenzione di un contratto a termine. Tale beneficio si manifesta principalmente nella maggiore flessibilità operativa e nella possibilità di fronteggiare eventuali interruzioni dell'approvvigionamento.

[5]EIA, *Short-Term Energy Outlook*, luglio 2026.

Il valore del convenience yield non è costante, ma varia in funzione del livello delle scorte disponibili. Quando gli stock sono elevati, il rischio di carenza è contenuto e il beneficio associato al possesso fisico del greggio risulta modesto. Al contrario, in presenza di scorte limitate, il convenience yield aumenta rapidamente, poiché la disponibilità immediata della materia prima assume un valore maggiore. Questa relazione spiega perché uno stesso shock dell'offerta possa produrre effetti molto diversi sui prezzi a seconda delle condizioni del mercato fisico. Gibson e Schwartz (1990) e Schwartz (1997) sono stati tra i primi a modellizzare formalmente il convenience yield come una variabile aleatoria.
L'importanza delle scorte è stata evidenziata anche da Kilian e Murphy (2014), i quali mostrano come esse svolgano un ruolo fondamentale nella trasmissione degli shock petroliferi e nell'identificazione della loro origine. Tra gli indicatori più osservati dagli operatori rientrano i dati sulle scorte pubblicati dall'*Energy Information Administration (EIA)*, sia attraverso il *Weekly Petroleum Status Report*, che fornisce le variazioni settimanali delle scorte statunitensi, sia attraverso lo *Short-Term Energy Outlook*, che offre una visione più ampia dell'evoluzione delle scorte nei Paesi OCSE. Il rapporto fornisce informazioni sull'evoluzione delle scorte commerciali di petrolio negli Stati Uniti e rappresenta uno dei principali appuntamenti informativi per il mercato, in grado di influenzare le aspettative e, di conseguenza, le quotazioni del greggio.

1.2.5 Il quadro macroeconomico e finanziario

I fattori analizzati finora influenzano il mercato petrolifero attraverso le dinamiche di domanda, offerta e stoccaggio. A questi si affianca un secondo insieme di determinanti, di natura macroeconomica e finanziaria, legati all'andamento dell'economia mondiale e alle principali variabili dei mercati finanziari.
Un contributo fondamentale per comprendere la formazione del prezzo del petrolio è quello di Kilian (2009), che mostra come le variazioni del prezzo reale del greggio possano derivare da tre diverse tipologie di shock: shock dell'offerta, shock della domanda globale di materie prime industriali e shock di domanda specifici del mercato petrolifero. Ciascuno di questi genera effetti differenti sia sul prezzo del greggio sia sulle principali variabili macroeconomiche. La distinzione non è soltanto teorica: un aumento del prezzo determinato dalla crescita dell'economia mondiale produce conseguenze molto diverse, in termini di persistenza e impatto macroeconomico, rispetto a un incremento causato da un'interruzione dell'offerta o da un aumento della domanda precauzionale. Limitarsi a osservare la variazione del prezzo senza considerarne la causa può quindi condurre a interpretazioni fuorvianti.
Oltre al ciclo economico, anche alcune variabili finanziarie esercitano un'influenza significativa sul prezzo del greggio. La prima è il dollaro statunitense, valuta nella quale il petrolio è quotato. Un deprezzamento del dollaro rende il greggio relativamente meno

costoso per gli importatori che operano in altre valute, sostenendone la domanda e contribuendo a un aumento del prezzo espresso in dollari. A ciò si aggiunge un secondo canale, legato al potere d'acquisto dei Paesi esportatori, i cui ricavi sono denominati in dollari mentre una parte delle spese è sostenuta in altre valute. Esiste inoltre un rapporto di causalità inversa: variazioni significative del prezzo del petrolio possono modificare i saldi commerciali dei Paesi coinvolti e influenzare, di conseguenza, l'andamento dei tassi di cambio. Sebbene la correlazione negativa tra il dollaro e il prezzo del greggio rappresenti un'evidenza empirica consolidata, essa non è costante nel tempo e tende ad attenuarsi quando il mercato è dominato da shock dell'offerta, nei quali le dinamiche geopolitiche prevalgono su quelle finanziarie.
Anche i tassi d'interesse incidono sull'evoluzione del prezzo del petrolio attraverso diversi canali. In primo luogo, influenzano il costo di mantenimento delle scorte: un aumento dei tassi rende più costoso immobilizzare capitale in inventario, riducendo l'incentivo a detenere elevati livelli di stock. Un secondo canale riguarda le decisioni di estrazione, poiché tassi più elevati aumentano il valore attuale dei ricavi ottenibili nel breve periodo rispetto a quelli futuri. Infine, i tassi incidono indirettamente sul mercato petrolifero attraverso i loro effetti sull'attività economica e, quindi, sulla domanda di energia.

1.3 Il mercato dei derivati sul crude oil

Le caratteristiche del mercato fisico descritte nelle sezioni precedenti, come l'elevata volatilità del prezzo del greggio, l'ampia esposizione degli operatori alle sue oscillazioni e la conseguente necessità di gestire tale rischio, trovano espressione in uno dei mercati dei derivati più liquidi al mondo. Questa sezione ne presenta i principali strumenti, distinguendo tra i contratti negoziati sui mercati regolamentati e quelli scambiati over-the-counter, e descrive le principali categorie di operatori che ne sostengono il funzionamento.

1.3.1 I futures

Il contratto futures rappresenta lo strumento di riferimento del mercato finanziario del petrolio. Attraverso questo contratto, due controparti si impegnano a scambiare una determinata quantità di greggio, con caratteristiche qualitative e luogo di consegna prestabiliti, a una data futura e a un prezzo concordato al momento della stipula.
Il principale contratto futures sul WTI è il Light Sweet Crude Oil Futures, negoziato al NYMEX, parte del gruppo CME, e identificato dal ticker CL. Secondo le specifiche del

CME Group[6], ciascun contratto ha una dimensione di 1.000 barili, un tick[7] minimo pari a un centesimo di dollaro ed è negoziato quasi ininterrottamente dal lunedì al venerdì. Si tratta del contratto sul petrolio con i maggiori volumi di scambio a livello mondiale, che superano regolarmente il milione di contratti giornalieri. Il principale riferimento europeo è invece il Brent Crude Futures, quotato presso ICE Futures Europe.
Una delle principali differenze tra i due contratti riguarda il meccanismo di regolamento. Il futures sul WTI prevede la consegna fisica del greggio presso l'hub di Cushing, in Oklahoma. Chi mantiene una posizione aperta fino alla scadenza è quindi tenuto a effettuare o ricevere la consegna della commodity, un meccanismo che contribuisce a mantenere allineato il prezzo del futures con quello del mercato fisico. Il contratto sul Brent segue invece una struttura differente: pur essendo formalmente consegnabile attraverso il meccanismo di *Exchange of Futures for Physical (EFP)*[8], nella pratica il regolamento avviene prevalentemente per differenziali monetari rispetto all'ICE Brent Index. Per questo motivo il Brent viene comunemente considerato un contratto regolato in contanti (*cash-settled*).
L'insieme dei contratti futures con differenti date di scadenza costituisce la cosiddetta curva dei futures (*forward curve*), che può estendersi su diversi anni, anche se la maggior parte della liquidità si concentra sulle prime scadenze. La forma della curva fornisce importanti indicazioni sulle condizioni del mercato petrolifero. Si parla di *contango* quando i prezzi dei futures aumentano all'aumentare della scadenza, una configurazione generalmente associata a un'elevata disponibilità di scorte; al contrario, si parla di *backwardation* quando i prezzi delle scadenze più vicine risultano superiori a quelli delle scadenze più lontane, situazione tipicamente riconducibile a condizioni di scarsità dell'offerta. Oltre a consentire il trasferimento del rischio tra gli operatori, il mercato dei futures svolge anche un ruolo essenziale nel processo di price discovery, contribuendo alla formazione delle aspettative sul prezzo futuro del greggio.

1.3.2 Le opzioni

Sui contratti futures sono negoziate anche opzioni, prevalentemente di stile americano presso il CME e di stile europeo presso l'ICE. Tali strumenti attribuiscono all'acquirente il diritto, ma non l'obbligo, di assumere una posizione nel contratto futures sottostante a un prezzo prefissato entro, o alla data di, scadenza, a seconda dello stile dell'opzione.
La principale differenza economica rispetto ai futures risiede nell'asimmetria del profilo

[6]CME Group, *Crude Oil Futures Contract Specs*. https://www.cmegroup.com/markets/energy/crude-oil/light-sweet-crude.contractSpecs.html

[7]Il tick rappresenta la minima variazione di prezzo ammessa dal contratto. Poiché ciascun contratto ha per oggetto mille barili, una variazione di un centesimo per barile corrisponde a dieci dollari per contratto.

[8]Il meccanismo consente alle controparti di sostituire una posizione in futures con una transazione sul mercato fisico, a condizioni negoziate bilateralmente.

di rischio. Mentre un contratto futures consente di fissare il prezzo futuro della commodity, eliminando sia il rischio sia la possibilità di beneficiare di movimenti favorevoli del mercato, un'opzione offre una protezione unilaterale. In cambio del pagamento di un premio iniziale, l'acquirente può infatti limitare le perdite derivanti da movimenti sfavorevoli del prezzo, mantenendo al contempo la possibilità di trarre vantaggio da eventuali variazioni favorevoli. Per un operatore industriale, la scelta tra futures e opzioni dipende quindi dal livello di copertura desiderato e dalla disponibilità a sostenere il costo iniziale rappresentato dal premio.
Le opzioni sul greggio sono negoziate su un ampio insieme di prezzi di esercizio e scadenze e presentano, soprattutto per i benchmark Brent e WTI, un'elevata liquidità. Le informazioni contenute nei prezzi di tali contratti consentono inoltre di ricavare indicazioni sulle aspettative del mercato riguardo all'evoluzione futura del prezzo del petrolio e della sua volatilità.

1.3.3 Il mercato over-the-counter

Accanto ai mercati regolamentati opera il mercato over-the-counter (OTC), nel quale i contratti vengono negoziati direttamente tra le controparti e possono essere personalizzati in funzione delle specifiche esigenze degli operatori. In questo segmento trovano spazio strumenti non standardizzati, come swap, opzioni con payoff complessi e contratti caratterizzati da particolari clausole condizionali.
L'esistenza del mercato OTC risponde all'esigenza di coprire esposizioni che difficilmente possono essere replicate attraverso i contratti standardizzati negoziati in borsa. Nella maggior parte dei casi, infatti, il rischio degli operatori industriali non è legato al prezzo del petrolio in un preciso istante, bensì al prezzo medio registrato in un determinato intervallo temporale. Una compagnia aerea, ad esempio, acquista carburante in modo continuativo nel corso dell'anno e non in un'unica data. Per questo motivo, nel mercato OTC delle commodity sono particolarmente diffuse le opzioni asiatiche, il cui payoff dipende dal valore medio assunto dal sottostante durante un periodo di osservazione.
Un'ulteriore motivazione è rappresentata dal costo della copertura. Il premio richiesto per un'opzione standard può risultare elevato e spingere gli operatori a ricorrere a strutture alternative che consentano di ridurre il costo iniziale, accettando una protezione limitata a determinati scenari di mercato. Gran parte dell'innovazione finanziaria sviluppatasi nel mercato OTC nasce proprio dall'esigenza di costruire strumenti di copertura maggiormente aderenti alle necessità dei clienti.
Dal punto di vista dimensionale, il mercato OTC dei derivati sulle commodity rappresenta una quota relativamente contenuta rispetto ai comparti dei derivati su tassi d'interesse e valute. Secondo le statistiche della *Bank for International Settlements (BIS)*, il valore nozionale complessivo dei derivati OTC ammontava a circa 846 mila miliardi di dollari nel

giugno 2025, mentre la componente riconducibile alle commodity rappresentava soltanto una parte residuale del totale. Nonostante ciò, è proprio nel mercato OTC che si concentra la maggiore varietà di strutture contrattuali e dove vengono sviluppate le soluzioni più innovative per la gestione del rischio.

1.3.4 Hedger e speculatori

Il mercato dei derivati sul petrolio nasce dall'incontro tra operatori che presentano esigenze opposte rispetto al rischio di prezzo. Da un lato vi sono soggetti che desiderano ridurre la propria esposizione alle oscillazioni del mercato, dall'altro, operatori disposti ad assumere tale rischio in cambio di un potenziale rendimento. L'interazione tra queste due categorie costituisce il presupposto economico del funzionamento dei mercati derivati.
Gli hedger sono operatori che presentano un'esposizione al mercato fisico del petrolio e utilizzano gli strumenti derivati per limitare la variabilità dei propri flussi di cassa. Tra questi rientrano, dal lato dell'offerta, i produttori di greggio, che ricorrono ai derivati per stabilizzare i ricavi derivanti dalla vendita della produzione. In particolare, per molti produttori indipendenti statunitensi l'adozione di strategie di copertura rappresenta spesso una condizione richiesta dagli istituti finanziari che ne sostengono gli investimenti. Dal lato della domanda si collocano invece raffinatori, compagnie aeree, imprese di trasporto e altri grandi consumatori industriali, che utilizzano futures e opzioni per proteggersi dal rischio di un aumento dei prezzi. Vi sono infine gli operatori dello stoccaggio e del trading fisico, la cui esposizione riguarda principalmente gli spread tra diverse scadenze o qualità di greggio piuttosto che il livello assoluto del prezzo. L'obiettivo comune di questi soggetti non è conseguire un profitto dall'operazione finanziaria, bensì ridurre il rischio complessivo associato alla propria attività.
Gli speculatori, al contrario, assumono posizioni sul mercato dei derivati senza detenere un'esposizione diretta al mercato fisico. Sebbene il termine sia spesso associato a un'accezione negativa nel dibattito pubblico, essi svolgono una funzione essenziale per il corretto funzionamento del mercato, fornendo la controparte agli hedger e assumendo il rischio che questi ultimi intendono trasferire. La loro attività contribuisce inoltre ad accrescere la liquidità del mercato e a favorire il processo di formazione dei prezzi. In assenza degli speculatori, infatti, la copertura sarebbe possibile soltanto qualora esistessero hedger con esposizioni perfettamente opposte e contemporanee, una condizione che nella pratica si verifica solo raramente.
In definitiva, il mercato dei derivati sul petrolio può funzionare efficacemente solo grazie alla presenza simultanea di hedger e speculatori. I primi generano la domanda di strumenti di copertura, mentre i secondi forniscono la capacità di assorbire il rischio trasferito. È proprio da questa interazione che nasce l'esigenza di sviluppare strumenti derivati sempre

più flessibili e specializzati, tra cui le opzioni esotiche che saranno analizzate nei capitoli successivi (Cheng e Xiong 2014; Tang e Xiong 2012).

1.4 Caratteristiche del prezzo del petrolio

Questa sezione descrive le principali proprietà empiriche osservabili nelle serie storiche dei prezzi del petrolio. L'obiettivo è mettere in evidenza le caratteristiche che emergono dall'analisi dei dati, rimandando ai capitoli successivi la trattazione dei modelli utilizzati per rappresentarle formalmente.

1.4.1 Volatilità elevata

La prima caratteristica distintiva riguarda il livello della volatilità. La volatilità annualizzata dei rendimenti logaritmici del WTI e del Brent si mantiene generalmente su valori superiori a quelli osservati nei principali indici azionari. In condizioni di mercato ordinarie essa oscilla indicativamente tra il 25% e il 40%, mentre durante le fasi di maggiore instabilità può superare abbondantemente il 100%.

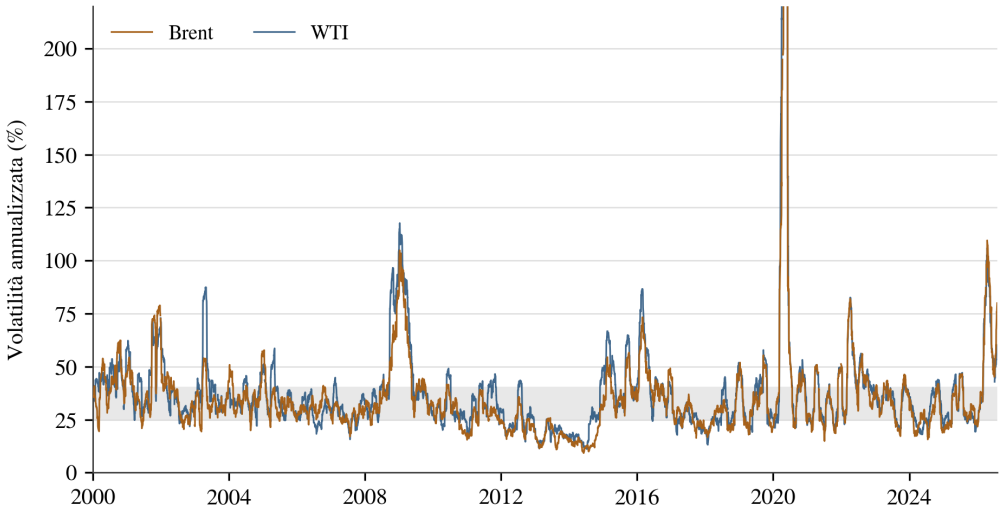

Figura 1.5: Volatilità realizzata annualizzata dei rendimenti logaritmici giornalieri di WTI e Brent, calcolata su finestra mobile di trenta giorni di negoziazione, 2000–2026. La banda grigia individua l'intervallo compreso tra il 25% e il 40%. *Fonte: U.S. Energy Information Administration.*

Questo comportamento è coerente con quanto discusso precedentemente riguardo alla limitata elasticità di domanda e offerta nel breve periodo. Se il riequilibrio del mercato avviene prevalentemente attraverso variazioni di prezzo, è naturale che le oscillazioni delle quotazioni risultino particolarmente ampie.

1.4.2 Volatility clustering

Una seconda caratteristica riguarda l'evoluzione temporale della volatilità. Essa non rimane costante, ma tende a manifestare una marcata persistenza: periodi caratterizzati da elevata volatilità sono spesso seguiti da ulteriori periodi turbolenti, mentre fasi di relativa stabilità tendono a protrarsi nel tempo. Questo fenomeno è noto in letteratura come volatility clustering ed è facilmente osservabile anche da un semplice grafico dei rendimenti giornalieri.

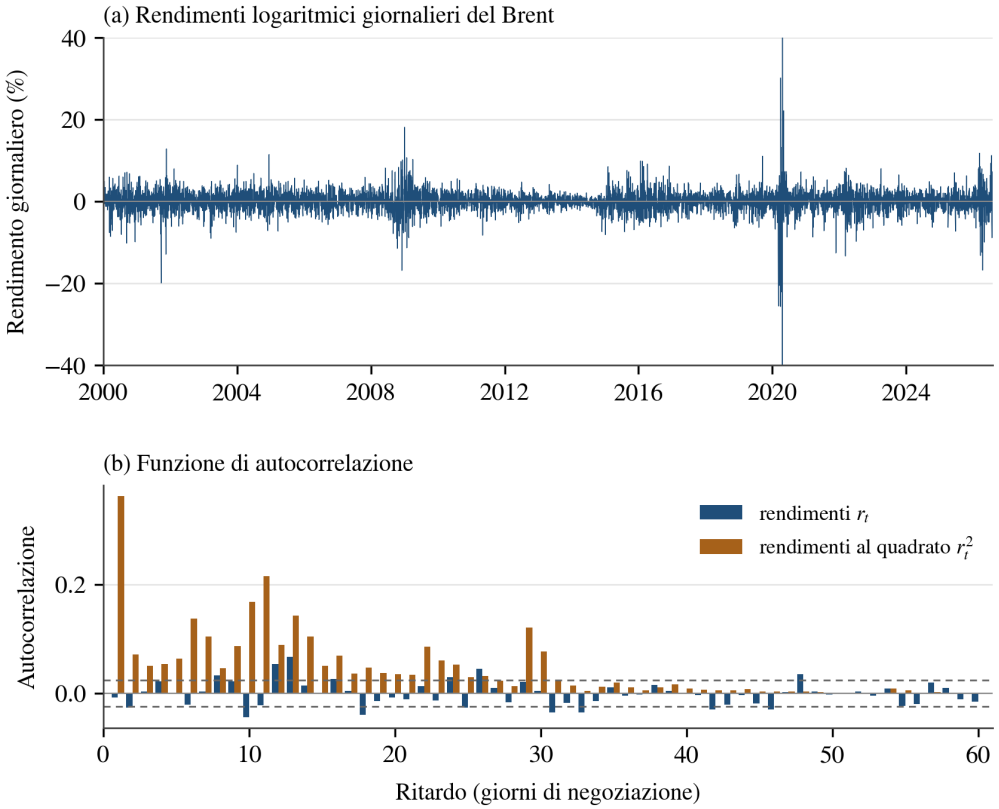

Figura 1.6: Volatility clustering nel mercato del greggio, 2000–2026. Il pannello (a) riporta i rendimenti logaritmici giornalieri del Brent; il pannello (b) confronta la funzione di autocorrelazione dei rendimenti con quella dei rendimenti al quadrato, con bande di confidenza al 95%. *Fonte: U.S. Energy Information Administration.*

Si tratta di una proprietà comune a numerose serie finanziarie, descritta dai modelli ARCH e GARCH [9] (Engle 1982; Bollerslev 1986). Nel mercato petrolifero, tuttavia, essa risulta particolarmente accentuata, poiché i diversi regimi di volatilità appaiono ben distinguibili. Per questo motivo alcuni autori hanno proposto modelli che prevedono esplicitamente il passaggio tra differenti regimi di volatilità (Vo 2009).

[9] Gli acronimi designano rispettivamente i modelli *autoregressive conditional heteroskedasticity* e la loro estensione *generalized*. In entrambi i casi la varianza condizionale del rendimento è specificata come funzione dei valori passati, così da riprodurre la persistenza osservata nei dati.

1.4.3 Salti improvvisi

Un'ulteriore caratteristica del mercato petrolifero è la frequente presenza di variazioni di prezzo molto ampie concentrate in intervalli di tempo estremamente ridotti. Diversamente da quanto accade in un processo di aggiustamento graduale, il prezzo del greggio tende spesso a modificarsi attraverso movimenti bruschi e improvvisi.
Tali episodi possono essere ricondotti principalmente a tre categorie di eventi. La prima comprende le decisioni relative all'offerta, in particolare quelle adottate dall'OPEC+, il cui esito rimane incerto fino al termine delle riunioni. La seconda è costituita dagli eventi geopolitici, per loro natura imprevedibili. La terza riguarda la pubblicazione di dati economici programmati, tra cui il già citato *Weekly Petroleum Status Report* dell'EIA.
Dal punto di vista operativo, la presenza di questi salti implica che tra due prezzi osservati consecutivamente possano non essere stati negoziati tutti i livelli intermedi: il mercato può quindi passare direttamente da una quotazione all'altra senza attraversare i valori compresi tra esse.

1.4.4 Gli episodi di discontinuità del prezzo

Le caratteristiche descritte nei paragrafi precedenti trovano riscontro in numerosi episodi che hanno segnato l'evoluzione del mercato petrolifero negli ultimi decenni. Le ampie oscillazioni dei prezzi, l'alternanza di regimi di volatilità e la presenza di movimenti improvvisi non rappresentano infatti fenomeni isolati, ma costituiscono una costante della storia del greggio.
Un primo esempio è rappresentato dal ciclo del 2007–2008, durante il quale il prezzo del Brent raggiunse un massimo superiore ai 140 dollari al barile per poi scendere al di sotto dei 40 dollari nel giro di pochi mesi. L'episodio ha alimentato un intenso dibattito sulle determinanti delle quotazioni, con interpretazioni differenti riguardo al ruolo della domanda proveniente dalle economie emergenti, dei vincoli dell'offerta e dell'attività finanziaria. Hamilton (2009) ne propone una delle ricostruzioni più autorevoli.
Una dinamica differente caratterizzò invece il periodo 2014–2016. In questo caso la crescita della produzione statunitense da shale oil, unita alla decisione dell'OPEC di non ridurre l'offerta, diede origine a un ribasso graduale ma persistente delle quotazioni, culminato con un prezzo del Brent inferiore ai 30 dollari al barile all'inizio del 2016. L'episodio mostra come anche shock meno improvvisi possano produrre variazioni di prezzo di notevole entità.
L'evento più straordinario nella storia recente del mercato si verificò tuttavia durante la pandemia di COVID-19. Il 20 aprile 2020 il contratto futures sul WTI con scadenza maggio chiuse a $-37{,}63$ dollari al barile, segnando per la prima volta nella sua storia una quotazione negativa. Secondo il rapporto interinale della *Commodity Futures Trading Commission*

(U.S. Commodity Futures Trading Commission 2020), tale risultato fu determinato dalla combinazione tra il crollo della domanda mondiale, l'eccesso di offerta e la quasi completa saturazione della capacità di stoccaggio. In queste condizioni, gli operatori impossibilitati a ricevere la consegna fisica del greggio preferirono sostenere un costo pur di chiudere la propria posizione prima della scadenza del contratto, confermando il ruolo cruciale del meccanismo di consegna discusso precedentemente.

Negli anni successivi il mercato è stato nuovamente interessato da importanti shock geopolitici. L'invasione russa dell'Ucraina nel 2022 determinò un immediato rialzo delle quotazioni e una fase prolungata di elevata volatilità, accompagnata da una profonda riorganizzazione dei flussi commerciali internazionali. Ancora più recente è la crisi dello Stretto di Hormuz del 2026. Dai circa 71 dollari al barile di febbraio, il prezzo del Brent è salito fino a superare i 138 dollari all'inizio di aprile, per poi ridiscendere gradualmente dopo la firma del memorandum d'intesa del 18 giugno e tornare, all'inizio di luglio, al di sotto dei 70 dollari[10], cioè sui livelli precedenti il conflitto. La discesa non si è tuttavia consolidata: il prezzo è rimasto sotto i 70 dollari soltanto per quattro sedute, nella seconda metà di luglio è tornato oltre i 100 dollari e nel mese di settembre si è collocato in media attorno ai 113. L'episodio mostra così, all'interno di una stessa crisi, movimenti su scale temporali molto diverse: un rialzo protrattosi per mesi e oscillazioni di pochi giorni attorno ai livelli di riferimento.

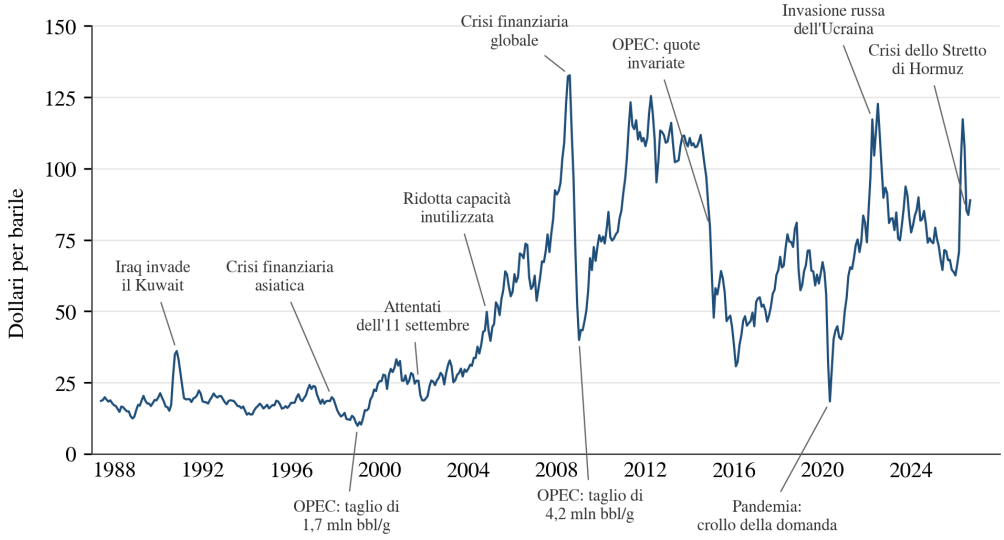

Figura 1.7: Prezzo spot del Brent e principali eventi geopolitici ed economici, 1987–2026. I valori sono medie mensili espresse in dollari nominali per barile. *Fonte: U.S. Energy Information Administration.*

[10]I valori riportati sono medie calcolate sulla serie giornaliera *Europe Brent Spot Price FOB* pubblicata dalla U.S. Energy Information Administration, https://www.eia.gov/dnav/pet/hist/rbrted.htm.

Nel loro insieme, questi episodi mostrano come il mercato petrolifero sia caratterizzato da una continua alternanza di fasi di relativa stabilità e periodi di forte turbolenza. È proprio questa combinazione di elevata volatilità, salti improvvisi e frequenti cambi di regime a rendere particolarmente complessa la modellizzazione del prezzo del greggio e, di conseguenza, il pricing dei derivati aventi tale commodity come sottostante.

Capitolo 2

Fondamenti teorici per la valutazione delle opzioni path-dependent

Il Capitolo 1 si è chiuso osservando che la combinazione di volatilità elevata, salti improvvisi e frequenti cambi di regime rende particolarmente complessa la modellizzazione del prezzo del greggio e, di conseguenza, la valutazione dei derivati che vi insistono. Questo capitolo raccoglie quell'osservazione e ne trae le conseguenze formali: costruisce l'apparato teorico della valutazione delle opzioni, partendo dal caso più semplice, l'opzione europea nel modello di Black-Scholes-Merton, per arrivare agli strumenti concettuali necessari a trattare i contratti il cui payoff dipende dall'intera traiettoria del sottostante.
L'ordine dell'esposizione riflette un argomento preciso. Il modello di Black-Scholes-Merton non viene presentato perché costituisca una descrizione adeguata del mercato del greggio, bensì perché fornisce due elementi distinti, che è essenziale tenere separati.

Da un lato, esso offre una formula chiusa per la valutazione delle opzioni europee, fondata su ipotesi restrittive e, in larga misura, non compatibili con le caratteristiche empiriche del mercato petrolifero. Dall'altro, introduce un quadro teorico basato sull'assenza di arbitraggio e sulla valutazione in misura risk-neutral, che continua a rappresentare il riferimento concettuale anche quando tali ipotesi vengono rilassate. Questa distinzione sarà ripresa successivamente e costituisce il fondamento teorico sul quale si sviluppa il resto della tesi.

2.1 Le opzioni europee

L'opzione europea costituisce il punto di partenza obbligato di qualunque trattazione dei derivati, non perché sia lo strumento più interessante, ma perché è quello rispetto al quale tutti gli altri vengono definiti. Le opzioni barriera e parigine, oggetto dei capitoli

successivi, si presentano infatti come modificazioni contrattuali di una struttura europea sottostante: ne condividono il payoff terminale e se ne discostano soltanto per la presenza di una condizione aggiuntiva. Questo paragrafo ne fissa la terminologia, la struttura del payoff e le variabili che ne determinano il valore.

2.1.1 Definizioni e caratteristiche

Un'opzione è un contratto che attribuisce a una delle due parti il diritto, e non l'obbligo, di effettuare una transazione a condizioni prefissate. L'asimmetria tra diritto e obbligo rappresenta la caratteristica essenziale dello strumento e ne determina l'intero profilo economico.
Un'opzione call attribuisce al possessore il diritto di acquistare l'attività sottostante a un prezzo prestabilito, detto prezzo di esercizio *(strike price)* e indicato con K. Un'opzione put attribuisce invece il diritto di venderla allo stesso prezzo. In entrambi i casi il diritto può essere esercitato entro una data di scadenza T, oltre la quale si estingue.
Le due parti del contratto occupano posizioni non simmetriche. Il compratore, o detentore di una posizione lunga *(long position)*, acquisisce un diritto e corrisponde, al momento della stipula, una somma detta premio *(option premium)*. Egli non assume ulteriori obblighi: nel caso peggiore decide di non esercitare l'opzione e perde esclusivamente il premio versato.
Il venditore, o writer, assume invece una posizione corta *(short position)*. Riceve il premio iniziale ma si obbliga a eseguire la prestazione prevista dal contratto qualora la controparte eserciti il proprio diritto. La sua perdita potenziale non è limitata dal premio incassato e, nel caso della vendita allo scoperto di una call, può risultare teoricamente illimitata.
Questa asimmetria tra le posizioni contrattuali giustifica l'esistenza del premio, che rappresenta la remunerazione richiesta dal venditore per assumere un rischio unilaterale.
Le opzioni si distinguono inoltre in base allo stile di esercizio. Un'opzione di stile europeo può essere esercitata esclusivamente alla data di scadenza, mentre un'opzione di stile americano può essere esercitata in qualsiasi momento fino alla scadenza.
Il presente lavoro si concentra esclusivamente sulle opzioni di stile europeo, che costituiscono la formulazione standard sia delle opzioni barriera sia delle opzioni parigine.
Un ulteriore elemento di classificazione riguarda le modalità di regolamento del contratto. Alla scadenza, l'opzione può prevedere la consegna fisica dell'attività sottostante oppure il pagamento della differenza monetaria tra il valore di mercato e il prezzo di esercizio. Come evidenziato nel paragrafo 1.3.1, nel mercato petrolifero tale distinzione riveste notevole importanza operativa, senza tuttavia modificare la struttura matematica del payoff.

2.1.2 Payoff e profitto

Il payoff rappresenta il valore del contratto alla data di scadenza ed è determinato dal prezzo del sottostante S osservato in quel momento. Nel caso di una call europea, esso è definito come

$$f_{\text{call}}(S_T) = (S_T - K)^+ = \max(S_T - K,\, 0) \tag{2.1}$$

poiché il detentore eserciterà l'opzione soltanto quando il prezzo di mercato del sottostante risulta superiore al prezzo di esercizio. In modo analogo, il payoff di una put europea è dato da

$$f_{\text{put}}(S_T) = (K - S_T)^+ = \max(K - S_T,\, 0) \tag{2.2}$$

Entrambe le funzioni sono continue, non negative e convesse, ma presentano un punto di non differenziabilità in corrispondenza di $S_T = K$. Tale caratteristica riveste un ruolo importante nell'analisi delle opzioni, poiché è proprio nelle vicinanze dello strike che le sensibilità di ordine superiore tendono a concentrarsi. Nei contratti caratterizzati da payoff con ulteriori discontinuità, come le opzioni a soglia, queste difficoltà risultano ancora più accentuate.
Il profitto dell'investitore si ottiene sottraendo al payoff il valore del premio inizialmente corrisposto, capitalizzato fino alla scadenza:

$$\Pi_{\text{call}} = (S_T - K)^+ - ce^{rT} \tag{2.3}$$

dove c rappresenta il premio pagato al momento della stipula e r il tasso privo di rischio. La distinzione tra payoff e profitto è più rilevante di quanto possa apparire a prima vista. Mentre il payoff del compratore non può assumere valori negativi, il profitto può essere negativo a causa del costo sostenuto per acquistare l'opzione. Inoltre, il payoff è la quantità che compare nelle formule di valutazione, mentre il profitto misura l'effettivo risultato economico dell'investimento. Confondere questi due concetti può condurre a un'errata individuazione del punto di pareggio, che nel caso della call è pari a $K+ce^{rT}$ e non semplicemente a K.
È infine opportuno osservare che i premi di una call e di una put europee sono legati da una fondamentale relazione di non arbitraggio. Considerando due opzioni aventi lo stesso sottostante, identico prezzo di esercizio K e medesima scadenza T, e assumendo che il sottostante non distribuisca flussi intermedi, vale la *put-call parity*:

$$c - p = S_0 - Ke^{-rT} \tag{2.4}$$

Questa relazione non dipende dal particolare modello di valutazione impiegato, ma discende esclusivamente dal principio di assenza di arbitraggio. Per tale motivo rappresenta

non solo un importante risultato teorico, ma anche un utile strumento di verifica della correttezza delle implementazioni numeriche che verranno sviluppate successivamente.

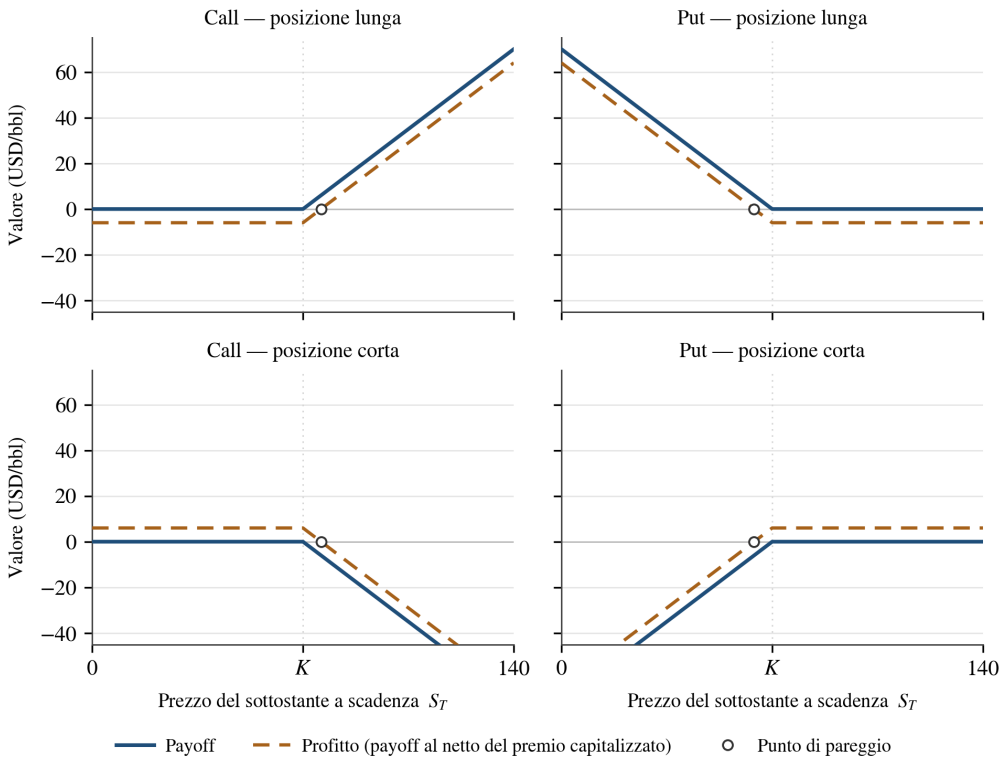

Figura 2.1: Payoff e profitto di call e put europee, posizioni lunghe e corte, in funzione del prezzo del sottostante a scadenza. Il profitto è calcolato al netto del premio capitalizzato al tasso privo di rischio.

2.1.3 I determinanti del premio

Prima di introdurre un modello di valutazione formale, è possibile individuare qualitativamente in che modo il premio di un'opzione europea risponda alle principali variabili che lo influenzano.

Il prezzo corrente del sottostante S_0

Un incremento del prezzo del sottostante determina un aumento del valore della call e una diminuzione del valore della put. Si tratta dell'effetto più intuitivo e sarà successivamente misurato dalla sensibilità nota come delta.

Il prezzo di esercizio K

Lo strike esercita un'influenza opposta rispetto al prezzo del sottostante: un suo aumento riduce il valore della call, poiché rende meno conveniente l'esercizio dell'opzione, mentre accresce il valore della put.

Il tempo residuo alla scadenza T

In generale, un orizzonte temporale più lungo tende ad aumentare il valore di una call europea, poiché amplia il numero di scenari favorevoli senza modificare il limite inferiore del payoff. Per la put europea l'effetto è invece ambiguo: al maggiore valore temporale si contrappone il ritardo con cui verrebbe incassato il prezzo di esercizio, cosicché per opzioni profondamente *in-the-money* il valore può risultare decrescente nella scadenza.

La volatilità σ

Un aumento della volatilità accresce il valore sia delle call sia delle put. Questo risultato deriva dalla natura convessa del payoff: mentre la perdita massima è limitata a zero, il potenziale di guadagno rimane teoricamente illimitato. Di conseguenza, una maggiore dispersione dei possibili esiti incrementa il valore atteso della componente positiva del payoff. La volatilità rappresenta la variabile di maggiore interesse per la presente tesi e, come evidenziato nel Capitolo 1, il mercato del greggio è caratterizzato da una dinamica particolarmente instabile sotto questo profilo.

Il tasso privo di rischio r

Un incremento del tasso riduce il valore attuale del prezzo di esercizio da corrispondere alla scadenza. Ne consegue un aumento del valore della call e una diminuzione del valore della put. Sebbene il suo impatto sia generalmente meno rilevante rispetto a quello delle variabili precedenti, esso può assumere un peso significativo nel caso di opzioni con scadenze più lunghe.

Nel caso delle opzioni scritte su contratti futures, configurazione di maggiore interesse per il mercato del greggio, il ruolo del tasso privo di rischio si modifica, poiché il sottostante non richiede un esborso iniziale per il suo finanziamento. In questo contesto la formulazione appropriata è quella proposta da Black (1976), ottenuta adattando il modello di Black-Scholes mediante la sostituzione di S_0 con $F_0 e^{-rT}$.

Tabella 2.1: Effetto di un incremento di ciascun parametro sul premio di un'opzione europea.

Parametro	Call	Put
Prezzo del sottostante S_0	+	−
Prezzo di esercizio K	−	+
Tempo residuo T	+	?
Volatilità σ	+	+
Tasso privo di rischio r	+	−

2.2 Il modello di Black-Scholes-Merton

Il modello viene qui presentato seguendo il duplice percorso annunciato in apertura di capitolo. I paragrafi 2.2.1 e 2.2.2 esplicitano le ipotesi e la dinamica del sottostante; i paragrafi 2.2.3 e 2.2.4 ricostruiscono l'argomento di valutazione, prima nella forma dell'equazione differenziale e poi in quella probabilistica. È quest'ultima, e non la formula chiusa che ne discende, a costituire il risultato destinato a sopravvivere al rilassamento delle ipotesi e a essere impiegato nel resto della tesi.

2.2.1 Le ipotesi del modello

Il modello sviluppato da Black e Scholes (1973) e, in una formulazione parzialmente differente, da Merton (1973), si fonda su un insieme di ipotesi che è opportuno esplicitare fin dall'inizio, poiché nel paragrafo 2.3 verranno analizzati i limiti derivanti dal loro progressivo superamento.

Mercati perfetti

I mercati sono privi di costi di transazione e di imposizione fiscale; le attività finanziarie sono perfettamente divisibili; la vendita allo scoperto è consentita senza restrizioni e con piena disponibilità dei proventi; inoltre, le contrattazioni si svolgono in modo continuo nel tempo.

Assenza di opportunità di arbitraggio

Non è possibile costruire un portafoglio con costo iniziale nullo in grado di generare un guadagno certo non negativo e strettamente positivo con probabilità positiva. Si tratta dell'ipotesi economicamente più rilevante del modello: è da essa, e non da considerazioni legate all'equilibrio dei mercati o alle preferenze degli investitori, che deriva l'intero impianto teorico della valutazione.

Tasso privo di rischio costante e noto

Esiste un'attività priva di rischio che remunera il capitale al tasso r, assunto costante per tutta la durata dell'opzione. Inoltre, gli operatori possono sia investire sia prendere a prestito fondi a tale tasso.

Volatilità costante e nota

Il parametro σ, che descrive la variabilità dei rendimenti del sottostante, è considerato costante nel tempo e noto con certezza.

Dinamica del sottostante

Il prezzo del sottostante segue un moto geometrico browniano, caratterizzato da traiettorie continue e dall'assenza di salti.

Assenza di flussi intermedi

Durante la vita dell'opzione il sottostante non distribuisce flussi intermedi, come dividendi o altri proventi. Si tratta di un'ipotesi che può essere rimossa senza modificare la struttura fondamentale del modello.

Tra tutte le ipotesi elencate, quella di assenza di arbitraggio occupa una posizione particolare. A differenza delle altre, non rappresenta una semplice semplificazione tecnica, bensì il principio fondamentale sul quale si basa l'intera teoria della valutazione. Rinunciarvi significherebbe privare di fondamento il modello stesso. Le restanti ipotesi hanno invece natura prevalentemente tecnica e gran parte dell'evoluzione della letteratura successiva è consistita nel rilassarle progressivamente, mantenendo invariato il principio di assenza di arbitraggio.

2.2.2 Il processo stocastico del sottostante

Il modello assume che il prezzo del sottostante evolva secondo un moto geometrico browniano, descritto dalla seguente equazione differenziale stocastica:

$$dS_t = \mu S_t \, dt + \sigma S_t \, dW_t \tag{2.5}$$

dove W_t è un moto browniano standard definito su uno spazio di probabilità filtrato (Ω, F, F_t, P), μ indica il rendimento atteso istantaneo del sottostante e σ ne rappresenta la volatilità.

L'interpretazione economica del processo risulta più immediata dividendo entrambi i membri dell'equazione per S_t:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu\, dt + \sigma\, dW_t \tag{2.6}$$

L'espressione evidenzia come il rendimento infinitesimo, piuttosto che la variazione assoluta del prezzo, sia composto da una componente deterministica proporzionale al tempo trascorso e da una componente aleatoria la cui intensità è governata dalla volatilità σ. Si tratta di una specificazione economicamente plausibile, poiché implica che l'incertezza cresca proporzionalmente al livello del prezzo.
Applicando il lemma di Itô[1] alla funzione $\ln S_t$ si ottiene

$$d(\ln S_t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma\, dW_t \tag{2.7}$$

da cui segue, per integrazione

$$S_T = S_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \sigma W_T\right] \tag{2.8}$$

Ne consegue che la variabile $\ln(S_T/S_0)$ è distribuita normalmente con media $(\mu - \sigma^2/2)T$ e varianza $\sigma^2 T$, mentre il prezzo terminale del sottostante segue una distribuzione lognormale. Il termine correttivo $-\sigma^2/2$, che emerge dall'applicazione del lemma di Itô alla funzione logaritmica, costituisce una delle manifestazioni più immediate del fatto che il calcolo stocastico in tempo continuo non obbedisce alle regole del calcolo differenziale ordinario.
Due proprietà del processo meritano di essere evidenziate fin d'ora, poiché ne delimitano con precisione il campo di applicazione.
La prima riguarda la continuità delle traiettorie, che si verifica con probabilità uno. Il modello esclude quindi, per costruzione, la presenza di salti nei prezzi e non è in grado di rappresentare i movimenti improvvisi descritti nel paragrafo 1.4.3. Per superare questo limite è necessario affiancare alla componente diffusiva un termine di salto, secondo

[1] Il lemma di Itô estende la regola di derivazione delle funzioni composte ai processi stocastici. Se X_t è un processo di Itô e $g(X_t, t)$ una funzione due volte differenziabile, il differenziale dg contiene un termine aggiuntivo in $\frac{1}{2}\,\partial^2 g/\partial x^2\,(dX_t)^2$, assente nel calcolo ordinario. Tale termine deriva dal fatto che la variazione quadratica del moto browniano nell'intervallo $[0, t]$ è pari a t anziché nulla. Per una trattazione sistematica si rinvia a Øksendal (2003).

l'approccio introdotto da Merton (1976). Le implicazioni di questa estensione saranno discusse nel paragrafo 2.3.2 e il modello con salti sarà impiegato nel Capitolo 5 come specificazione alternativa.
La seconda proprietà è l'indipendenza degli incrementi, accompagnata dall'ipotesi di varianza costante. Di conseguenza, il modello non è in grado di riprodurre il fenomeno del volatility clustering documentato nel paragrafo 1.4.2. Anche in questo caso la letteratura ha proposto numerose estensioni, alcune delle quali saranno richiamate nel paragrafo 2.3.1.

2.2.3 Il portafoglio replicante e l'equazione di Black-Scholes

L'argomento di valutazione si fonda sul principio della replicazione. Si consideri un derivato di valore $V(S_t, t)$ e si costruisca un portafoglio composto da una posizione lunga nel derivato e da una posizione corta in Δ unità del sottostante:

$$\Pi_t = V(S_t, t) - \Delta S_t \tag{2.9}$$

Applicando il lemma di Itô alla funzione V e sostituendo la dinamica del prezzo del sottostante, la variazione infinitesima del portafoglio contiene un termine in dW_t, il cui coefficiente è proporzionale a $\left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\right)$. Scegliendo

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}, \tag{2.10}$$

tale componente stocastica viene eliminata e il portafoglio risulta istantaneamente privo di rischio. In assenza di opportunità di arbitraggio, un portafoglio con queste caratteristiche deve necessariamente offrire il tasso privo di rischio r. Da questa condizione si ottiene l'equazione differenziale alle derivate parziali di Black-Scholes:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \tag{2.11}$$

Due aspetti di questo risultato meritano particolare attenzione.
Il primo è che il rendimento atteso del sottostante, rappresentato dal parametro μ, non compare nell'equazione. Le aspettative degli operatori sul rendimento futuro dell'attività sottostante risultano infatti irrilevanti ai fini della valutazione del derivato, poiché vengono eliminate attraverso il meccanismo di replicazione. Si tratta di uno dei risultati più significativi della teoria del pricing per arbitraggio.
Il secondo aspetto è che l'equazione ottenuta non dipende dalla specifica tipologia di derivato considerata, ma è valida per qualunque contratto scritto sul sottostante S.

È infine opportuno sottolineare che la strategia di copertura descritta è di natura dinamica. Il valore di Δ dipende infatti sia dal prezzo corrente del sottostante S_t sia dal tempo t, e deve pertanto essere aggiornato continuamente nel corso della vita del contratto.

2.2.4 La valutazione risk-neutral

L'equazione differenziale ottenuta nel paragrafo precedente può essere interpretata anche in termini probabilistici. Questa formulazione, sviluppata da Harrison e Kreps (1979) e successivamente da Harrison e Pliska (1981), risulta particolarmente conveniente per la valutazione dei derivati path-dependent.
L'assenza di opportunità di arbitraggio implica l'esistenza di una misura di probabilità Q, detta misura risk-neutral, rispetto alla quale il prezzo del sottostante evolve con un drift pari al tasso privo di rischio r, anziché al rendimento atteso μ. La dinamica del processo diventa pertanto

$$dS_t = rS_t\,dt + \sigma S_t\,d\widetilde{W_t} \tag{2.12}$$

dove $\widetilde{W_t}$ rappresenta un moto browniano standard sotto la misura Q.
Questa formulazione costituisce la traduzione matematica dell'osservazione già evidenziata nel paragrafo precedente: il rendimento atteso storico non influisce sul prezzo del derivato, poiché viene eliminato attraverso il meccanismo di replicazione. Di conseguenza, il valore di un qualunque contratto con payoff f_T è dato dal valore atteso scontato del payoff calcolato sotto la misura risk-neutral:

$$V_0 = e^{-rT}\,\mathbb{E}^Q[f_T] \tag{2.13}$$

Sotto le ipotesi elencate nel paragrafo 2.2.1 il mercato risulta inoltre completo: ogni payoff misurabile e integrabile può essere replicato mediante una strategia autofinanziante che impieghi esclusivamente il sottostante e il titolo privo di rischio. La relazione tra le due proprietà è precisata dai teoremi fondamentali della valutazione: il primo stabilisce che l'assenza di opportunità di arbitraggio equivale all'esistenza di almeno una misura martingala equivalente; il secondo, che la completezza del mercato ne garantisce l'unicità. La distinzione non è puramente formale. È infatti l'unicità della misura a fare sì che l'espressione (2.13) individui il prezzo del derivato, e non semplicemente un prezzo compatibile con l'assenza di arbitraggio. Come si vedrà nel paragrafo 2.3.1, tale proprietà viene meno non appena si introducano volatilità stocastica o discontinuità nelle traiettorie: in questi contesti le misure martingala equivalenti sono infinite, la formula continua a definire un prezzo privo di arbitraggio per ciascuna scelta di Q, ma la selezione della misura diventa parte integrante della specificazione del modello e viene operata, nella pratica, attraverso la calibrazione ai prezzi osservati sul mercato.
Questa rappresentazione presenta due proprietà fondamentali per gli sviluppi successivi

della tesi. La prima è che il payoff f_T non deve necessariamente dipendere esclusivamente dal valore finale del sottostante S_T, ma può essere un qualunque funzionale misurabile dell'intera traiettoria del processo. La stessa formulazione risulta quindi applicabile, senza modifiche concettuali, alla valutazione di opzioni asiatiche, lookback, barriera e parigine. La seconda proprietà è di natura operativa. Se è possibile simulare le traiettorie del sottostante sotto la misura Q e calcolare il payoff corrispondente per ciascuna di esse, il valore del derivato può essere stimato come media dei payoff scontati. Questo costituisce il principio alla base del metodo Monte Carlo che verrà illustrato nel paragrafo 2.6.

2.2.5 La formula di Black-Scholes

Risolvendo l'equazione differenziale di Black-Scholes con la condizione terminale di una call europea, oppure, in modo equivalente, calcolando il valore atteso del payoff sotto la misura risk-neutral, si ottengono le ben note formule di valutazione per call e put europee:

$$c = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \tag{2.14}$$

$$p = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1). \tag{2.15}$$

dove

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

e $N(\cdot)$ indica la funzione di ripartizione della distribuzione normale standard.
L'interpretazione economica dei due termini della formula è particolarmente istruttiva. La quantità $N(d_2)$ rappresenta la probabilità, sotto la misura risk-neutral, che l'opzione risulti *in-the-money* alla scadenza. Il secondo termine della formula può quindi essere interpretato come il valore attuale del prezzo di esercizio, ponderato per la probabilità di doverlo corrispondere.
Il primo termine rappresenta invece il valore attuale del sottostante che verrà ricevuto in caso di esercizio. In questo caso, tuttavia, $N(d_1)$ non coincide con una probabilità calcolata sotto la misura risk-neutral, bensì sotto una diversa misura di probabilità associata al sottostante come numerario. La precisazione è tutt'altro che formale: $N(d_2)$ non rappresenta la probabilità di esercizio nel mondo reale e confondere la probabilità risk-neutral con quella storica costituisce uno degli equivoci più frequenti nell'interpretazione del modello.
Si osservi infine che la formula dipende da cinque parametri fondamentali. Quattro di essi — S_0, K, T e r — sono direttamente osservabili sul mercato, mentre la volatilità σ non lo è. Per questa ragione, nella pratica di mercato il procedimento viene invertito: anziché

utilizzare una volatilità nota per determinare il prezzo dell'opzione, si ricava la volatilità implicita, ossia il valore di σ che, inserito nella formula di Black-Scholes, restituisce il prezzo osservato sul mercato.

2.2.6 Le principali greche

Le greche misurano la sensibilità del valore di un'opzione rispetto alle principali variabili che ne determinano il prezzo. Ai fini della presente tesi, l'attenzione si concentra su tre misure: delta, gamma e vega.
Il delta, definito come $\Delta = \partial V / \partial S$, misura la variazione del prezzo dell'opzione in risposta a una variazione unitaria del prezzo del sottostante. Per una call europea si ha

$$\Delta = N(d_1), \tag{2.16}$$

per cui il suo valore appartiene all'intervallo (0,1); nel caso di una put europea, invece,

$$\Delta = N(d_1) - 1 \tag{2.17}$$

e risulta compreso tra (-1,0). Dal punto di vista economico, il delta rappresenta il numero di unità del sottostante da detenere per realizzare una copertura perfetta della posizione.
Il gamma, definito come

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}, \tag{2.18}$$

misura la sensibilità del delta alle variazioni del prezzo del sottostante. Per call e put europee assume la forma

$$\Gamma = \frac{N'(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}}, \tag{2.19}$$

ed è sempre positivo nel caso di posizioni lunghe. Dal punto di vista operativo, il gamma riveste un ruolo particolarmente importante, poiché determina la frequenza con cui è necessario aggiornare la strategia di copertura. Un valore elevato di gamma indica infatti che il delta varia rapidamente al variare del prezzo del sottostante, rendendo necessari ribilanciamenti più frequenti e di maggiore entità. Per le opzioni europee, a parità di scadenza residua positiva, il gamma raggiunge il valore massimo in prossimità dello strike e diminuisce progressivamente allontanandosi da esso.
Il vega, definito come

$$\nu = \frac{\partial V}{\partial \sigma}, \tag{2.20}$$

misura invece la sensibilità del prezzo dell'opzione rispetto alla volatilità del sottostante. Per il modello di Black-Scholes esso è pari a

$$\nu = S_0\sqrt{T}\,N'(d_1) \tag{2.21}$$

Il vega assume valori positivi sia per le call sia per le put acquistate. Sebbene il termine vega non corrisponda ad alcuna lettera dell'alfabeto greco, la sua adozione è ormai universale nella letteratura e nella pratica dei mercati finanziari.
Merita infine una breve osservazione concettuale. Il vega misura la sensibilità del prezzo rispetto a un parametro che il modello di Black-Scholes assume costante. In altre parole, si valuta l'effetto di una variazione di una quantità che il modello considera, per ipotesi, invariabile. Si tratta di una apparente incoerenza teorica che gli operatori accettano per ragioni pratiche, ma che evidenzia in modo chiaro uno dei principali limiti del modello, oggetto della discussione nella sezione successiva.

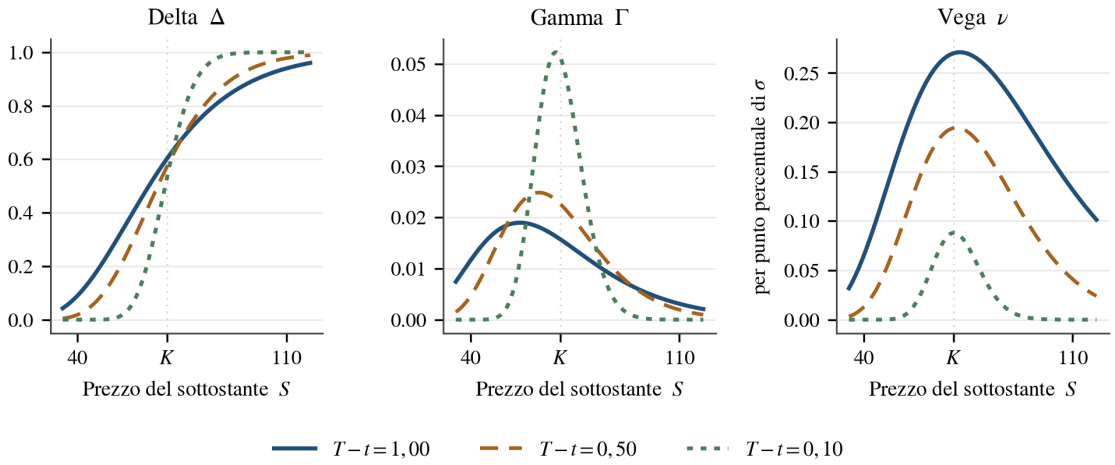

Figura 2.2: Delta, gamma e vega di una call europea in funzione del prezzo del sottostante, per tre valori del tempo residuo alla scadenza. I valori sono calcolati per $K = 70$, $\sigma = 35\%$ e $r = 3\%$; il vega è espresso per punto percentuale di volatilità.

2.3 I limiti del modello di Black-Scholes

I limiti del modello sono di due nature distinte, che è opportuno tenere separate. I primi due paragrafi riguardano il realismo delle ipotesi: la volatilità non è costante e le traiettorie dei prezzi non sono continue, e in entrambi i casi l'evidenza raccolta nel Capitolo 1 mostra che il mercato del greggio si colloca agli estremi di questa inadeguatezza. Il terzo paragrafo affronta invece una questione diversa, che sussisterebbe anche qualora le ipotesi fossero verificate: l'ambito di validità della formula ottenuta, e ciò che accade quando il payoff cessa di dipendere dal solo valore terminale del sottostante.

2.3.1 L'ipotesi di volatilità costante

L'ipotesi secondo cui la volatilità σ sia costante nel tempo rappresenta uno dei primi assunti del modello a essere smentito dall'evidenza empirica. Come mostrato nel paragrafo 1.4.2, il mercato del greggio è caratterizzato da un marcato fenomeno di volatility clustering: la volatilità presenta un'elevata autocorrelazione, alterna fasi persistenti di alta e bassa intensità e si comporta essa stessa come una variabile aleatoria.
L'inadeguatezza di questa ipotesi emerge anche dall'osservazione diretta dei prezzi di mercato. Se il modello di Black-Scholes fosse perfettamente coerente con la realtà, la volatilità implicita ricavata da opzioni aventi lo stesso sottostante e la stessa scadenza dovrebbe essere indipendente dal prezzo di esercizio. Nella pratica ciò non avviene: la relazione tra volatilità implicita e strike assume le note configurazioni di *volatility smile* e *volatility skew*[2], variando inoltre al variare della scadenza. La superficie di volatilità implicita può quindi essere interpretata, in prima approssimazione, come una rappresentazione delle carenze del modello utilizzato per ricavarla.
La letteratura ha affrontato questo problema seguendo due principali direttrici. I modelli a volatilità locale, nei quali σ è una funzione deterministica del prezzo del sottostante S_t e del tempo t, consentono di riprodurre esattamente la superficie di volatilità osservata preservando la completezza del mercato. I modelli a volatilità stocastica, tra cui quello proposto da Heston (1993), attribuiscono invece alla varianza una propria dinamica casuale, ottenendo una descrizione più realistica della dinamica dei prezzi, ma rinunciando alla completezza del mercato e, di conseguenza, all'unicità del prezzo del derivato.
Nel mercato petrolifero questa problematica assume un'importanza ancora maggiore. Trolle e Schwartz (2009), analizzando un ampio insieme di prezzi di futures e opzioni negoziati sul NYMEX, evidenziano l'esistenza di due fattori di volatilità in larga misura non replicabili, ossia fonti di rischio che non possono essere replicate mediante posizioni nei soli contratti futures. Il mercato dei derivati sul greggio risulta quindi strutturalmente incompleto, nel senso definito nel paragrafo 2.2.4, e la copertura del rischio di volatilità richiede inevitabilmente l'impiego di strumenti opzionali. Per il sottostante oggetto della presente tesi, ciò implica che l'unicità del prezzo garantita dal modello di Black-Scholes-Merton non può essere considerata valida neppure come approssimazione teorica.

[2]Si parla di *smile* quando la volatilità implicita è minima in prossimità dello strike *at-the-money* e cresce allontanandosene in entrambe le direzioni, disegnando un profilo simmetrico a forma di sorriso. Si parla invece di *skew* quando il profilo è asimmetrico e la volatilità implicita decresce in modo monotono al crescere dello strike: configurazione tipica dei mercati azionari, dove la maggiore domanda di protezione dal ribasso sostiene il prezzo delle opzioni put *out-of-the-money*.

2.3.2 L'ipotesi di continuità delle traiettorie

Nel modello di Black-Scholes-Merton il prezzo del sottostante segue un moto geometrico browniano le cui traiettorie sono continue con probabilità uno. Come evidenziato nel paragrafo 1.4.3, il mercato del greggio mostra invece frequenti movimenti discreti dei prezzi, riconducibili a eventi quali decisioni dell'OPEC+, sviluppi geopolitici o pubblicazioni di dati macroeconomici programmati.

La conseguenza più immediata riguarda la distribuzione dei rendimenti. Un processo caratterizzato da incrementi gaussiani attribuisce probabilità molto ridotte agli eventi estremi, mentre la presenza di salti determina distribuzioni con code significativamente più pesanti. Poiché il mercato del greggio è frequentemente interessato da variazioni improvvise riconducibili agli eventi descritti nel paragrafo 1.4.3, il modello lognormale tende a sottostimare sistematicamente la probabilità dei movimenti di maggiore ampiezza. Esiste tuttavia una conseguenza ancora più rilevante dal punto di vista teorico, che riguarda la completezza del mercato. Nel modello di Black-Scholes-Merton la strategia di copertura funziona perché, in un intervallo di tempo infinitesimo, il prezzo del sottostante può variare soltanto di una quantità infinitesima e una copertura in delta è sufficiente a neutralizzare tale rischio. Quando sono presenti salti, questa proprietà viene meno: un movimento discreto e imprevedibile non può essere compensato da una posizione in delta determinata prima del suo verificarsi, rendendo impossibile una replicazione perfetta del payoff.

Per superare questo limite, la letteratura ha sviluppato una vasta classe di modelli con salti, a partire dal contributo di Merton (1976), che introduce un processo di Poisson composto accanto alla componente diffusiva, successivamente esteso da Kou (2002) mediante una distribuzione doppia esponenziale dei salti e, più recentemente, da modelli che combinano salti e volatilità stocastica.

Merita tuttavia di essere anticipato un aspetto che assumerà un ruolo centrale nel Capitolo 3. In un processo continuo, il superamento di una barriera avviene necessariamente per contatto: nell'istante in cui la traiettoria oltrepassa il livello B, essa assume esattamente quel valore. In presenza di salti, invece, il processo può superare direttamente la barriera senza mai assumere il valore B, dando luogo al fenomeno dell'overshoot, ossia allo scavalcamento casuale della soglia. I derivati il cui payoff dipende dall'attraversamento di un determinato livello risultano pertanto particolarmente sensibili a questa differenza.

2.3.3 L'ambito di applicabilità della formula

I due paragrafi precedenti hanno messo in evidenza alcune ipotesi del modello che risultano incompatibili con l'evidenza empirica. Il presente paragrafo affronta invece un limite di natura diversa, che non riguarda il realismo delle assunzioni, bensì l'ambito di applicabilità

del risultato ottenuto.
La formula presentata nel paragrafo 2.2.5 è valida per payoff della forma $f_T(S_T)$, cioè per funzioni che dipendono esclusivamente dal valore terminale del sottostante. Essa deriva dal calcolo di un valore atteso rispetto alla distribuzione marginale di S_T, che nel modello di Black-Scholes-Merton è lognormale e nota in forma chiusa. Quando il payoff dipende da altre caratteristiche della traiettoria del processo, come la media dei prezzi osservati, il massimo raggiunto oppure il superamento di un determinato livello, la distribuzione rilevante non coincide più con quella marginale terminale e la formula chiusa non risulta più applicabile.
È essenziale essere precisi su che cosa questo implichi. Essa non implica che il modello non possa essere utilizzato per valutare tali contratti. La formula generale di valutazione risk-neutral

$$V_0 = e^{-rT}\,\mathbb{E}^Q\left[f_T\left(\{S_t\}_{t\in[0,T]}\right)\right] \tag{2.22}$$

rimane infatti valida. Ciò che cambia è il metodo con cui calcolare il valore atteso, che richiede strumenti differenti: la distribuzione del massimo di un moto browniano con drift nel caso delle opzioni barriera, la teoria delle escursioni per le opzioni parigine oppure, quando anche tali strumenti non risultano sufficienti, tecniche di simulazione numerica.
Da questa osservazione discende una conseguenza fondamentale. Il prezzo di un'opzione europea dipende dalla dinamica del sottostante esclusivamente attraverso la distribuzione marginale del prezzo finale S_T. Di conseguenza, due modelli differenti che producono la stessa distribuzione terminale assegnano il medesimo prezzo a qualsiasi opzione europea. Poiché il mercato quota le opzioni mediante la superficie di volatilità implicita e la calibrazione rispetto a tale superficie equivale a fissare le distribuzioni marginali alle diverse scadenze, un modello correttamente calibrato è in grado di riprodurre i prezzi delle opzioni europee anche quando la dinamica del sottostante è specificata in modo non corretto. In questo senso, l'errore di specificazione viene assorbito dal processo di calibrazione.
Per i payoff path-dependent questo risultato non vale più. Il prezzo del derivato dipende infatti dall'intera struttura di dipendenza temporale del processo, informazione che non è contenuta nelle sole distribuzioni marginali. Ne consegue che due modelli calibrati sulla stessa superficie di volatilità implicita possono attribuire prezzi sensibilmente differenti alla medesima opzione barriera (Schoutens, Simons e Tistaert 2004). La calibrazione effettuata esclusivamente su opzioni europee non è quindi sufficiente a determinare univocamente il valore di un derivato path-dependent, e questa criticità diventa tanto più rilevante quanto maggiore è la dipendenza del payoff da eventi rari o da comportamenti estremi della traiettoria del sottostante.
È proprio per questo motivo che il mercato del greggio, nel quale gli errori di specificazione risultano particolarmente rilevanti per le ragioni discusse nel Capitolo 1, rappresenta il contesto in cui le criticità delle opzioni a soglia si manifestano con maggiore evidenza.

2.4 Le opzioni path-dependent

Sia $\{S_t\}_{t\in[0,T]}$ la traiettoria del prezzo del sottostante. Un derivato si definisce path-independent quando il suo payoff può essere espresso come funzione del solo valore terminale, ossia $f_T = f_T(S_T)$. Si parla invece di derivato path-dependent quando il payoff dipende dall'intera evoluzione della traiettoria del sottostante e non esclusivamente dal suo valore alla scadenza.

2.4.1 Le principali categorie

Le opzioni asiatiche

Il payoff dipende dal valore medio assunto dal sottostante durante un determinato intervallo di osservazione. Un esempio è $f_T = (\bar{S} - K)^+$, dove $\bar{S}$ rappresenta la media aritmetica oppure geometrica dei prezzi osservati. Questa categoria costituisce la famiglia di opzioni esotiche maggiormente diffusa nel mercato delle materie prime, per le motivazioni economiche illustrate nel paragrafo 1.3.3. Nel caso della media geometrica è disponibile una soluzione in forma chiusa, poiché la media geometrica di variabili lognormali conserva una distribuzione lognormale. La media aritmetica, invece, non presenta tale proprietà ed è stata storicamente uno dei primi casi affrontati mediante tecniche di simulazione numerica (Kemna e Vorst 1990).

Le opzioni lookback

Il payoff dipende dal valore massimo o minimo raggiunto dal sottostante durante la vita del contratto (Goldman, Sosin e Gatto 1979). Ad esempio, $f_T = S_T - \min_{t\leq T} S_t$.
Questi strumenti attribuiscono al detentore un vantaggio retrospettivo, consentendogli, ad esempio, di acquistare al prezzo minimo o di vendere al prezzo massimo osservato nel periodo di vita dell'opzione. Tale caratteristica ne aumenta significativamente il valore. La loro valutazione richiede la conoscenza della distribuzione congiunta del prezzo finale e dell'estremo del processo, lo stesso strumento probabilistico alla base della valutazione delle opzioni barriera.

Le opzioni barriera

Il payoff coincide con quello di un'opzione standard, ma è subordinato al fatto che il sottostante raggiunga o meno una soglia prefissata B nel corso della vita del contratto. Si distinguono le opzioni knock-out, che cessano di esistere nel momento in cui la barriera

viene raggiunta, e le opzioni knock-in, che si attivano proprio in corrispondenza di tale evento. A questa classificazione si affianca quella basata sulla posizione della barriera rispetto al prezzo iniziale del sottostante, distinguendo tra configurazioni up e down. Dalla combinazione di queste caratteristiche derivano le otto tipologie standard di opzioni barriera, alle quali si aggiungono le versioni a doppia barriera. Esse costituiranno l'oggetto del Capitolo 3.

Le opzioni parigine

Le opzioni parigine rappresentano un'evoluzione delle opzioni barriera, nella quale la condizione di attivazione o di estinzione non coincide con il semplice contatto della barriera, ma richiede che il sottostante rimanga oltre tale livello per un intervallo di tempo almeno pari a un parametro contrattuale D. Le principali varianti sono due: quella standard, nella quale il tempo trascorso oltre la soglia deve essere consecutivo, e quella cumulativa, nella quale rileva invece il tempo complessivo trascorso oltre la barriera. Introdotte da Chesney, Jeanblanc-Picqué e Yor (1997), esse rappresentano il tema centrale del Capitolo 4.

2.4.2 Le motivazioni economiche

La diffusione delle opzioni path-dependent non è riconducibile a una mera ricerca di strutture contrattuali più complesse. Essa risponde, piuttosto, a specifiche esigenze operative degli operatori di mercato, che nel settore petrolifero assumono un'importanza particolarmente marcata.

Come evidenziato nel paragrafo 1.3.3, l'esposizione di un operatore industriale è generalmente legata al prezzo medio osservato in un determinato intervallo temporale, piuttosto che al prezzo rilevato in un singolo istante. Una compagnia aerea che decidesse di coprire il proprio fabbisogno trimestrale mediante un'opzione europea sarebbe protetta soltanto rispetto al prezzo alla scadenza, rimanendo esposta alle oscillazioni registrate durante il resto del trimestre. Questo disallineamento prende il nome di *temporal basis risk*. Le opzioni asiatiche sono state introdotte proprio per eliminare tale problema.

Il premio richiesto per un'opzione europea può risultare elevato e alcuni operatori preferiscono adottare strutture che rinunciano alla protezione in scenari ritenuti poco probabili oppure economicamente poco rilevanti. Una call up-and-out, ad esempio, presenta un premio inferiore rispetto a quello della corrispondente call europea, poiché il compratore accetta che la copertura venga meno nel caso in cui il prezzo del sottostante superi una determinata barriera. Questa è la logica economica alla base della diffusione delle opzioni a soglia. Il minor costo iniziale non costituisce un vantaggio privo di contropartite, ma

rappresenta il corrispettivo della rinuncia a una protezione che può cessare prima della scadenza.

2.5 First passage time

Le due categorie di contratti che costituiscono l'oggetto di questa tesi condividono una caratteristica che le distingue dalle opzioni asiatiche e lookback: il loro payoff non dipende né da una media né da un estremo della traiettoria, bensì dal fatto che il sottostante raggiunga un livello prefissato. La grandezza rilevante non è quindi il valore assunto dal processo in un dato istante, ma l'istante nel quale il processo interseca per la prima volta la barriera. Questo paragrafo ne fornisce la formalizzazione probabilistica e il risultato distributivo sul quale si fondano le formule chiuse del Capitolo 3.

2.5.1 Stopping time e first passage time

Sia (Ω, F, F_t, P) uno spazio di probabilità filtrato, dove F_t rappresenta l'insieme delle informazioni disponibili fino all'istante t. Una variabile aleatoria τ, a valori nell'intervallo $[0, +\infty]$, è detta tempo d'arresto *(stopping time)* se soddisfa la condizione

$$\{\tau \leq t\} \in F_t, \qquad \forall\, t \geq 0 \tag{2.23}$$

Il significato economico di questa definizione è immediato: per stabilire se l'evento si sia verificato entro l'istante t è sufficiente disporre dell'informazione osservabile fino a quel momento, senza dover conoscere l'evoluzione futura del processo.
Il caso di maggiore interesse è rappresentato dal first passage time di un livello prefissato B, definito come

$$\tau_B = \inf\{t \geq 0 : S_t \geq B\} \tag{2.24}$$

con la convenzione che $\tau_B = +\infty$ qualora il livello non venga mai raggiunto.
Il collegamento con le opzioni barriera è immediato. Il payoff di una call up-and-out con barriera $B > S_0$ può essere espresso come

$$f_T = (S_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{\tau_B > T\}} \tag{2.25}$$

ossia come il payoff della corrispondente call europea moltiplicato per la funzione indicatrice dell'evento "la barriera non è stata raggiunta prima della scadenza". La valutazione di questo contratto richiede pertanto la conoscenza della distribuzione congiunta di S_T e τ_B, oppure, in modo equivalente, della distribuzione congiunta del valore finale del sottostante e del massimo raggiunto dal processo.

2.5.2 Il principio di riflessione

La distribuzione del first passage time deriva da uno dei risultati fondamentali della teoria del moto browniano, il principio di riflessione, dal quale discendono le principali formule chiuse utilizzate nella valutazione delle opzioni barriera e che saranno richiamate nel Capitolo 3.
Sia W_t un moto browniano standard e sia $M_T = \max_{0\le t\le T} W_t$ il massimo raggiunto dal processo nell'intervallo $[0, T]$. Poiché le traiettorie del moto browniano sono continue e il processo parte dall'origine, l'evento $M_T \ge b$ coincide con l'evento in cui il livello b viene raggiunto almeno una volta entro l'istante T, ossia con $\tau_b \le T$. Tale evento può essere scomposto in due casi mutuamente esclusivi, a seconda che il processo termini sopra oppure sotto il livello b:

$$P(M_T \ge b) = P(W_T \ge b) + P(M_T \ge b,\ W_T < b). \tag{2.26}$$

Il principio di riflessione permette di determinare il secondo termine. Si consideri una traiettoria che raggiunge il livello b all'istante τ_b e che successivamente termina al di sotto di tale livello. Costruendo una nuova traiettoria che coincide con quella originaria fino a τ_b e riflettendo il tratto successivo rispetto alla retta orizzontale di quota b, si ottiene un percorso avente la stessa probabilità dell'originale. Ciò è conseguenza della proprietà di Markov forte[3]: dopo l'istante τ_b, gli incrementi del processo sono indipendenti dal passato e possiedono una distribuzione simmetrica rispetto allo zero. La riflessione stabilisce quindi una corrispondenza biunivoca tra le traiettorie che raggiungono la barriera e terminano al di sotto di essa e quelle che terminano al di sopra, da cui segue

$$P(M_T \ge b) = 2\,P(W_T \ge b), \qquad b > 0 \tag{2.27}$$

Questo risultato possiede un'immediata interpretazione economica. La probabilità che una barriera venga raggiunta almeno una volta durante la vita del contratto è pari al doppio della probabilità che il processo termini oltre tale livello alla scadenza. Ne consegue che un derivato la cui attivazione o estinzione dipende dal contatto con una soglia è sensibilmente più esposto rispetto a uno il cui payoff dipende esclusivamente dal valore finale del sottostante. Tale differenza tende inoltre ad aumentare al crescere della volatilità e dell'orizzonte temporale considerato. Nel mercato del greggio, caratterizzato da una volatilità particolarmente elevata, questo effetto assume un rilievo quantitativo significativo.

[3] La proprietà di Markov forte estende quella ordinaria ai tempi d'arresto: condizionatamente al valore assunto in τ, l'evoluzione successiva del processo risulta indipendente dal passato. È questa proprietà a legittimare la costruzione della traiettoria riflessa (per una trattazione completa si veda Karatzas e Shreve 1998, cap. 2).

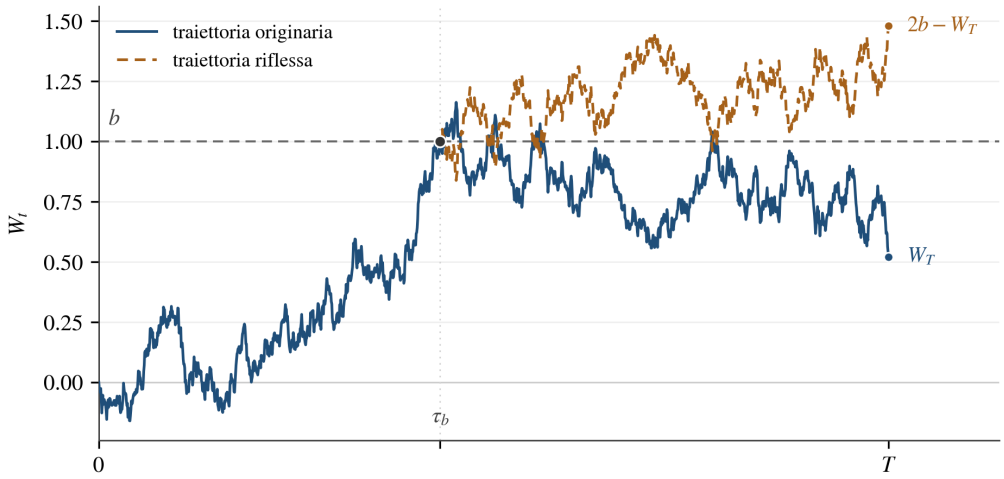

Figura 2.3: Illustrazione del principio di riflessione. La traiettoria originaria raggiunge il livello b nell'istante τ_b e termina al di sotto di esso; la traiettoria riflessa coincide con la prima fino a τ_b e ne ribalta il tratto successivo rispetto alla retta di quota b, terminando in $2b - W_T$. Le due traiettorie hanno la medesima probabilità.

Nella formulazione appena illustrata il risultato riguarda un moto browniano privo di drift. L'estensione al caso con drift, necessaria per il moto geometrico browniano, si ottiene mediante un opportuno cambiamento di misura e conduce a espressioni analoghe, nelle quali compaiono la funzione di distribuzione cumulativa della normale standard e un fattore correttivo dipendente dal rapporto tra il livello della barriera e il prezzo iniziale del sottostante. È per questa ragione che, come si vedrà nel Capitolo 3, le formule di valutazione delle opzioni barriera conservano la struttura della formula di Black-Scholes, arricchita da termini che incorporano la posizione della barriera.

Nella forma qui presentata il risultato non è quindi estendibile ai processi con salti, ed è proprio il venir meno di questa proprietà a generare il fenomeno dell'*overshoot* anticipato nel paragrafo 2.3.2: quando la traiettoria oltrepassa la soglia mediante un salto, il valore assunto nell'istante di attraversamento eccede la barriera di una quantità aleatoria, e la corrispondenza biunivoca sulla quale si fonda la riflessione viene meno.

Resta infine un'ultima osservazione, di carattere contrattuale piuttosto che matematico. Il first passage time formalizza una nozione ben precisa di attraversamento della barriera, fondata sul semplice contatto istantaneo con il livello prefissato. L'evento $\tau_B \leq T$ si verifica infatti anche quando il sottostante raggiunge la barriera per un solo istante, cioè per un intervallo temporale di misura nulla.

Questa rappresenta una convenzione contrattuale, non una necessità matematica. Come discusso nel Capitolo 1, esistono valide ragioni per interrogarsi sulla sua adeguatezza in determinate condizioni di mercato. Se una parte delle escursioni di prezzo è di natura puramente transitoria, come nel caso dei premi associati all'incertezza geopolitica o delle anomalie osservate nell'aprile 2020, attribuire al semplice contatto con la barriera gli stessi effetti di una variazione persistente può risultare economicamente poco realistico.

Le opzioni parigine, introdotte nel paragrafo 2.4.1, sostituiscono a questa logica un criterio basato sulla permanenza oltre la soglia. Dal punto di vista probabilistico, ciò comporta il passaggio dalla teoria del first passage time a quella delle escursioni browniane e dei tempi di occupazione, strumenti che saranno approfonditi nel Capitolo 4.

2.6 Il metodo Monte Carlo per le opzioni path-dependent

I paragrafi precedenti hanno stabilito che la valutazione risk-neutral rimane valida per qualunque funzionale misurabile della traiettoria, ma non hanno indicato come calcolare il valore atteso quando la distribuzione rilevante non è nota in forma chiusa. La simulazione fornisce la risposta operativa a questo problema, ed è lo strumento con cui il Capitolo 5 produrrà i risultati numerici della tesi. I paragrafi che seguono ne illustrano il fondamento, lo schema di generazione delle traiettorie e le distorsioni specifiche che emergono quando il payoff dipende dall'attraversamento di una soglia.

2.6.1 I vantaggi della simulazione per i payoff path-dependent

Il metodo Monte Carlo, introdotto nella valutazione delle opzioni da Boyle (1977), consente di stimare il prezzo di un derivato simulando un elevato numero di traiettorie del sottostante sotto la misura risk-neutral e calcolando la media dei payoff opportunamente attualizzati. Il fondamento teorico del metodo è diretto: esso costituisce l'implementazione numerica della formula di valutazione presentata nel paragrafo 2.2.4.
L'impiego della simulazione nel presente lavoro è motivato da tre ragioni principali.

Per le opzioni parigine non sono generalmente disponibili espressioni analitiche nel dominio del tempo; i risultati noti sono formulati in termini di trasformate di Laplace e richiedono procedure di inversione numerica. Inoltre, poiché uno degli obiettivi della tesi è confrontare sistematicamente diverse tipologie di strumenti, risulta particolarmente conveniente adottare un approccio unitario basato sulla simulazione.

Modificare il modello che descrive il sottostante, introducendo ad esempio salti oppure volatilità stocastica, richiede soltanto un adattamento dello schema di simulazione, senza alterare l'impostazione generale della procedura di valutazione. Tale caratteristica è essenziale, poiché nel Capitolo 5 i medesimi contratti saranno valutati sotto specificazioni alternative del processo, affrontando il problema di specificazione sollevato nel paragrafo 2.3.3.

La simulazione Monte Carlo consente di valutare qualsiasi funzionale della traiettoria che sia numericamente calcolabile, permettendo quindi di trattare, senza modifiche sostanziali

dell'algoritmo, le principali varianti delle opzioni parigine.
Il principale limite del metodo è rappresentato dalla sua velocità di convergenza. L'errore standard dello stimatore decresce infatti proporzionalmente a $1/\sqrt{n}$, dove n indica il numero di traiettorie simulate. Ne consegue che una riduzione dell'errore di un fattore dieci richiede un numero di simulazioni cento volte maggiore, rendendo particolarmente importanti le tecniche di riduzione della varianza (Boyle, Broadie e Glasserman 1997; Glasserman 2003), che saranno discusse nei paragrafi successivi.

2.6.2 La simulazione delle traiettorie

Sotto la misura risk-neutral, il moto geometrico browniano ammette una soluzione in forma chiusa, consentendo di simulare esattamente i valori del processo nei tempi di osservazione, senza introdurre errori di discretizzazione. Suddividendo l'intervallo $[0, T]$ in m sottointervalli di ampiezza $\Delta t = T/m$, la dinamica simulata è data da

$$S_{t_{i+1}} = S_{t_i} \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\, Z_{i+1}\right], \tag{2.28}$$

dove $Z_1, \ldots, Z_m$ sono variabili aleatorie indipendenti con distribuzione normale standard. Lo schema è detto esatto perché la distribuzione congiunta dei valori simulati coincide con quella del processo continuo negli stessi istanti di osservazione.
Nella configurazione di maggiore interesse per il presente lavoro il sottostante è tuttavia il prezzo futures. Come sarà mostrato nel paragrafo 3.2.1, sotto la misura risk-neutral il prezzo futures è una martingala e la sua dinamica è priva di deriva; lo schema di simulazione si riduce pertanto a

$$F_{t_{i+1}} = F_{t_i} \exp\left[-\frac{\sigma^2}{2}\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\, Z_{i+1}\right], \tag{2.29}$$

Nel caso di un'opzione europea è sufficiente scegliere $m = 1$, poiché il payoff dipende esclusivamente dal valore terminale del sottostante. Per un'opzione path-dependent, invece, è necessario simulare l'intera traiettoria; di conseguenza, la scelta del numero di intervalli m diventa un parametro fondamentale.

2.6.3 La stima del prezzo

Una volta generate n traiettorie indipendenti del sottostante, si calcola il payoff $f_T^{(j)}$ associato a ciascuna traiettoria e si ottiene la seguente stima del prezzo del derivato:

$$\hat{V}_0 = e^{-rT}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_T^{(j)}. \tag{2.30}$$

Per la legge dei grandi numeri, lo stimatore converge quasi certamente al valore teorico del contratto. Inoltre, per il teorema del limite centrale, l'errore di stima è asintoticamente distribuito secondo una normale con deviazione standard pari a $s/\sqrt{n}$, dove s indica la deviazione standard campionaria dei payoff *attualizzati* $e^{-rT} f_T^{(j)}$. Un intervallo di confidenza al 95% è quindi dato da

$$\hat{V}_0 \pm 1.96 \, \frac{s}{\sqrt{n}}. \tag{2.31}$$

La presentazione dell'intervallo di confidenza non rappresenta un'informazione accessoria, ma un elemento essenziale dell'analisi: un prezzo ottenuto mediante simulazione Monte Carlo privo di una misura della propria incertezza statistica non può essere adeguatamente interpretato né confrontato con altri risultati. Per questo motivo, il Capitolo 5 riporterà sistematicamente gli intervalli di confidenza associati alle stime ottenute.

2.6.4 L'applicazione alle opzioni a soglia e il bias di monitoraggio

Per un'opzione europea la simulazione con $m = 1$ è esatta, poiché il payoff dipende esclusivamente dal valore terminale del sottostante. Per un'opzione a soglia, invece, nessuna discretizzazione finita è esatta. La ragione è anzitutto concettuale: la simulazione osserva la traiettoria soltanto negli istanti della griglia temporale, mentre la clausola contrattuale fa riferimento al comportamento del processo in tempo continuo.

Ne consegue che una traiettoria può oltrepassare la soglia tra due istanti di osservazione e rientrare senza che la simulazione ne rilevi l'attraversamento. La probabilità di attraversamento della barriera risulta quindi sistematicamente sottostimata. Ne consegue che il prezzo di un'opzione knock-out viene sovrastimato, poiché il contratto sopravvive più spesso di quanto dovrebbe, mentre quello di un'opzione knock-in viene sottostimato per la ragione opposta. Si tratta di una distorsione che non si attenua aumentando il numero di traiettorie simulate, poiché dipende dalla finezza della griglia e non dalla dimensione del campione, e che converge lentamente a zero all'aumentare del numero di intervalli temporali. La letteratura ha proposto diversi metodi di correzione, tra cui quello di Broadie, Glasserman e Kou (1997), la cui applicazione sarà discussa nel Capitolo 5.

Nel caso delle opzioni parigine il problema assume una forma ulteriore. Non è infatti sufficiente rilevare l'attraversamento della soglia, ma occorre anche misurare la durata dell'escursione. Su una griglia discreta essa viene approssimata contando gli istanti di osservazione nei quali il sottostante si trova oltre la barriera. Tale procedura introduce una distorsione ulteriore, il cui segno non è univoco: la durata può risultare sottostimata, poiché si trascurano le frazioni di intervallo all'inizio e alla fine dell'escursione, oppure sovrastimata, quando un breve rientro al di sotto della soglia tra due osservazioni non viene rilevato e due escursioni distinte vengono conteggiate come una sola. La questione

sarà ripresa nel paragrafo 4.5.2.
Ne deriva una questione metodologica che il Capitolo 5 affronterà esplicitamente. Confrontare un'opzione barriera e un'opzione parigina simulate sulla medesima griglia significa infatti confrontare due stimatori affetti da errori di discretizzazione di natura differente. Ignorare questo aspetto rischierebbe di attribuire alla diversa struttura contrattuale una discrepanza riconducibile, almeno in parte, all'approssimazione numerica, compromettendo così la validità della principale conclusione del presente lavoro.

Capitolo 3

Le opzioni barriera

Il Capitolo 2 si è concluso con un'osservazione volutamente lasciata aperta. Il first passage time formalizza una specifica nozione di attraversamento della barriera, fondata sul semplice contatto istantaneo con un livello prefissato: l'evento si considera verificato anche quando il sottostante raggiunge la soglia per un solo istante, ossia per un intervallo temporale di misura nulla. Si è anticipato che tale definizione rappresenta una convenzione contrattuale piuttosto che una necessità matematica e che, nel mercato petrolifero, esistono valide ragioni per metterne in discussione l'adeguatezza.

Il presente capitolo sviluppa entrambe le implicazioni di questa osservazione. Da un lato analizza la struttura contrattuale e il quadro teorico di valutazione delle opzioni barriera, che rappresentano la più diffusa categoria di opzioni esotiche path-dependent e l'unica per la quale, nell'ambito del modello di Black-Scholes-Merton, sia disponibile una trattazione analitica completa. Dall'altro mostra come le principali difficoltà operative di tali strumenti non costituiscano semplici limiti implementativi, ma derivino direttamente dalla modalità con cui la clausola di barriera è definita.

L'idea guida del capitolo può essere formulata fin d'ora. Le opzioni barriera devono la loro ampia diffusione al minor costo rispetto alle corrispondenti opzioni europee, vantaggio che deriva dalla rinuncia alla protezione in determinati scenari di mercato. Tale rinuncia è però regolata da una clausola basata sul semplice contatto con la barriera ed è proprio questa caratteristica a generare una serie di criticità: la discontinuità del payoff e la conseguente instabilità della copertura, la forte dipendenza dalla convenzione di monitoraggio e l'elevata sensibilità a movimenti di prezzo puramente transitori. Nel mercato del greggio, per le caratteristiche empiriche evidenziate nel Capitolo 1, tali criticità risultano particolarmente accentuate. Il capitolo si conclude mostrando come esse possano essere ricondotte a un'unica causa e anticipando il criterio alternativo che sarà sviluppato nel Capitolo 4.

L'esposizione è articolata in cinque sezioni. La prima descrive la struttura contrattuale delle opzioni barriera e ne presenta la classificazione. La seconda analizza la loro valu-

tazione nel modello di Black-Scholes-Merton, privilegiando l'interpretazione economica dei risultati rispetto alla derivazione analitica delle formule. La terza estende la trattazione alle opzioni a doppia barriera. La quarta, che costituisce il nucleo del capitolo, approfondisce le principali criticità di questi strumenti. La quinta, infine, ne individua la radice comune e introduce il criterio alternativo sul quale si fondano le opzioni parigine, oggetto del capitolo successivo.

3.1 La struttura contrattuale delle opzioni barriera

Questa sezione definisce la struttura contrattuale delle opzioni barriera e ne presenta la classificazione. Dopo aver introdotto le otto tipologie standard che derivano dalla combinazione dei tre criteri di classificazione, viene esaminata la relazione di parità che lega le configurazioni knock-in e knock-out, e vengono infine richiamate le principali varianti contrattuali che si incontrano nella pratica di mercato.

3.1.1 Le otto tipologie standard

Un'opzione barriera è un contratto derivato il cui payoff coincide con quello di un'opzione europea standard, la cui efficacia è tuttavia subordinata al comportamento del sottostante rispetto a un livello prefissato B, detto barriera, osservato lungo l'intera vita del contratto oppure durante uno specifico intervallo di monitoraggio.
La classificazione di questi strumenti si basa su tre criteri indipendenti, dalla cui combinazione derivano le otto tipologie standard comunemente riportate in letteratura.
Il primo criterio riguarda la natura della clausola contrattuale. Nelle opzioni *knock-out* il contratto si estingue nel momento in cui il sottostante raggiunge la barriera, con la conseguente perdita di ogni diritto residuo da parte del detentore. Nelle opzioni *knock-in*, al contrario, il contratto è inizialmente inattivo e acquista efficacia soltanto al verificarsi dell'evento di barriera, assumendo da quel momento il profilo di una corrispondente opzione europea.
Il secondo criterio concerne la posizione della barriera rispetto al prezzo iniziale del sottostante. Si parla di configurazione up quando $B > F_0$, nel qual caso l'evento rilevante è rappresentato da un movimento al rialzo del prezzo; si parla invece di configurazione down quando $B < F_0$, per la quale il raggiungimento della barriera avviene in seguito a un movimento al ribasso.
Il terzo e ultimo criterio riguarda la natura dell'opzione sottostante, che può assumere la forma di una call oppure di una put.
Adottando la formalizzazione introdotta nel paragrafo 2.5.1, il payoff di una call up-and-out

con barriera $B > F_0$ può essere espresso come

$$f_T = (F_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{\tau_B > T\}} \tag{3.1}$$

dove

$$\tau_B = \inf \{ t \geq 0 : F_t \geq B \} \tag{3.2}$$

rappresenta il *first passage time* del livello B, mentre $1_{\{\cdot\}}$ indica la funzione indicatrice. La corrispondente call up-and-in presenta invece il payoff

$$f_T = (F_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{\tau_B \leq T\}} \tag{3.3}$$

Le restanti sei configurazioni si ottengono sostituendo il payoff terminale della call con quello della put e, nel caso delle configurazioni down, ridefinendo il *first passage time* come

$$\tau_B = \inf \{ t \geq 0 : F_t \leq B \} \tag{3.4}$$

Tabella 3.1: Le otto tipologie standard di opzioni barriera. Si indicano con $M_T = \max_{t\in[0,T]} F_t$ e $m_T = \min_{t\in[0,T]} F_t$ rispettivamente il massimo e il minimo raggiunti dal sottostante durante la vita del contratto.

Tipologia	Barriera	Clausola	Payoff
Call up-and-out	$B > F_0$	knock-out	$(F_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{M_T < B\}}$
Call up-and-in	$B > F_0$	knock-in	$(F_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{M_T \geq B\}}$
Call down-and-out	$B < F_0$	knock-out	$(F_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{m_T > B\}}$
Call down-and-in	$B < F_0$	knock-in	$(F_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{m_T \leq B\}}$
Put up-and-out	$B > F_0$	knock-out	$(K - F_T)^+ \mathbf{1}_{\{M_T < B\}}$
Put up-and-in	$B > F_0$	knock-in	$(K - F_T)^+ \mathbf{1}_{\{M_T \geq B\}}$
Put down-and-out	$B < F_0$	knock-out	$(K - F_T)^+ \mathbf{1}_{\{m_T > B\}}$
Put down-and-in	$B < F_0$	knock-in	$(K - F_T)^+ \mathbf{1}_{\{m_T \leq B\}}$

Due precisazioni terminologiche meritano infine di essere richiamate.

La prima riguarda le configurazioni che la letteratura definisce *reverse barrier options*, nelle quali la barriera è collocata dal lato in cui l'opzione risulta già in-the-money. È il caso, ad esempio, della call up-and-out con $K < B$, che si estingue proprio quando il prezzo del sottostante evolve nella direzione più favorevole per il detentore. Quando invece $B \leq K$ la barriera viene raggiunta mentre l'opzione è ancora out-of-the-money, e la configurazione non rientra in questa categoria. Tali configurazioni presentano le maggiori difficoltà sia in termini di valutazione sia di copertura, per le ragioni che saranno discusse nel paragrafo 3.4.1, e costituiranno pertanto il principale oggetto dell'analisi successiva.

La seconda precisazione riguarda invece la relazione tra la barriera e il prezzo di esercizio. Quando la barriera è collocata dal lato out-of-the-money rispetto allo strike, il payoff risulta continuo nel punto di attraversamento e lo strumento presenta un comportamento sensibilmente più regolare sotto il profilo del rischio. Per questo motivo le formule di valutazione illustrate nel paragrafo 3.2 distinguono i casi $B \leq K$ e $B > K$, ai quali corrispondono espressioni analitiche differenti.

3.1.2 La relazione di parità in-out

Tra le opzioni knock-in e knock-out sussiste una relazione di parità di fondamentale importanza sia sul piano teorico sia su quello applicativo (Hull 2021). Si consideri un portafoglio costituito da una posizione lunga in una knock-in e da una posizione lunga nella corrispondente knock-out, aventi il medesimo sottostante, lo stesso prezzo di esercizio K, la stessa scadenza T e la medesima barriera B.
Qualunque sia la traiettoria seguita dal sottostante, uno soltanto dei due contratti può risultare attivo alla scadenza. Se la barriera viene raggiunta prima di T, la knock-out si estingue e la knock-in si attiva; in caso contrario, la knock-in rimane inattiva e la knock-out sopravvive fino alla scadenza. In entrambi gli scenari, il portafoglio replica esattamente il payoff di una corrispondente opzione europea. [1] Per il principio di assenza di arbitraggio, richiamato nel paragrafo 2.2.1, i due portafogli devono quindi avere il medesimo valore in ogni istante precedente la scadenza, da cui segue

$$c_{\text{in}} + c_{\text{out}} = c \tag{3.5}$$

dove c rappresenta il premio della corrispondente call europea. Una relazione del tutto analoga vale anche per le put.
Questa identità, nota come in-out parity, presenta caratteristiche del tutto analoghe alla put-call parity discussa nel paragrafo 2.1.2. La sua validità non dipende infatti dallo specifico modello di valutazione adottato, ma deriva esclusivamente dal principio di assenza di arbitraggio. Essa continua pertanto a valere anche quando le ipotesi del modello di Black-Scholes-Merton vengono rilassate. Ne consegue che, una volta noto il prezzo di una delle due tipologie, quello dell'altra può essere ricavato direttamente per differenza.
Nel presente lavoro il principale interesse della relazione è tuttavia di natura metodologica. Nel Capitolo 5 la in-out parity sarà utilizzata sistematicamente come strumento di verifica delle implementazioni numeriche: una stima Monte Carlo del prezzo di una knock-in e della corrispondente knock-out dovrà risultare compatibile, entro il relativo intervallo di

[1] Formalmente, $(F_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{\tau_B \leq T\}} + (F_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{\tau_B > T\}} = (F_T - K)^+$, poiché gli eventi $\{\tau_B \leq T\}$ e $\{\tau_B > T\}$ costituiscono una partizione dello spazio campionario.

confidenza, con il prezzo dell'opzione europea. Un eventuale scostamento significativo rappresenterebbe un'indicazione della presenza di errori di implementazione oppure di distorsioni dovute alla discretizzazione temporale.
È opportuno osservare, infine, che la relazione presuppone che le due opzioni condividano la medesima convenzione di monitoraggio. Questa condizione è meno banale di quanto possa apparire: se una delle due fosse monitorata in tempo continuo e l'altra in tempo discreto, la parità cesserebbe di essere valida e la discrepanza risultante fornirebbe una misura diretta della distorsione che sarà analizzata nel paragrafo 3.4.2.

3.1.3 Le varianti contrattuali: rebate, barriere parziali e monitoraggio discreto

La struttura contrattuale descritta nei paragrafi precedenti ammette numerose varianti, sviluppate nel tempo per adattare le opzioni barriera a specifiche esigenze di copertura. Tra queste, tre assumono particolare rilievo ai fini della trattazione successiva.

Il rebate

Nella formulazione standard, il detentore di una knock-out che venga estinta in seguito al raggiungimento della barriera non riceve alcun rimborso e perde integralmente il premio versato. Numerosi contratti prevedono invece il pagamento di una somma prefissata R, detta rebate, corrisposta al momento dell'attraversamento della barriera oppure alla scadenza originaria del contratto[2]. La presenza del rebate attenua la discontinuità del payoff. Qualora il suo ammontare coincidesse con il valore residuo dell'opzione al momento dell'estinzione, tale discontinuità verrebbe addirittura eliminata. Ne consegue, tuttavia, una riduzione del vantaggio di costo rispetto alla corrispondente opzione europea. Il rebate rappresenta quindi il più semplice rimedio contrattuale alle criticità che saranno analizzate nel paragrafo 3.4: esso interviene sulle conseguenze economiche dell'attraversamento della barriera, senza modificarne la definizione.
È inoltre opportuno osservare che la presenza di un rebate rende non più valida la relazione di in-out parity discussa nel paragrafo precedente. In caso di attraversamento della barriera, infatti, il portafoglio costituito dalla knock-in e dalla knock-out produrrebbe il payoff dell'opzione europea maggiorato dell'importo del rebate. La relazione di parità deve pertanto intendersi riferita alle formulazioni prive di tale clausola.

[2]La distinzione incide sul valore del contratto. Nel primo caso il valore attuale del rebate è $R\,\mathbb{E}^{Q}\left[e^{-r\tau_B}\mathbf{1}_{\{\tau_B\le T\}}\right]$ e richiede la distribuzione del first passage time; nel secondo caso si riduce a $R\,e^{-rT}\,Q(\tau_B \le T)$, richiedendo soltanto la probabilità di attraversamento della barriera.

Le barriere parziali e a finestra

Nella configurazione standard la barriera viene monitorata per l'intera durata del contratto. Le opzioni a barriera parziale limitano invece l'osservazione a un intervallo iniziale oppure finale della vita residua, mentre le opzioni a finestra restringono il monitoraggio a un intervallo interno $[T_1, T_2]$, con $0 < T_1 < T_2 < T$.
Tali configurazioni rispondono all'esigenza di escludere dal monitoraggio periodi nei quali il sottostante è ritenuto maggiormente esposto a oscillazioni temporanee o particolarmente erratiche, rappresentando così un secondo tentativo di attenuare la sensibilità dello strumento ai superamenti transitori della barriera. La loro valutazione richiede la distribuzione congiunta del massimo del processo sul sottointervallo di osservazione e del valore terminale del sottostante, problema affrontato, tra gli altri, da Heynen e Kat (1994) e Carr (1995).

Il monitoraggio discreto

La formulazione teorica delle opzioni barriera presuppone che il sottostante venga osservato in tempo continuo. Nella prassi contrattuale, e in particolare nel mercato *over-the-counter* delle commodity, il monitoraggio avviene invece con frequenza discreta, facendo generalmente riferimento ai prezzi di regolamento giornalieri e, in alcuni casi, a quelli settimanali.
Dal punto di vista formale, l'evento di barriera non è più definito attraverso il first passage time τ_B, ma rispetto a un insieme finito di istanti di osservazione $\{t_1, \ldots, t_m\}$. Di conseguenza, la condizione di sopravvivenza di una call up-and-out diventa

$$\max_{1 \le i \le m} F_{t_i} < B \tag{3.6}$$

anziché

$$\max_{0 \le t \le T} F_t < B \tag{3.7}$$

Quella che potrebbe apparire una semplice modifica implementativa produce in realtà effetti di primo ordine sul valore del contratto e costituisce una delle principali fonti di model risk. Le implicazioni di questa differenza saranno analizzate nel paragrafo 3.4.2.

3.2 La valutazione in forma chiusa

Questa sezione presenta la valutazione delle opzioni barriera in forma chiusa. Dopo aver illustrato la struttura della soluzione e gli strumenti probabilistici su cui si fonda, vengono ricavate le formule per la call up-and-out e presentata la parametrizzazione che consente

di trattare tutte le tipologie mediante un'unica espressione. La sezione si chiude con le verifiche di coerenza dei risultati ottenuti.

3.2.1 La struttura della soluzione

La valutazione delle opzioni barriera nel modello di Black-Scholes-Merton ammette una soluzione in forma chiusa. Merton (1973) ne ricavò il primo risultato per la call down-and-out, successivamente generalizzato da Reiner e Rubinstein (1991) all'intera famiglia delle otto tipologie standard.
Gli strumenti teorici necessari per ottenere tale soluzione sono stati introdotti nel paragrafo 2.5. La formula generale di valutazione in misura risk-neutral, espressione (2.13), richiede infatti il calcolo del valore atteso del payoff sotto la misura Q. Nel caso delle opzioni barriera, il payoff è dato dal prodotto tra quello della corrispondente opzione europea e la funzione indicatrice dell'evento di attraversamento della barriera, come illustrato nel paragrafo 3.1.1. La valutazione richiede pertanto la distribuzione congiunta del valore terminale F_T e del massimo, oppure del minimo, raggiunto dal processo nell'intervallo $[0, T]$, distribuzione che può essere ottenuta mediante il principio di riflessione.
Conformemente a quanto stabilito nel paragrafo 2.1.3, il sottostante considerato è il prezzo futures, la cui dinamica sotto la misura risk-neutral è priva di deriva:

$$dF_t = \sigma F_t \, d\widetilde{W}_t \tag{3.8}$$

Questa scelta comporta una significativa semplificazione delle espressioni analitiche. Nella formulazione generale di Reiner e Rubinstein il parametro λ dipende dal costo di mantenimento del sottostante; nel caso del futures esso assume invece il valore costante

$$\lambda = \frac{0 + \sigma^2/2}{\sigma^2} = \frac{1}{2} \tag{3.9}$$

Di conseguenza, gli esponenti che compaiono nelle formule si riducono rispettivamente a $2\lambda = 1$ e $2\lambda - 2 = -1$.
Il passaggio dal moto browniano standard, per il quale il principio di riflessione è stato introdotto nel paragrafo 2.5.2, al moto geometrico browniano richiede, nella formulazione generale, un opportuno cambiamento di misura che tenga conto della deriva del processo. [3] Si ottiene così il seguente risultato.

[3] Nel caso del prezzo futures il logaritmo del processo presenta una deriva pari a $-\sigma^2/2$ sotto la misura risk-neutral, circostanza che conduce alla semplificazione sopra richiamata. Più in generale, con costo di mantenimento non nullo, il termine di potenza presente nelle formule di Reiner e Rubinstein deriva dal cambiamento di misura necessario per eliminare la deriva del processo. Per una trattazione sistematica si

Sia $B < F_0$ e $B \leq K$. Il premio di una call down-and-in è dato da

$$c_{\text{down-and-in}} = e^{-rT}\left[B\,N(y) - K\frac{F_0}{B}N\left(y - \sigma\sqrt{T}\right)\right]. \tag{3.10}$$

dove

$$y = \frac{\ln\left(\frac{B^2}{F_0 K}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}. \tag{3.11}$$

Come nel paragrafo 2.2.5, $N(\cdot)$ indica la funzione di ripartizione della distribuzione normale standard. Il premio della corrispondente call down-and-out si ottiene immediatamente applicando la relazione di in-out parity:

$$c_{\text{down-and-out}} = c - c_{\text{down-and-in}} \tag{3.12}$$

dove c rappresenta il premio della corrispondente call europea sul futures, calcolato mediante la formula di Black richiamata nel paragrafo 2.1.3.
La struttura della soluzione rimane strettamente analoga a quella della formula di Black. Il valore dell'opzione è infatti espresso come differenza tra due termini, entrambi attualizzati al tasso privo di rischio e ponderati mediante la funzione di ripartizione della normale standard. La presenza della barriera introduce tuttavia una dipendenza esplicita dal rapporto tra il livello della barriera e il prezzo corrente del futures, oltre a una diversa parametrizzazione degli argomenti delle funzioni di ripartizione. Tali modifiche riflettono l'informazione aggiuntiva contenuta nell'evento di attraversamento della barriera e rappresentano la naturale conseguenza dell'applicazione del principio di riflessione.

3.2.2 L'interpretazione economica dei termini

La formula acquista un significato più immediato se viene riscritta in una forma equivalente, che ne mette in evidenza la struttura. Raccogliendo il fattore F_0/B, si ottiene

$$c_{\text{down-and-in}} = \frac{F_0}{B}\,c_{\text{black}}\left(\frac{B^2}{F_0}, K, T\right) \tag{3.13}$$

dove $c_{black}(\cdot)$ indica il premio di una call europea calcolato mediante la formula di Black, valutato però in corrispondenza di un prezzo futures fittizio pari a B^2/F_0 , anziché al prezzo corrente F_0.
Questa rappresentazione mette chiaramente in luce il ruolo del principio di riflessione. La

rinvia a Shreve (2004).

quantità B^2/F_0 rappresenta infatti il punto riflesso di F_0 rispetto alla barriera. In termini logaritmici,

$$\ln \frac{B^2}{F_0} = 2 \ln B - \ln F_0$$

ossia il punto simmetrico di $\ln F_0$ rispetto alla retta di quota $\ln B$, secondo la costruzione geometrica illustrata nella Figura 2.3. Il valore della knock-in può quindi essere interpretato come quello di una corrispondente opzione europea valutata nel punto riflesso, corretto mediante il fattore F_0/B. La corrispondenza tra traiettorie stabilita dal principio di riflessione si traduce così, sul piano della valutazione, in una relazione tra due opzioni europee.

Anche il fattore F_0/B ha una precisa interpretazione economica. Nella formulazione generale di Reiner e Rubinstein esso compare come un termine di potenza, il cui esponente dipende dalla deriva del processo e ne corregge l'effetto sulla simmetria delle traiettorie. Nel caso dei contratti futures tale correzione si semplifica sensibilmente: sotto la misura risk-neutral il prezzo futures è una martingala e il fattore si riduce al semplice rapporto F_0/B, che riflette esclusivamente la diversa scala dei due prezzi messi in corrispondenza dalla riflessione.

Questa semplificazione non rappresenta soltanto un vantaggio analitico. Essa mostra come la valutazione delle opzioni barriera risulti particolarmente naturale proprio nel contesto di maggiore interesse per il presente lavoro, nel quale il sottostante è costituito da contratti futures sul greggio. Le criticità che saranno esaminate nel paragrafo 3.4 non derivano quindi dalla complessità del modello di valutazione, bensì dalla struttura contrattuale dello strumento.

Da questa interpretazione emerge anche la ragione economica della diffusione delle opzioni barriera. Il premio di una knock-out è ottenuto sottraendo dal valore dell'opzione europea quello della corrispondente knock-in e risulta pertanto sempre inferiore. La differenza aumenta quanto maggiore è il valore della knock-in, ossia quanto più la barriera è prossima al prezzo corrente del futures oppure quanto più elevata è la volatilità. Entrambe le circostanze accrescono infatti la probabilità di attraversamento della barriera e, di conseguenza, la quota di scenari nei quali il detentore rinuncia alla protezione. Il minor costo della copertura, richiamato nel paragrafo 2.4.2 come principale motivazione economica di questi contratti, trova così una spiegazione naturale nella riduzione della protezione offerta rispetto a un'opzione europea.

Un'ultima osservazione riguarda il ruolo della volatilità. Nella formula il parametro σ compare sia negli argomenti delle funzioni di ripartizione sia nel premio dell'opzione europea calcolato mediante la formula di Black, influenzando il valore del contratto attraverso canali differenti. Ne consegue che la relazione tra premio e volatilità, monotona crescente nel caso delle opzioni europee come illustrato nel paragrafo 2.1.3, non conserva necessariamente tale proprietà nel caso delle opzioni barriera. Questo aspetto sarà ripreso

nel paragrafo 3.4.1.

3.2.3 La parametrizzazione di Reiner e Rubinstein

Il risultato illustrato nel paragrafo precedente può essere esteso all'intera famiglia delle opzioni barriera standard. Reiner e Rubinstein (1991) hanno infatti mostrato che i premi delle otto tipologie possono essere ricondotti a combinazioni lineari di un numero limitato di termini elementari, ciascuno funzione dei parametri del contratto e di due indicatori di segno: η, pari a $+1$ per le configurazioni down e a -1 per quelle up, e φ, pari a $+1$ per le call e a -1 per le put. La combinazione da utilizzare dipende sia dalla tipologia del contratto sia dalla posizione relativa della barriera rispetto al prezzo di esercizio, distinguendo i casi $B \leq K$ e $B > K$.
Limitandosi, come nel seguito del presente lavoro, ai contratti privi di rebate e ponendo $\lambda = 1/2$, come stabilito nel paragrafo 3.2.1, i quattro termini elementari assumono la forma

$$A_1 = \varphi e^{-rT} \left[F_0 \, N(\varphi x_1) - K \, N\Big(\varphi x_1 - \varphi\sigma\sqrt{T}\Big) \right] \tag{3.14}$$

$$A_2 = \varphi e^{-rT} \left[F_0 \, N(\varphi x_2) - K \, N\Big(\varphi x_2 - \varphi\sigma\sqrt{T}\Big) \right] \tag{3.15}$$

$$A_3 = \varphi e^{-rT} \left[B \, N(\eta y_1) - K \, \frac{F_0}{B} \, N\Big(\eta y_1 - \eta\sigma\sqrt{T}\Big) \right] \tag{3.16}$$

$$A_4 = \varphi e^{-rT} \left[B \, N(\eta y_2) - K \, \frac{F_0}{B} \, N\Big(\eta y_2 - \eta\sigma\sqrt{T}\Big) \right] \tag{3.17}$$

dove

$$x_1 = \frac{\ln(F_0/K)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}, \qquad y_1 = \frac{\ln\big(B^2/(F_0 K)\big)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}$$

$$x_2 = \frac{\ln(F_0/B)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}, \qquad y_2 = \frac{\ln(B/F_0)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}$$

La parametrizzazione risulta pienamente coerente con i risultati già ottenuti. In particolare, x_1 coincide con la quantità d_1 della formula di Black, per cui il termine A_1, valutato con $\varphi = 1$, restituisce il premio della corrispondente call europea sul futures. Analogamente, y_1 coincide con la quantità introdotta nel paragrafo 3.2.1 e il termine A_3, posto $\eta = \varphi = 1$, riproduce il valore della call down-and-in precedentemente derivato.

Tabella 3.2: Combinazione dei termini elementari per le quattro tipologie knock-in, nella formulazione priva di rebate. I premi delle corrispondenti opzioni knock-out si ottengono per differenza dal premio europeo, in forza della in-out parity.

Tipologia	η	φ	Caso	Combinazione
Call down-and-in	$+1$	$+1$	$K \geq B$	A_3
			$K < B$	$A_1 - A_2 + A_4$
Call up-and-in	-1	$+1$	$K \geq B$	A_1
			$K < B$	$A_2 - A_3 + A_4$
Put down-and-in	$+1$	-1	$K \geq B$	$A_2 - A_3 + A_4$
			$K < B$	A_1
Put up-and-in	-1	-1	$K \geq B$	$A_1 - A_2 + A_4$
			$K < B$	A_3

Merita inoltre di essere evidenziato un aspetto della tabella che risulterà rilevante nel prosieguo dell'analisi. Nelle configurazioni reverse, ossia quando la barriera è collocata dal lato in cui l'opzione è inizialmente in-the-money, il premio è ottenuto come differenza tra termini di entità molto simile. Di conseguenza, piccole variazioni dei parametri del contratto, oppure errori numerici nella valutazione delle funzioni di ripartizione, possono produrre variazioni relativamente ampie nel risultato finale. Si tratta della prima manifestazione, ancora esclusivamente di natura computazionale, della maggiore fragilità di queste configurazioni, che nel paragrafo 3.4 sarà analizzata dal punto di vista economico e della copertura.

3.2.4 Le verifiche di coerenza delle formule chiuse

Prima di procedere è opportuno verificare che le formule di valutazione presentino il comportamento atteso in alcuni casi limite. Tali verifiche non avranno soltanto un valore illustrativo, ma costituiscono anche i principali controlli che verranno utilizzati nel Capitolo 5 per validare le implementazioni numeriche. Anticiparle in questa sede consente quindi di chiarirne il significato teorico prima della loro applicazione pratica.

Barriera remota

Per una call down-and-out, quando B tende a zero la probabilità di attraversamento diviene trascurabile e il contratto deve convergere alla corrispondente opzione europea. Si ottiene pertanto

$$\lim_{B \to 0} c_{\text{down-and-in}} = 0, \qquad \lim_{B \to 0} c_{\text{down-and-out}} = c. \tag{3.18}$$

Questo comportamento è coerente con la struttura della soluzione. Sebbene il fattore F_0/B diverga, l'argomento y della funzione di ripartizione tende a meno infinito con velocità tale da far convergere a zero il termine complessivo.

Barriera prossima al prezzo corrente

In modo del tutto analogo, nel caso di una call up-and-out il premio tende a zero quando la barriera si avvicina a F_0 dall'alto, poiché l'attraversamento diviene praticamente certo.

In-out parity

La somma dei premi della knock-in e della corrispondente knock-out deve coincidere con il premio dell'opzione europea. Nel caso della derivazione presentata nel paragrafo precedente questa proprietà è verificata per costruzione, avendo ricavato il valore della knock-out per differenza. Quando invece entrambe le tipologie vengono valutate indipendentemente mediante la parametrizzazione di Reiner e Rubinstein, la in-out parity diventa un controllo effettivo della correttezza delle formule implementate.

Barriera già attraversata

Se, in una configurazione up, risulta $B \leq F_0$, l'evento di barriera si è già verificato all'istante iniziale. La knock-out perde quindi immediatamente efficacia, mentre la knock-in coincide con la corrispondente opzione europea. Pur trattandosi di un caso degenere, esso costituisce un utile controllo della correttezza delle condizioni logiche adottate nell'implementazione.

Monotonia rispetto alla barriera

Il valore di una knock-out deve variare monotonamente con la posizione della barriera. All'aumentare della distanza tra la barriera e il prezzo corrente del futures diminuisce infatti la probabilità di attraversamento e il premio cresce progressivamente, avvicinandosi a quello dell'opzione europea. La verifica di tale proprietà su un insieme di livelli della barriera rappresenta un controllo più severo dei precedenti, poiché consente di individuare errori che potrebbero non emergere dai soli casi limite.
La Figura 3.1 offre una rappresentazione grafica di quest'ultima proprietà.

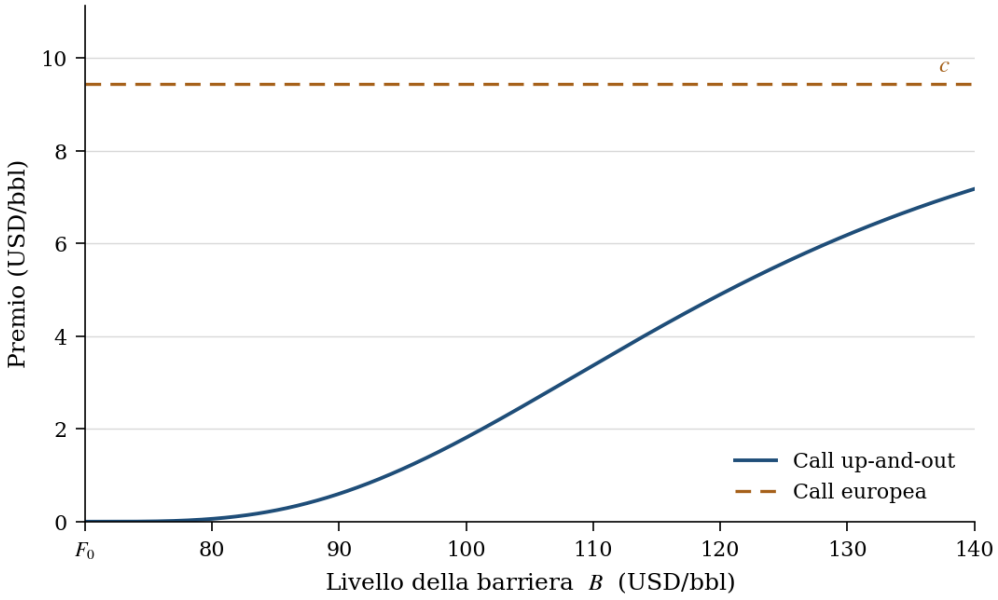

Figura 3.1: Premio di una call up-and-out sul futures e della corrispondente call europea, al variare del livello della barriera. I valori sono calcolati per $F_0 = K = 70$, $\sigma = 35\%$, $r = 3\%$ e $T = 1$; il premio dell'opzione europea, indipendente da B, è riportato come riferimento.

Il grafico evidenzia un aspetto che le sole formule difficilmente riescono a trasmettere. Assumendo una volatilità del 35%, coerente con i livelli ordinari osservati nel mercato del greggio, una barriera collocata al doppio del prezzo corrente lascia il premio della call up-and-out pari a 7,17 dollari, contro i 9,44 dollari della corrispondente opzione europea. Lo sconto rimane quindi superiore al 24%, nonostante la barriera sia apparentemente molto distante dal prezzo iniziale. La convergenza verso il valore dell'opzione europea risulta pertanto relativamente lenta e suggerisce che, in un mercato caratterizzato da elevata volatilità come quello petrolifero, anche livelli di barriera apparentemente remoti mantengano un'influenza economicamente significativa sul valore del contratto.

3.3 Le opzioni a doppia barriera

Questa sezione estende l'analisi alle opzioni a doppia barriera, nelle quali il contratto è subordinato alla permanenza del sottostante all'interno di un corridoio di prezzo. Dopo averne descritto la struttura contrattuale e le ragioni economiche, viene presentata la soluzione in forma di serie e ne vengono discusse le implicazioni per il mercato del greggio.

3.3.1 La struttura contrattuale e le ragioni economiche

Le opzioni a doppia barriera introducono due livelli di soglia, uno inferiore L e uno superiore U, con $L < F_0 < U$. Nella configurazione *double knock-out*, la più diffusa nella pratica, il contratto si estingue non appena il sottostante attraversa una delle due barriere. Il payoff di una double knock-out call è pertanto

$$f_T = (F_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{\tau_L > T,\, \tau_U > T\}}, \tag{3.19}$$

ossia il payoff della corrispondente opzione europea condizionato al fatto che il prezzo del futures rimanga, per l'intera durata del contratto, all'interno del corridoio (L, U).
La diffusione di questi strumenti nel mercato delle commodity, documentata da Geman e Yor (1996) e Clark (2014), risponde principalmente a due esigenze.
La prima riguarda la riduzione del costo della copertura. Poiché il contratto può estinguersi sia in caso di rialzi sia in caso di ribassi sufficientemente ampi, il premio risulta generalmente inferiore a quello di un'opzione a barriera singola con caratteristiche analoghe. Per un operatore che ritenga improbabili movimenti di prezzo oltre determinate soglie, la doppia barriera consente di concentrare la protezione nell'intervallo ritenuto economicamente rilevante, riducendone il costo.
La seconda riguarda la possibilità di costruire strategie a costo iniziale nullo. Combinando una posizione lunga in una doppia barriera con la vendita di uno strumento complementare è possibile realizzare strutture il cui premio netto sia nullo, soluzione particolarmente apprezzata dagli operatori industriali che intendono eliminare l'esborso iniziale senza rinunciare completamente alla copertura. Molte delle strutture OTC sviluppate sul mercato del greggio rispondono proprio a questa logica: ridurre il costo della protezione accettando che essa operi soltanto entro determinati scenari di mercato.
Nel mercato petrolifero esiste inoltre una motivazione specifica che rende queste opzioni particolarmente interessanti. Come discusso nel paragrafo 1.3.1, la forma della curva dei futures riflette le condizioni del mercato fisico e le aspettative circa l'equilibrio tra domanda, offerta e livelli delle scorte. In molti casi l'operatore non è interessato a scommettere su un preciso livello futuro del prezzo, bensì sul fatto che esso rimanga entro un intervallo ritenuto coerente con tali condizioni di equilibrio. Le opzioni a doppia barriera consentono di rappresentare direttamente questa aspettativa, trasformandola in una clausola contrattuale.
Tale impostazione conserva tuttavia il limite fondamentale già evidenziato per le opzioni a barriera singola: l'uscita dal corridoio è definita dal semplice contatto istantaneo con una delle due soglie. Anche in questo caso, quindi, un'escursione di brevissima durata produce gli stessi effetti di una violazione persistente. Come si vedrà nel Capitolo 4, è proprio questa caratteristica a motivare l'introduzione delle Parisian options, nelle quali

l'evento di barriera richiede una permanenza oltre la soglia per un intervallo minimo di tempo.

3.3.2 La soluzione in serie

La valutazione delle opzioni a doppia barriera risulta significativamente più complessa rispetto al caso a barriera singola. In presenza di una sola soglia, il principio di riflessione consente infatti di associare a ogni traiettoria che attraversa la barriera un'unica traiettoria riflessa, dalla quale discende la soluzione in forma chiusa illustrata nel paragrafo 3.2. Quando le barriere sono due, questo meccanismo non è più sufficiente. Una traiettoria riflessa rispetto alla barriera superiore può infatti attraversare quella inferiore e richiedere una nuova riflessione; quest'ultima può a sua volta oltrepassare nuovamente la barriera opposta, dando origine a un procedimento iterativo che genera una successione infinita di traiettorie immagine.

La soluzione proposta da Kunitomo e Ikeda (1992), sviluppata nel caso generale di barriere anche variabili nel tempo, riflette precisamente questa struttura. Il premio dell'opzione viene espresso come una serie infinita, nella quale ciascun termine rappresenta il contributo di una particolare riflessione ed è riconducibile, nella forma, a un premio di Black ponderato e valutato in corrispondenza di un opportuno punto immagine.[4]

Un'impostazione alternativa è stata proposta da Geman e Yor (1996), che affrontano il problema attraverso la trasformata di Laplace del tempo di uscita dal corridoio e la teoria delle escursioni del moto browniano. Sebbene l'approccio matematico sia differente, esso conduce anch'esso a una soluzione che richiede un passaggio numerico finale, costituito dall'inversione della trasformata. Questa impostazione anticipa una caratteristica che riemergerà nel Capitolo 4, dove la valutazione delle opzioni parigine richiederà strumenti analitici analoghi.

Ai fini del presente lavoro non è necessario riprodurre l'espressione completa della serie, la cui struttura è ampiamente documentata nella letteratura specialistica. Ciò che rileva è il significato economico del risultato: la presenza di una seconda barriera non modifica la logica di valutazione illustrata per le barrier options standard, ma rende il problema sensibilmente più complesso, sostituendo la soluzione compatta del caso a barriera singola con una rappresentazione in serie.

[4] In forma schematica, la soluzione può essere rappresentata come $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\alpha_n \Phi_n - \beta_n \Psi_n\right]$ dove l'indice n identifica le successive riflessioni tra le due barriere, i punti immagine sono generati dalle potenze del rapporto U/L e i coefficienti α_n e β_n svolgono un ruolo analogo a quello del fattore di ponderazione introdotto nel caso della barriera singola.

3.3.3 Convergenza e implicazioni computazionali

La serie proposta da Kunitomo e Ikeda (1992) presenta, nella maggior parte delle applicazioni, una convergenza sufficientemente rapida da consentire un'approssimazione accurata mediante un numero limitato di termini. La velocità di convergenza dipende tuttavia dai parametri del contratto e tende a ridursi in due circostanze ben precise.
La prima si verifica quando le due barriere sono relativamente vicine tra loro. In questo caso il corridoio di oscillazione è ristretto e il numero di riflessioni necessarie per rappresentare correttamente il processo aumenta. La seconda riguarda situazioni caratterizzate da elevata volatilità, nelle quali il sottostante attraversa più frequentemente l'intero intervallo compreso tra le due soglie, rendendo necessario considerare un numero maggiore di traiettorie immagine. Entrambi gli effetti possono essere sintetizzati dal rapporto

$$\frac{\ln(U/L)}{\sigma\sqrt{T}}$$

che esprime l'ampiezza del corridoio in unità di deviazione standard del logaritmo del prezzo. Quanto minore è tale rapporto, tanto più lenta risulta la convergenza della serie.
Questa situazione è particolarmente rilevante nel mercato del greggio. Come illustrato nel paragrafo 1.4.1, la volatilità annualizzata del Brent e del WTI si colloca normalmente tra il 25% e il 40%, raggiungendo valori superiori al 100% durante le fasi di maggiore instabilità. Di conseguenza, un intervallo di prezzo che in altri mercati potrebbe essere considerato relativamente ampio corrisponde, nel caso del petrolio, a un numero ridotto di deviazioni standard, rendendo meno favorevoli le condizioni di convergenza della soluzione analitica.
Questa osservazione conduce a una conseguenza metodologica rilevante per il seguito del lavoro. La disponibilità di una soluzione analitica non implica necessariamente che essa rappresenti l'approccio computazionalmente più efficiente. Quando la serie richiede un numero elevato di termini, il vantaggio rispetto a un metodo di simulazione tende infatti a ridursi, mentre rimane il limite fondamentale della sua applicabilità: la soluzione è valida esclusivamente sotto le ipotesi del modello di Black-Scholes-Merton e non si estende, se non con notevoli difficoltà, a dinamiche alternative del sottostante.
Per questa ragione, il Capitolo 5 adotterà un approccio basato sulla simulazione Monte Carlo. Tale scelta non è motivata dalla mancanza di una soluzione analitica, bensì dall'esigenza di utilizzare uno strumento sufficientemente flessibile da consentire il confronto tra diverse strutture contrattuali e tra differenti ipotesi.

3.4 Le criticità delle opzioni barriera

I paragrafi precedenti hanno mostrato che le opzioni barriera possono essere valutate in modo rigoroso all'interno del modello di Black-Scholes-Merton e che il loro minor costo rispetto alle corrispondenti opzioni europee rappresenta la naturale conseguenza della rinuncia alla protezione in determinati scenari di mercato. Sotto il profilo della valutazione, tali strumenti non presentano quindi alcuna lacuna teorica.
Le principali criticità emergono invece dalla struttura stessa del contratto. La clausola che determina l'attivazione o l'estinzione dell'opzione è infatti fondata sul semplice contatto istantaneo con una soglia prefissata, indipendentemente dalla durata o dalla rilevanza economica dell'evento che lo ha generato. È proprio questa caratteristica, dalla quale deriva il vantaggio di costo delle opzioni barriera, a costituire anche l'origine delle loro principali limitazioni.
Le criticità analizzate nel seguito riguardano aspetti differenti. La prima interessa il profilo di rischio dello strumento e la stabilità della copertura dinamica; la seconda concerne la convenzione di monitoraggio della barriera; la terza mette in discussione la corrispondenza tra l'evento contrattuale e il fenomeno economico che esso dovrebbe rappresentare; la quarta riguarda l'integrità del prezzo utilizzato per accertare l'evento di barriera; la quinta, infine, evidenzia la dipendenza della valutazione dalle ipotesi del modello adottato.
Pur manifestandosi in forme diverse, tutte queste criticità riconducono a un'unica scelta contrattuale: identificare l'evento di barriera con il primo contatto del sottostante con una soglia prefissata. Il paragrafo 3.5 mostrerà come proprio questa scelta rappresenti il limite strutturale delle opzioni barriera e costituisca il punto di partenza per l'introduzione delle opzioni parigine nel Capitolo 4.

3.4.1 La discontinuità del payoff e la fragilità della copertura

La caratteristica fondamentale delle opzioni barriera knock-out è la discontinuità del payoff rispetto alla traiettoria del sottostante. Nel caso di una call up-and-out con $B > K$, in prossimità della scadenza il valore del contratto immediatamente al di sotto della soglia è prossimo a $(B-K)^+$, mentre in corrispondenza della barriera è nullo per costruzione. Per $t < T$ la funzione valore rimane continua in F, ma la transizione avviene in un intervallo di prezzi che si restringe al tendere di t a T: ne deriva un gradiente progressivamente illimitato, dal quale discendono le criticità operative esaminate nel seguito.

Questa proprietà distingue profondamente le opzioni barriera dalle corrispondenti opzioni europee, il cui payoff, come osservato nel paragrafo 2.1.2, è continuo e presenta un'unica non differenziabilità in corrispondenza del prezzo di esercizio. Tutte le principali criticità

operative delle barrier options derivano da tale struttura del payoff. In particolare, essa produce tre conseguenze rilevanti sotto il profilo della gestione del rischio, ampiamente documentate nella letteratura dedicata ai derivati esotici (Taleb 1997).

La divergenza del gamma e del delta alla barriera

Anche per le opzioni europee il gamma cresce senza limite quando il sottostante si trova in prossimità dello strike e la scadenza si avvicina. La differenza risiede altrove: per un'opzione europea il delta resta compreso tra zero e uno e la divergenza si concentra nell'istante finale, quando il contratto si sta estinguendo. Nelle opzioni barriera, e in particolare nelle configurazioni reverse, essa si manifesta in corrispondenza della barriera mentre il contratto è ancora in vita, e riguarda anche il delta, che non è limitato e può cambiare segno. Quando il sottostante si avvicina alla barriera e il tempo residuo tende alla scadenza, ossia per $F_t \to B$ e $t \to T$, il gamma cresce senza limite. La ragione è intuitiva: la funzione valore è costretta a passare da un valore positivo a zero in un intervallo di prezzi sempre più ridotto, con un aumento della curvatura che diventa progressivamente illimitato.

La copertura dinamica diventa estremamente fragile

L'argomento di replicazione presentato nel paragrafo 2.2.3 presuppone che la posizione in delta possa essere aggiornata continuamente mediante variazioni infinitesime del portafoglio. In prossimità della barriera questa ipotesi non è più realistica. Il delta può subire variazioni estremamente rapide e, nelle configurazioni reverse, anche cambiare segno, richiedendo ribilanciamenti di entità incompatibile con il funzionamento di un mercato reale. La presenza di costi di transazione, limiti di liquidità e inevitabili ritardi nell'esecuzione rende quindi impraticabile la strategia di copertura teoricamente ottimale proprio nella regione in cui sarebbe maggiormente necessaria. Per questa ragione, nella pratica gli operatori ricorrono a tecniche di copertura approssimate, come la sostituzione della barriera con opportuni portafogli di opzioni europee, la cui efficacia rimane necessariamente incompleta.

Il vega può diventare negativo

Nel paragrafo 2.1.3 si è osservato che un aumento della volatilità accresce il valore sia delle call sia delle put europee. La natura convessa del payoff fa sì che una maggiore dispersione dei possibili esiti aumenti il valore atteso della componente positiva, mentre la perdita massima rimane limitata. Il vega di un'opzione europea acquistata risulta pertanto sempre positivo.

Per una knock-out questa conclusione non vale più. La volatilità agisce infatti attraverso due meccanismi di segno opposto. Da un lato, come nel caso dell'opzione europea, una maggiore volatilità aumenta la dispersione dei possibili valori terminali e tende quindi ad accrescere il valore del payoff condizionato alla sopravvivenza del contratto. Dall'altro lato, la stessa volatilità aumenta la probabilità che la barriera venga raggiunta e che il contratto si estingua prima della scadenza. In altre parole, una maggiore volatilità non incrementa soltanto l'incertezza sul valore finale dell'opzione, ma anche la probabilità che essa cessi di esistere prima di poter generare tale payoff. Quando il sottostante si trova sufficientemente vicino alla barriera, questo secondo effetto può prevalere sul primo e il vega diventa negativo: il detentore di una knock-out beneficia, in quella regione, di una riduzione della volatilità.

Il risultato ha implicazioni che vanno oltre il semplice segno del vega. L'esposizione alla volatilità di un portafoglio contenente opzioni barriera dipende infatti dalla distanza del sottostante dalla soglia e può modificarsi sensibilmente nel corso della vita del contratto. In un mercato come quello petrolifero, caratterizzato da volatilità elevata e fortemente variabile nel tempo, ciò rende la gestione del rischio significativamente più complessa rispetto al caso delle corrispondenti opzioni europee.

3.4.2 Monitoraggio continuo e monitoraggio discreto

Una seconda criticità riguarda la convenzione utilizzata per accertare il verificarsi dell'evento di barriera. Le formule di valutazione presentate nel paragrafo 3.2 presuppongono infatti che il sottostante sia monitorato in tempo continuo, mentre nella prassi contrattuale, come osservato nel paragrafo 3.1.3, il controllo avviene in numerosi contratti a intervalli discreti, generalmente in corrispondenza dei prezzi ufficiali di regolamento giornalieri.
La differenza tra le due convenzioni non è puramente formale. Una traiettoria può superare la barriera tra due osservazioni consecutive e rientrare al di sotto della soglia prima del successivo istante di monitoraggio, senza che l'evento venga rilevato dal contratto. La probabilità di attraversamento risulta pertanto inferiore rispetto al caso di monitoraggio continuo e, di conseguenza, il premio di una knock-out osservata discretamente è sistematicamente più elevato.
Il divario tra le due convenzioni è quantitativamente rilevante. Broadie, Glasserman e Kou (1997) hanno dimostrato che la differenza tra il prezzo ottenuto con monitoraggio continuo e quello con monitoraggio discreto non decresce con ordine $O(1/m)$, come avverrebbe per un ordinario errore di discretizzazione, bensì con ordine $O(1/\sqrt{m})$, dove m rappresenta il numero delle osservazioni. La convergenza del premio discreto verso quello continuo risulta quindi sensibilmente più lenta di quanto l'intuizione potrebbe suggerire e la differenza rimane economicamente significativa anche in presenza di frequenze di

monitoraggio elevate.
Per tener conto di questo effetto, gli stessi autori hanno proposto una correzione tanto semplice quanto efficace. Il prezzo di un'opzione a monitoraggio discreto può essere approssimato con elevata accuratezza mediante la corrispondente formula in tempo continuo, valutata però in corrispondenza di una barriera opportunamente traslata verso l'esterno:

$$\widetilde{B} = B\, e^{\pm\beta\sigma\sqrt{T/m}}, \tag{3.20}$$

dove m indica il numero delle osservazioni, il segno positivo si applica alle barriere superiori e quello negativo a quelle inferiori. La costante

$$\beta = -\frac{\zeta(1/2)}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.5826$$

dipende dalla funzione zeta di Riemann.[5]
L'interpretazione economica della correzione è immediata. Poiché il monitoraggio discreto non rileva gli attraversamenti di brevissima durata, esso equivale, sotto il profilo della valutazione, a un monitoraggio continuo effettuato su una barriera leggermente più distante dal prezzo corrente. Lo spostamento della soglia è proporzionale alla deviazione standard del processo nell'intervallo compreso tra due osservazioni consecutive.
Ai fini del presente lavoro questo risultato assume una duplice rilevanza. Da un lato, esso quantifica il divario tra la formulazione teorica del contratto e la sua implementazione pratica, mostrando che la convenzione di monitoraggio incide direttamente sul valore dello strumento. Dall'altro, fornisce il criterio con cui, nel Capitolo 5, saranno corrette le stime ottenute mediante simulazione Monte Carlo, secondo quanto anticipato nel paragrafo 2.6.4.
Merita infine una considerazione conclusiva. La correzione proposta da Broadie, Glasserman e Kou non elimina la differenza tra monitoraggio continuo e discreto, ma la incorpora in una modifica del livello della barriera. Due contratti identici sotto ogni altro profilo, ma caratterizzati da differenti frequenze di osservazione, continuano infatti ad avere valori diversi. La convenzione di monitoraggio rimane quindi una componente essenziale della specificazione contrattuale e assume particolare rilievo nei contratti negoziati over-the-counter, nei quali essa deve essere definita con precisione.

[5] La costante misura l'eccesso medio con cui il massimo di un moto browniano osservato in tempo continuo supera quello rilevato sulla corrispondente griglia discreta, normalizzato rispetto alla deviazione standard degli incrementi. Il suo valore numerico deriva da $\zeta(1/2) \approx -1.4604$.

3.4.3 La sensibilità alle escursioni transitorie

Tra le criticità esaminate in questo capitolo, quella relativa alla sensibilità alle escursioni transitorie riveste un ruolo centrale ai fini della presente tesi, poiché mette direttamente in discussione la corrispondenza tra la clausola contrattuale della barriera e il fenomeno economico che essa dovrebbe rappresentare.

La struttura delle opzioni barriera attribuisce infatti il medesimo effetto contrattuale, l'attivazione oppure l'estinzione del contratto, a situazioni profondamente diverse sotto il profilo economico. Un attraversamento della soglia destinato a consolidarsi nel tempo viene trattato esattamente come un movimento puramente temporaneo che si esaurisce nell'arco di poche ore o di pochi giorni. Nella logica del first passage time le due circostanze sono indistinguibili, poiché l'evento $\{\tau_B \leq T\}$ si verifica in entrambi i casi.

Nel mercato del greggio questa equivalenza risulta particolarmente problematica. Come illustrato nel paragrafo 1.2.3, una parte rilevante delle oscillazioni di prezzo è riconducibile ai premi per il rischio geopolitico: l'aumento della probabilità percepita di future interruzioni dell'offerta determina un rapido incremento delle quotazioni, destinato però a ridimensionarsi non appena le tensioni si attenuano. Si tratta, per costruzione, di movimenti prevalentemente transitori.

La crisi dello Stretto di Hormuz del 2026 offre un esempio delle due scale temporali su cui tali movimenti si manifestano. Il rialzo principale, che ha portato il Brent dai circa 71 dollari di febbraio a oltre 138 agli inizi di aprile, si è protratto per mesi: rispetto a un movimento di questa durata la distinzione tra le due formulazioni contrattuali non si pone, poiché qualunque soglia di permanenza ragionevolmente breve sarebbe stata superata. Assai diverso è il caso del rientro dell'inizio di luglio, quando il prezzo è sceso sotto i 70 dollari per quattro sole sedute prima di risalire oltre i 100 nella seconda metà del mese. Un produttore coperto mediante una put down-and-out con barriera collocata a quel livello avrebbe perso definitivamente la protezione a causa di un'oscillazione durata meno di una settimana, mentre una clausola che richiedesse la permanenza del prezzo oltre la soglia per almeno cinque giorni di negoziazione l'avrebbe lasciata intatta.

Un'analoga conclusione emerge dagli episodi descritti nel paragrafo 1.4.3. Le decisioni dell'OPEC+, gli sviluppi geopolitici e la pubblicazione di dati macroeconomici producono frequentemente variazioni di prezzo di ampiezza considerevole concentrate in intervalli temporali molto brevi. Sebbene tali movimenti abbiano spesso carattere puramente transitorio, essi risultano indistinguibili, per una clausola di barriera tradizionale, da un cambiamento permanente del regime di mercato.

L'episodio più estremo resta tuttavia quello dell'aprile 2020. La temporanea quotazione negativa del contratto futures sul WTI con scadenza maggio non rifletteva una perdita di valore economico del petrolio, bensì una situazione eccezionale determinata dalla saturazione della capacità di stoccaggio e dall'impossibilità, per numerosi operatori finanziari,

di ricevere la consegna fisica del greggio. Anche in questo caso qualsiasi barriera collocata al di sotto dei livelli di mercato sarebbe stata attraversata con effetti contrattuali irreversibili, nonostante l'anomalia si sia riassorbita nell'arco di pochi giorni.
L'obiezione che emerge da questi esempi è circoscritta ma sostanziale. Non si mette in discussione la rilevanza economica del livello di barriera scelto dall'operatore, che riflette una valutazione razionale degli scenari nei quali la copertura è ritenuta necessaria. Ciò che appare discutibile è l'identificazione dell'evento rilevante con il semplice contatto istantaneo con la soglia. In un mercato caratterizzato da frequenti oscillazioni di breve durata, una parte non trascurabile degli attraversamenti non segnala un effettivo cambiamento delle condizioni economiche, ma rappresenta soltanto una temporanea deviazione dal livello di equilibrio.
Questa criticità si riflette anche sul piano della valutazione. Il prezzo di un'opzione barriera dipende infatti in misura determinante dalla probabilità di attraversamento della soglia, vale a dire dal comportamento estremo della traiettoria del sottostante. Come osservato nei paragrafi precedenti, proprio questa componente è quella meno accuratamente descritta dal modello lognormale di Black-Scholes-Merton, che tende a sottostimare la probabilità di movimenti estremi in presenza di salti e di code più pesanti della distribuzione gaussiana. Le opzioni barriera risultano quindi particolarmente esposte al rischio di errore di specificazione del modello, poiché il loro valore dipende precisamente dalla probabilità degli eventi che il modello rappresenta con minore accuratezza.

3.4.4 Rischio di manipolazione e barrier event risk

Una quarta criticità riguarda il processo di determinazione dell'evento di barriera e, più in generale, il cosiddetto barrier event risk. Il tema va affrontato con cautela, poiché non implica necessariamente l'esistenza di comportamenti manipolativi, ma evidenzia come la presenza di una soglia contrattuale possa concentrare rilevanti interessi economici in corrispondenza di uno specifico livello di prezzo.
La struttura di payoff di un'opzione barriera attribuisce infatti conseguenze economiche molto differenti a variazioni di prezzo anche minime in prossimità della soglia. Nel caso di una knock-out, il raggiungimento della barriera determina l'estinzione del contratto e trasferisce immediatamente valore dal compratore al venditore. Quando le posizioni in essere sono particolarmente rilevanti rispetto alla liquidità del mercato sottostante, può quindi emergere un incentivo economico a influenzare il prezzo nelle vicinanze del livello di barriera.
La letteratura empirica ha individuato fenomeni compatibili con questa logica in diversi mercati finanziari. Ni, Pearson e Poteshman (2005) hanno osservato una concentrazione anomala dei prezzi azionari in prossimità dei prezzi di esercizio nelle date di scadenza delle opzioni, mentre Osler (2003) ha evidenziato, nel mercato valutario, come la presenza

di ordini condizionati su livelli prefissati possa contribuire a generare movimenti di prezzo particolarmente accentuati. Pur non costituendo una prova diretta di comportamenti manipolativi, tali evidenze, relative a mercati diversi da quello del greggio, suggeriscono come la presenza di soglie contrattuali possa, in linea teorica, influenzare la dinamica del mercato. Si tratta tuttavia di un'estensione per analogia, la cui rilevanza per il mercato petrolifero deve essere valutata con cautela e alla luce delle specifiche caratteristiche di tale mercato.

Nel mercato dei derivati sul greggio il fenomeno appare meno documentato. La notevole liquidità dei principali contratti futures sul Brent e sul WTI rende infatti più difficile influenzare il prezzo di mercato attraverso singole operazioni, soprattutto sulle scadenze maggiormente negoziate. Rimane tuttavia una potenziale fonte di criticità per benchmark meno liquidi o per scadenze più lontane, nelle quali la profondità del mercato risulta inferiore.

Per ridurre questi rischi, la prassi contrattuale ricorre generalmente a criteri di osservazione rigorosamente definiti, basati su prezzi ufficiali di regolamento o su meccanismi di mediazione delle quotazioni anziché su singole rilevazioni infragiornaliere. Anche in questo caso, tuttavia, il rimedio interviene sulle modalità di accertamento dell'evento di barriera e non sulla sua definizione, che continua a essere fondata sul semplice raggiungimento della soglia.

3.4.5 Il rischio di modello

L'ultima criticità riguarda il rischio di modello (*model risk*), già introdotto in termini generali nel paragrafo 2.3.3 e qui considerato con specifico riferimento alle opzioni barriera. Per le opzioni europee il prezzo dipende dalla dinamica del sottostante esclusivamente attraverso la distribuzione del prezzo alla scadenza. Di conseguenza, due modelli differenti che producano la medesima distribuzione terminale attribuiscono lo stesso valore a qualsiasi opzione europea. Poiché la calibrazione alla superficie di volatilità implicita equivale, in sostanza, a riprodurre tali distribuzioni marginali, modelli anche molto diversi tra loro possono risultare indistinguibili quando vengono valutati esclusivamente sulla base delle opzioni europee.

La situazione cambia radicalmente nel caso delle opzioni barriera. Il loro valore dipende infatti dall'intera evoluzione della traiettoria del sottostante e, in particolare, dalla probabilità con cui il processo raggiunge la barriera prima della scadenza. Questa informazione non è contenuta nelle sole distribuzioni marginali e dipende invece dalla struttura dinamica del modello adottato.

Schoutens, Simons e Tistaert (2004) mostrano come modelli calibrati con analoga accuratezza alla stessa superficie di volatilità implicita, tra cui modelli a salti, modelli a volatilità stocastica e loro combinazioni, possano attribuire prezzi significativamente differenti alla

medesima opzione barriera. Il disaccordo non nasce quindi da una diversa qualità della calibrazione, ma dal fatto che ciascun modello descrive in modo differente l'evoluzione della traiettoria tra la data iniziale e la scadenza.
La rilevanza di questo risultato è particolarmente evidente nel mercato del greggio. Come discusso precedentemente, il mercato dei derivati petroliferi è strutturalmente incompleto e la scelta della misura martingala equivalente non è univoca. La calibrazione sulle opzioni europee, che rappresenta la prassi operativa, non è quindi sufficiente a determinare un prezzo univoco per strumenti path-dependent quali le opzioni barriera. L'incertezza residua risulta tanto maggiore quanto più il payoff dipende dal comportamento estremo della traiettoria, cioè proprio dall'evento di attraversamento della soglia.
Quest'ultima osservazione, congiuntamente alle difficoltà di copertura, la dipendenza dalla convenzione di monitoraggio, la sensibilità alle escursioni transitorie e il rischio di modello non rappresentano problemi indipendenti tra loro, ma diverse manifestazioni della stessa caratteristica fondamentale: la definizione dell'evento di barriera come semplice primo contatto con una soglia prefissata. Il paragrafo seguente mostrerà come questa osservazione costituisca il punto di partenza per l'introduzione delle opzioni parigine.

3.5 Dal contatto istantaneo alla permanenza oltre la soglia

Le criticità esaminate nella sezione precedente riguardano aspetti apparentemente diversi: il profilo di rischio del contratto, la convenzione di monitoraggio, la corrispondenza tra clausola contrattuale ed evento economico, il barrier event risk e il rischio di modello. Considerate congiuntamente, esse rivelano tuttavia un'origine comune.
Tutte risultano accentuate dalla modalità con cui l'evento di barriera è definito. Nelle opzioni barriera tradizionali l'attivazione o l'estinzione del contratto dipende esclusivamente dal primo contatto del sottostante con un livello prefissato. La durata dell'attraversamento è irrilevante: è sufficiente che il prezzo raggiunga la soglia, anche solo per un istante, affinché la clausola contrattuale produca i propri effetti.
Questa scelta si riflette in ciascuna delle criticità analizzate. La fragilità della copertura nasce dalla discontinuità associata al primo contatto con la barriera; il divario tra monitoraggio continuo e discreto dipende dalla possibilità che tale contatto avvenga tra due istanti di osservazione; la sensibilità agli spike transitori deriva dall'equivalenza attribuita a movimenti di durata molto diversa; il barrier event risk concentra gli interessi economici su uno specifico livello di prezzo; infine, il rischio di modello risulta amplificato perché la probabilità del primo attraversamento dipende proprio da quella parte della dinamica del sottostante che i modelli descrivono con maggiore incertezza.
Da questa prospettiva emerge anche il limite dei principali rimedi discussi nel corso del

capitolo. Il rebate, le barriere parziali, le finestre di monitoraggio, la correzione di Broadie, Glasserman e Kou e la definizione rigorosa della fonte di prezzo attenuano gli effetti pratici della clausola di barriera, ma non ne modificano la logica sottostante. Essi intervengono sulle conseguenze dell'evento o sulle modalità con cui esso viene osservato, lasciando invariato il criterio che lo determina.

Una soluzione di natura diversa consiste invece nel modificare direttamente la definizione dell'evento contrattuale. Anziché richiedere il semplice raggiungimento della barriera, è possibile subordinare l'attivazione della clausola alla permanenza del sottostante oltre la soglia per un intervallo di tempo minimo, indicato con D. L'evento rilevante cessa così di essere istantaneo e acquisisce una dimensione temporale: un'escursione di durata inferiore a D, anche se di ampiezza considerevole, non produce alcun effetto contrattuale. È questo il principio sul quale si fondano le opzioni parigine, introdotte da Chesney, Jeanblanc-Picqué e Yor (1997). La loro logica risponde direttamente alla criticità evidenziata nel paragrafo 3.4.3: se una parte delle oscillazioni osservate nel mercato del greggio presenta carattere transitorio, la permanenza oltre la barriera introduce un criterio temporale aggiuntivo rispetto al semplice attraversamento. Il parametro D consente infatti di attribuire conseguenze contrattuali differenti a superamenti della barriera caratterizzati da durate diverse, rendendo la durata dell'escursione un elemento esplicitamente incorporato nella struttura del contratto.

Questa maggiore aderenza al fenomeno economico comporta tuttavia un costo sul piano analitico. Il first passage time, la cui distribuzione può essere ricavata mediante il principio di riflessione, non è più la variabile rilevante. La valutazione richiede invece di descrivere la durata delle escursioni oltre la barriera oppure, nella variante cumulativa, il tempo complessivo trascorso al di sopra della soglia. Tali quantità appartengono alla teoria delle escursioni browniane e dei tempi di occupazione e, nella generalità dei casi, non ammettono espressioni chiuse nel dominio del tempo.

Capitolo 4

Le opzioni parigine

Il capitolo precedente ha mostrato come le principali criticità delle opzioni barriera trovino origine in un medesimo elemento strutturale. La fragilità della copertura, la dipendenza dalla convenzione di monitoraggio, la sensibilità alle escursioni transitorie, il barrier event risk e l'accentuazione del rischio di modello derivano infatti dalla stessa scelta contrattuale: considerare rilevante il primo contatto con la barriera, senza attribuire alcun ruolo alla durata dell'attraversamento.

Il presente capitolo sviluppa la risposta a questa osservazione. Le opzioni parigine, introdotte da Chesney, Jeanblanc-Picqué e Yor (1997), subordinano infatti l'attivazione o l'estinzione del contratto alla permanenza del sottostante oltre la soglia per un intervallo di tempo non inferiore a un parametro contrattuale D. L'evento contrattuale acquisisce così una dimensione temporale, che fa della durata dell'escursione un elemento essenziale del contratto.

L'esposizione è articolata in sette sezioni. La prima presenta la struttura contrattuale delle opzioni parigine, ne introduce la tassonomia e ne analizza il comportamento nei casi limite del parametro D. La seconda esamina le due principali varianti, standard e cumulativa, mettendone a confronto le caratteristiche e richiamandone gli impieghi documentati nella pratica di mercato. La terza introduce gli strumenti probabilistici necessari alla valutazione, evidenziando perché la teoria del first passage time, utilizzata nel Capitolo 3, non sia più sufficiente. La quarta passa in rassegna i principali metodi di valutazione proposti in letteratura e giustifica la scelta metodologica adottata nel presente lavoro. La quinta affronta il problema del monitoraggio discreto, che nel caso delle opzioni parigine assume caratteristiche più articolate rispetto a quelle discusse nel paragrafo 2.6.4. La sesta riprende sistematicamente le cinque criticità individuate nel paragrafo 3.4, valutando quali vengano attenuate dal parametro D, quali rimangano sostanzialmente invariate e quali emergano come nuove problematiche. La settima, infine, discute i criteri di scelta di D nel mercato petrolifero e prepara il terreno per l'analisi numerica sviluppata nel Capitolo 5.

4.1 La definizione e la classificazione delle opzioni parigine

Questa sezione definisce le opzioni parigine e ne presenta la classificazione. Dopo aver formalizzato l'evento contrattuale mediante l'orologio di escursione, vengono descritte le tipologie che derivano dalla combinazione dei criteri di classificazione, esaminati i casi limite del parametro di permanenza e richiamata la relazione di parità già introdotta per le opzioni barriera.

4.1.1 La definizione dell'evento contrattuale

Si consideri il prezzo futures F_t, definito sull'intervallo temporale $[0, T]$, nel modello di Black (1976) adottato nel Capitolo 3, una barriera B e una scadenza T. Per fissare le idee si farà riferimento alla configurazione up, nella quale $F_0 < B$; la corrispondente configurazione down si ottiene in modo del tutto analogo invertendo le opportune disuguaglianze. Per definire la clausola parigina è necessario introdurre una grandezza che misuri, in ogni istante, il tempo trascorso da quando il sottostante si trova oltre la barriera. A tale scopo si considera l'istante dell'ultimo attraversamento della soglia precedente a t,

$$g_t \;=\; \sup\{\, s \le t \;:\; F_s = B \,\}, \tag{4.1}$$

assumendo, per convenzione, che $g_t = 0$ qualora l'insieme sia vuoto. Quando $F_t > B$, la differenza $t - g_t$ rappresenta la durata dell'escursione attualmente in corso. Essa può essere interpretata come un orologio che inizia a misurare il tempo nel momento in cui il sottostante supera la barriera, continua a scorrere fintanto che il prezzo permane al di sopra di essa e si azzera non appena il processo rientra al di sotto della soglia.
L'evento contrattuale si verifica nel primo istante in cui tale orologio raggiunge il valore prefissato D. Si definisce pertanto

$$\tau_D \;=\; \inf\Big\{\, t > 0 \;:\; \mathbf{1}_{\{F_t > B\}}\,(t - g_t) \ge D \,\Big\}. \tag{4.2}$$

La variabile aleatoria τ_D è detta tempo d'arresto parigino. Essa costituisce una generalizzazione del first passage time introdotto nel paragrafo 2.5 e, come si vedrà nel paragrafo 4.1.3, coincide con quest'ultimo nel limite in cui D tende a zero.
Rispetto alle opzioni barriera tradizionali, l'intera differenza strutturale si concentra in questa definizione. Il payoff, la scadenza, il prezzo di esercizio e il livello della barriera rimangono infatti invariati; ciò che muta è esclusivamente il criterio in base al quale la barriera viene considerata effettivamente violata.

4.1.2 Le configurazioni knock-in e knock-out

Le possibili configurazioni contrattuali riproducono quelle già introdotte nel paragrafo 3.1.1. Si distinguono, da un lato, le opzioni knock-out, che cessano di esistere nel momento in cui la condizione di permanenza viene soddisfatta, e le opzioni knock-in, che diventano efficaci al verificarsi del medesimo evento; dall'altro, si distinguono le configurazioni up e down in funzione della posizione della barriera rispetto al prezzo iniziale del sottostante. Combinando queste due classificazioni con la natura call o put del payoff si ottengono, anche nel caso parigino, le consuete otto tipologie standard.
Nel caso di una call parigina up-and-out, il payoff a scadenza coincide con quello della corrispondente call europea moltiplicato per la funzione indicatrice dell'evento $\tau_D > T$; per la corrispondente call up-and-in il payoff è invece ponderato dalla funzione indicatrice dell'evento complementare. Il confronto con le espressioni presentate nel paragrafo 3.1.1 mette in evidenza come la struttura del contratto rimanga immutata, salvo la sostituzione dell'evento di primo attraversamento della barriera con quello di permanenza oltre la soglia per il tempo richiesto.
Rispetto alla classificazione delle opzioni barriera tradizionali emerge tuttavia un'ulteriore dimensione contrattuale. Il parametro D rappresenta infatti una clausola autonoma, che deve essere negoziata e definita al pari del livello della barriera. Ne consegue che due contratti identici sotto ogni altro profilo, ma caratterizzati da valori differenti di D, costituiscono strumenti distinti e, in generale, assumono valori differenti. L'introduzione della clausola parigina amplia quindi l'insieme dei contratti negoziabili e, di conseguenza, anche quello delle scelte disponibili per le controparti.
Esistono, infine, anche opzioni parigine a doppia barriera, nelle quali la condizione di permanenza è riferita a entrambe le soglie che delimitano un corridoio di prezzo. La loro valutazione è stata affrontata da Labart e Lelong (2009), che propongono una soluzione fondata sulle trasformate di Laplace secondo l'impostazione richiamata nel paragrafo 4.4.1. Nel presente lavoro ci si limiterà tuttavia al caso a barriera singola, che consente di isolare l'effetto della clausola di permanenza su una sola soglia. L'estensione al corridoio, pur rilevante alla luce della diffusione delle strutture a doppia barriera nel mercato delle commodity richiamata nel paragrafo 3.3.1, non modificherebbe l'argomento sviluppato nel capitolo.

4.1.3 I casi limite del parametro di permanenza

L'analisi dei valori estremi del parametro D consente di comprendere con chiarezza la posizione delle opzioni parigine rispetto agli strumenti già esaminati nei capitoli precedenti. Quando D tende a zero, la condizione di permanenza diviene progressivamente meno stringente e il tempo d'arresto parigino converge al first passage time introdotto nel para-

grafo 2.5. In tale limite il contratto coincide quindi con la corrispondente opzione barriera tradizionale analizzata nel Capitolo 3.
All'estremo opposto, se D è maggiore o uguale a T, nessuna escursione può soddisfare il requisito di permanenza prima della scadenza, poiché la durata richiesta non è compatibile con l'orizzonte temporale del contratto. L'evento di attivazione ha pertanto probabilità nulla: la versione knock-out si riduce alla corrispondente opzione europea, mentre la knock-in risulta priva di valore.
Per valori intermedi del parametro il prezzo varia in maniera monotona. Siano infatti D_1 e D_2, con $D_1 < D_2$. Qualunque escursione che raggiunga una durata pari a D_2 deve necessariamente aver raggiunto in precedenza anche la durata D_1; di conseguenza, l'evento di attivazione associato a D_2 è contenuto in quello corrispondente a D_1. Ne segue che un'opzione knock-out sopravvive con probabilità tanto maggiore quanto più elevato è il valore di D, e il suo premio cresce di conseguenza. Per le opzioni knock-in vale, in modo speculare, la relazione opposta.
Da queste proprietà emerge anche un'interpretazione economica del parametro D, che sarà ripresa nel paragrafo 4.7. Esso determina la posizione del contratto lungo un continuo che collega l'opzione barriera all'opzione europea. Valori di D prossimi a zero riproducono la struttura delle opzioni barriera, conservandone anche le criticità; valori vicini alla scadenza rendono invece la clausola di permanenza sostanzialmente irrilevante, facendo convergere il contratto verso l'opzione europea. La scelta di D consiste quindi nel fissare la durata minima oltre la quale un movimento del prezzo viene considerato sufficientemente persistente da produrre effetti contrattuali.

4.1.4 La relazione di parità in-out

Nel paragrafo 3.1.2 è stata introdotta la relazione secondo la quale il valore di un'opzione knock-in sommato a quello della corrispondente knock-out coincide con il valore della relativa opzione europea. Tale proprietà rimane valida anche nel caso delle opzioni parigine. La dimostrazione è immediata: l'evento di attivazione entro la scadenza e il suo complementare costituiscono una partizione dello spazio campionario, cosicché, per ogni possibile traiettoria del sottostante, la somma dei payoff coincide con quella del corrispondente contratto europeo.
È opportuno osservare che questa conclusione non dipende dalla particolare natura dell'evento di attivazione. La validità della parità deriva unicamente dalla complementarità dei due eventi e si estende quindi a qualunque criterio di attivazione misurabile, comprese le varianti che saranno presentate nel paragrafo successivo. Anche nel contesto delle opzioni parigine, la relazione consente pertanto di limitare l'analisi a una sola delle due famiglie contrattuali, ottenendo l'altra direttamente per differenza. Nel Capitolo 5 essa sarà inoltre

impiegata come strumento di verifica della coerenza interna delle stime Monte Carlo, secondo l'impostazione già adottata nel paragrafo 3.2.4.

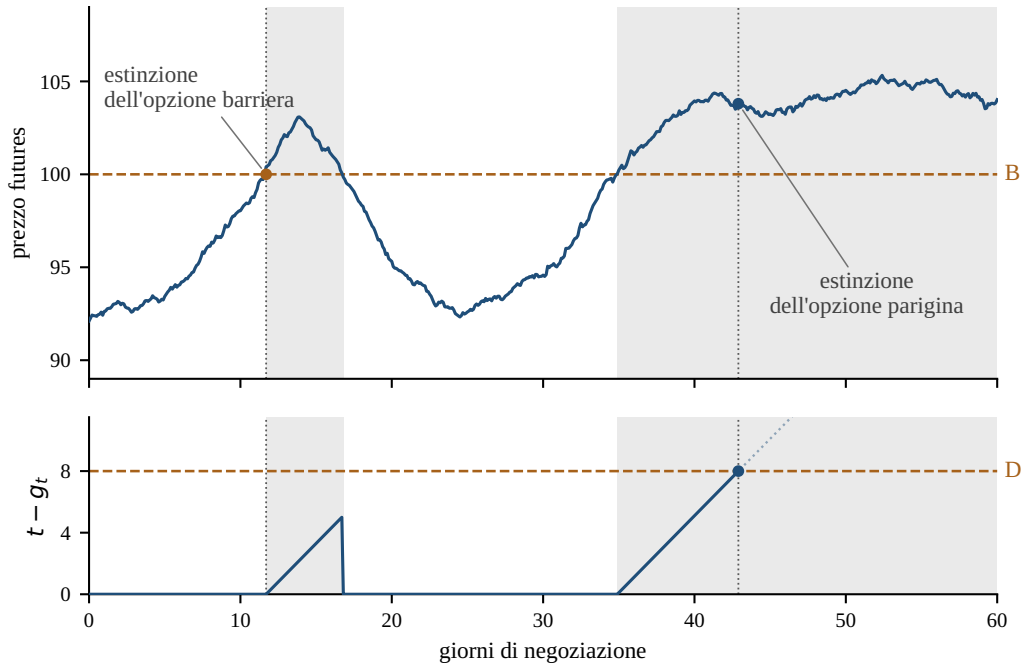

Figura 4.1: Traiettoria del sottostante e orologio di escursione. Il pannello superiore riporta il prezzo futures e la barriera B; il pannello inferiore riporta la durata dell'escursione in corso, $t - g_t$, e la soglia D. L'opzione barriera si estingue al primo contatto, mentre l'opzione parigina sopravvive alla prima escursione e si estingue soltanto in corrispondenza della seconda.

La Figura 4.1 illustra il meccanismo su una singola traiettoria. La prima escursione oltre la soglia, pur di ampiezza rilevante, si esaurisce prima che l'orologio raggiunga D e non produce alcun effetto contrattuale. La seconda, di durata superiore, determina l'estinzione del contratto. L'opzione barriera tradizionale, per contro, si sarebbe estinta già in corrispondenza del primo contatto.

4.2 La variante standard e la variante cumulativa

Questa sezione confronta i due criteri con cui la permanenza oltre la soglia può essere misurata. La variante standard richiede che l'escursione sia continua, mentre quella cumulativa somma le escursioni successive. Dopo averne esposto la definizione e l'ordinamento dei premi che ne discende, viene discussa l'adeguatezza dei due criteri al mercato del greggio e richiamato l'impiego di clausole analoghe in altri contratti finanziari.

4.2.1 La variante standard

La definizione data nel paragrafo 4.1.1 corrisponde alla variante denominata standard, o consecutiva. L'elemento caratterizzante è l'azzeramento dell'orologio in corrispondenza

di ogni rientro al di sotto della barriera. Il tempo trascorso oltre la soglia nel corso di escursioni precedenti viene dimenticato, e la clausola si attiva soltanto se una singola escursione raggiunge la durata D.
Questa struttura incorpora un criterio di persistenza in senso stretto. Ciò che rileva è che il sottostante si stabilizzi oltre la barriera, non che vi trascorra complessivamente un tempo considerevole. Una traiettoria che oscilli ripetutamente attorno alla soglia, attraversandola in entrambe le direzioni senza mai permanervi a lungo, lascia il contratto inalterato indipendentemente dal numero di attraversamenti.

4.2.2 La variante cumulativa

La variante cumulativa[1] sostituisce alla durata della singola escursione il tempo complessivamente trascorso oltre la barriera. A tal fine, si definisce il tempo di occupazione

$$A_t = \int_0^t \mathbf{1}_{\{F_u > B\}}\, du, \tag{4.3}$$

e il corrispondente istante di attivazione come il primo momento in cui A_t raggiunge il valore D. In questo caso, l'orologio si arresta quando il sottostante rientra al di sotto della soglia e riprende dal valore precedentemente raggiunto quando il sottostante supera nuovamente la barriera.
La valutazione dei contratti definiti in questo modo rientra nella più ampia famiglia dei derivati basati sui tempi di occupazione, studiata da Hugonnier (1999). In tale lavoro vengono sviluppate formule generali di valutazione per derivati il cui payoff dipende congiuntamente dal prezzo terminale e dal tempo di occupazione del sottostante, mostrando inoltre come tali contratti possano essere replicati mediante strategie dinamiche di negoziazione nei titoli di base. Le opzioni a barriera cumulative rientrano tra le applicazioni considerate nell'ambito di questa classe di derivati.
Il confronto tra le due varianti conduce a un'osservazione di carattere generale. Se una singola escursione oltre la barriera raggiunge la durata D, allora anche il tempo di occupazione complessivo ha necessariamente raggiunto tale valore; l'implicazione inversa, tuttavia, non sussiste. L'evento di attivazione della variante standard è pertanto contenuto nell'evento di attivazione della variante cumulativa. Ne consegue che, a parità di barriera e di parametro D, la variante cumulativa presenta una maggiore probabilità di attivazione. Per una struttura knock-out, ciò si traduce in un valore inferiore rispetto al corrispondente contratto standard.

[1] In letteratura la variante cumulativa è indicata anche con il termine *Parasian*, adottato ad esempio da Zhu e Chen (2013). Nel presente lavoro si mantiene la denominazione descrittiva.

Combinando questo risultato con quanto osservato nel paragrafo 4.1.3, è possibile ottenere il seguente ordinamento. A parità di tutti gli altri parametri, i valori delle corrispondenti call up-and-out soddisfano

$$C_{\text{barriera}} \;\leq\; C_{\text{cumulativa}}(D) \;\leq\; C_{\text{standard}}(D) \;\leq\; C_{\text{europea}} \tag{4.4}$$

La prima disuguaglianza riflette il fatto che l'attivazione della variante cumulativa richiede comunque che il sottostante raggiunga la barriera, mentre la seconda deriva dalla maggiore facilità di attivazione della condizione cumulativa rispetto a quella basata su una singola escursione. L'ultima disuguaglianza riflette invece il fatto che l'opzione europea non prevede alcuna condizione di knock-out. Questo ordinamento sarà utilizzato nel Capitolo 5 come controllo di plausibilità delle stime ottenute mediante simulazione Monte Carlo, poiché una sua violazione potrebbe segnalare un errore nell'implementazione del payoff o, in alternativa, un'insufficiente precisione numerica della simulazione.

4.2.3 L'adeguatezza dei due criteri al mercato del greggio

La scelta tra le due varianti non è indifferente rispetto all'argomento sviluppato nel paragrafo 3.4.3. La questione posta in quella sede riguardava la corrispondenza tra la clausola contrattuale e il fenomeno economico che essa intende rappresentare, e in particolare l'equivalenza attribuita dall'opzione barriera a movimenti di durata profondamente diversa. Le due varianti affrontano tale questione secondo logiche differenti. La variante standard associa l'attivazione al mantenimento continuativo del sottostante oltre la soglia per un periodo di durata D. In questo senso, essa tende a identificare una permanenza sufficientemente prolungata del prezzo su un livello diverso da quello precedente e non considera, ai fini del conteggio, una successione di escursioni brevi separate da rientri al di sotto della barriera. La variante cumulativa, invece, considera il tempo complessivamente trascorso oltre la soglia e tratta allo stesso modo una permanenza continuativa di durata D e una successione di escursioni più brevi la cui durata complessiva raggiunge il medesimo valore.

Alla luce delle caratteristiche del mercato petrolifero descritte nel Capitolo 1, il criterio standard appare coerente con l'interpretazione economica adottata nel presente lavoro. La persistenza dei regimi discussa nel paragrafo 1.4 e la distinzione tra shock destinati a consolidarsi e movimenti successivamente riassorbiti suggeriscono infatti di attribuire rilevanza alla permanenza del prezzo oltre una determinata soglia. L'episodio richiamato nel paragrafo 3.4.3 illustra una configurazione in cui un movimento di ampiezza rilevante ma di breve durata, seguito da un rapido rientro, viene distinto da una variazione che permane oltre la soglia per un periodo sufficientemente prolungato.

La variante cumulativa presenta tuttavia una diversa interpretazione economica, che può

risultare utile qualora l'obiettivo sia misurare l'esposizione complessiva del sottostante a un determinato intervallo di prezzi, indipendentemente dalla continuità della permanenza. Inoltre, il tempo di occupazione costituisce una quantità additiva rispetto alla traiettoria e può essere calcolato in modo diretto su una griglia temporale discreta. Le differenze tra le due strutture assumono quindi rilevanza anche dal punto di vista della loro implementazione numerica, aspetto che sarà ripreso nel paragrafo 4.5.
Nel prosieguo della tesi, la variante standard viene pertanto assunta come struttura principale, mentre la variante cumulativa viene mantenuta come termine di confronto. Tale scelta riflette il criterio economico adottato nel presente lavoro e l'obiettivo di distinguere, nel mercato del greggio, tra movimenti temporanei e variazioni di prezzo sufficientemente persistenti.

4.2.4 Applicazione di clausole path-dependent nei mercati finanziari

Le opzioni parigine sono state introdotte in letteratura come strumenti teorici e la loro diffusione come contratti autonomi appare relativamente limitata. Meccanismi contrattuali basati sulla permanenza del prezzo oltre una determinata soglia trovano tuttavia applicazione in un contesto finanziario differente, quello delle obbligazioni convertibili con clausole di soft call. In tali contratti, la facoltà di rimborso anticipato attribuita all'emittente può essere subordinata al verificarsi di determinate condizioni sul prezzo dell'azione sottostante, tra cui il mantenimento del prezzo al di sopra di una soglia prefissata per un determinato numero di giorni di negoziazione (Lau e Kwok 2004).
Una delle configurazioni più diffuse in questo ambito assume la forma di una clausola «*m* su *n*», nella quale la condizione si considera soddisfatta quando il prezzo di riferimento si trova al di sopra della soglia per almeno *m* delle precedenti *n* osservazioni. Ad esempio, una clausola «20 giorni su 30» richiede che il prezzo abbia superato il livello prefissato in almeno 20 delle ultime 30 sedute.
Questa specificazione non coincide con la struttura parigina standard né con la variante cumulativa analizzata nel presente capitolo. Il conteggio avviene infatti all'interno di una finestra temporale mobile di ampiezza *n*, anziché proseguire a partire dall'ultimo attraversamento della barriera o accumulare il tempo complessivamente trascorso oltre la soglia. Si tratta pertanto di una struttura path-dependent distinta, sebbene accomunata alle opzioni parigine dall'obiettivo di rendere la condizione contrattuale meno sensibile a movimenti isolati del prezzo. La letteratura considera infatti le clausole *m* su *n* come una particolare forma di soft call con elevata dipendenza dal percorso.
La rilevanza di questa osservazione ai fini del presente lavoro è duplice. Da un lato, essa mostra che condizioni contrattuali basate sulla permanenza o sulla frequenza del prezzo oltre una soglia sono effettivamente utilizzate nei mercati finanziari e non costituiscono esclusivamente una costruzione teorica. Dall'altro, evidenzia come le principali applica-

zioni documentate nella letteratura riguardino prevalentemente strumenti legati al mercato azionario, in particolare le obbligazioni convertibili, mentre la specifica applicazione della struttura parigina considerata nel presente lavoro al mercato del greggio rimane distinta da tali impieghi. Questo punto sarà ripreso nel paragrafo 4.7.

4.3 Il quadro probabilistico

Questa sezione introduce gli strumenti probabilistici necessari alla valutazione delle opzioni parigine. Dopo aver mostrato perché la distribuzione del first passage time non sia sufficiente a trattare un evento definito sulla durata, vengono richiamate la teoria delle escursioni browniane e la nozione di tempo di occupazione, e viene infine ricondotta la dinamica del futures alla forma standard impiegata in tale letteratura.

4.3.1 I limiti del first passage time

La valutazione delle opzioni barriera svolta nel paragrafo 3.2 si basa sulla conoscenza della distribuzione congiunta del prezzo terminale e dell'estremo del processo, ottenuta mediante il principio di riflessione introdotto nel paragrafo 2.5.2. Tale strumento consente di determinare la probabilità che il sottostante abbia raggiunto la barriera entro la scadenza, informazione sufficiente quando l'evento contrattuale coincide con il primo attraversamento della soglia.
Nel caso delle opzioni parigine, questa informazione non è più sufficiente. Sapere se e quando la barriera sia stata raggiunta non consente infatti di stabilire se una determinata escursione abbia successivamente raggiunto la durata D. Tale condizione dipende non soltanto dall'esistenza di un attraversamento, ma anche dalla durata della permanenza del processo oltre la soglia e, nel caso di più attraversamenti, dalla successione temporale delle relative escursioni.
La variabile rilevante diventa pertanto, nel caso della variante standard, la durata massima delle escursioni del processo oltre la barriera; nella variante cumulativa, invece, il tempo di occupazione complessivamente accumulato al di sopra della soglia. La valutazione richiede quindi di caratterizzare congiuntamente il prezzo terminale e queste quantità temporali, che incorporano informazioni sul percorso seguito dal sottostante non necessarie per la valutazione di una barriera tradizionale.
Il problema si sposta così dalla semplice determinazione del primo attraversamento della barriera alla caratterizzazione della struttura temporale delle permanenze del processo oltre la soglia. Per questo motivo, gli strumenti probabilistici impiegati nel Capitolo 3 non sono, da soli, sufficienti per affrontare la valutazione delle opzioni parigine, rendendo

necessario il ricorso a strumenti specifici della teoria dei tempi di occupazione e delle durate delle escursioni.

4.3.2 Escursioni browniane e tempi di occupazione

Coerentemente con l'impostazione seguita nei capitoli precedenti, la trattazione formale di questi strumenti esula dagli obiettivi del presente lavoro e ci si limita a illustrarne la natura e il ruolo nell'ambito della valutazione delle opzioni parigine.
Per la variante standard, l'oggetto di studio è la teoria delle escursioni del moto browniano, che descrive il comportamento del processo negli intervalli compresi tra due passaggi consecutivi per un livello prefissato. Chesney, Jeanblanc-Picqué e Yor (1997) ottengono la trasformata di Laplace del tempo di arresto parigino ricorrendo a strumenti classici di tale teoria, tra cui il meandro browniano e la martingala di Azéma. Il meandro consente di caratterizzare la struttura di un'escursione in relazione alla sua durata, mentre la martingala di Azéma permette di trattare l'informazione relativa all'istante dell'ultimo passaggio per la soglia, rappresentato dalla quantità g_t introdotta nel paragrafo 4.1.1.
Per la variante cumulativa, l'oggetto di studio è invece la legge dei tempi di occupazione. Hugonnier (1999) determina la legge congiunta del moto browniano e di un suo tempo di occupazione ricorrendo alla formula di Kac, dalla quale deriva le formule generali di valutazione richiamate nel paragrafo 4.2.2. La distribuzione del tempo trascorso da un moto browniano al di sopra di un determinato livello costituisce inoltre un oggetto classico della teoria della probabilità, collegato alla legge dell'arcoseno e trattato, tra gli altri, da Karatzas e Shreve (1998).
Il punto rilevante ai fini dell'esposizione è che entrambe le direzioni conducono a risultati espressi nel dominio della trasformata di Laplace anziché direttamente nel dominio temporale. Questa circostanza, anticipata nel paragrafo 2.6.1, determina le difficoltà di calcolo discusse nel paragrafo 4.4.

4.3.3 Il cambio di misura e il quadro di Black

I risultati richiamati sono formulati per un moto browniano standard, mentre il processo di interesse è il prezzo futures sotto la misura risk-neutral. Il collegamento tra i due contesti si ottiene a partire dalla dinamica 3.8 introdotta nel paragrafo 3.2.1,

$$dF_t \;=\; \sigma F_t \, d\widetilde{W}_t$$

Il prezzo futures è quindi una martingala, mentre il suo logaritmo non lo è. Applicando il lemma di Itô si ottiene

$$d \ln F_t \;=\; -\tfrac{1}{2}\sigma^2\, dt \;+\; \sigma\, d\widetilde{W}_t, \tag{4.5}$$

cosicché il logaritmo del prezzo segue un moto browniano con deriva costante pari a $-\sigma^2/2$, come anticipato nel paragrafo 3.2.1.
Conviene normalizzare il processo rispetto alla barriera e alla volatilità, definendo

$$X_t \;=\; \frac{1}{\sigma} \ln \frac{F_t}{B}, \qquad dX_t \;=\; -\frac{\sigma}{2}\, dt \;+\; d\widetilde{W}_t \tag{4.6}$$

In questa forma, la barriera corrisponde al livello zero e la condizione di permanenza del prezzo oltre B si traduce nella condizione di permanenza di X_t oltre lo zero. Poiché X_t è un moto browniano dotato di deriva $-\sigma/2$, i risultati della teoria delle escursioni non sono direttamente applicabili. Interviene a questo punto un cambio di misura di tipo Girsanov, che elimina la deriva e riconduce il problema al moto browniano standard (Shreve 2004). Si tratta del medesimo passaggio che nel paragrafo 3.2.1 dava origine al termine di potenza nelle formule di Reiner e Rubinstein (1991).
Due osservazioni meritano di essere sottolineate. La prima è che la trasformazione conserva la struttura temporale della traiettoria. La trasformazione $F_t \mapsto X_t$ agisce istante per istante sul valore del processo senza alterare l'asse dei tempi e, essendo strettamente crescente, preserva la posizione rispetto alla soglia: $F_t > B$ se e solo se $X_t > 0$. La durata di ciascuna escursione del prezzo oltre la barriera coincide pertanto con quella della corrispondente escursione di X_t oltre lo zero, e il parametro D conserva il proprio significato. Anche il cambio di misura non modifica le funzioni di traiettoria considerate, ma ne modifica la legge e quindi le probabilità. Questa proprietà è essenziale, poiché è precisamente la durata a definire l'evento contrattuale.
La seconda riguarda la semplificazione garantita dalla scelta del futures come sottostante. Per un sottostante spot, la deriva del logaritmo dipenderebbe dal tasso privo di rischio e dal costo di mantenimento, che nel caso del greggio include il convenience yield discusso nel Capitolo 1. Per il futures essa si riduce alla sola componente $-\sigma^2/2$, e la deriva normalizzata $-\sigma/2$ dipende quindi esclusivamente dalla volatilità. È la stessa circostanza che nel paragrafo 3.2.1 conduce al valore $\lambda = 1/2$, e che si riflette nelle trasformate di Laplace discusse nel paragrafo 4.4.1, nelle quali la deriva compare come parametro.

4.4 I metodi di valutazione

Questa sezione presenta i metodi disponibili per la valutazione delle opzioni parigine. Dopo il risultato fondativo basato sulla trasformata di Laplace e i problemi posti dalla

sua inversione numerica, vengono richiamati gli approcci alternativi e le estensioni a dinamiche discontinue. La sezione si chiude motivando il ricorso alla simulazione adottato nel Capitolo 5.

4.4.1 La trasformata di Laplace del prezzo

Il contributo fondativo alla valutazione delle opzioni parigine è quello di Chesney, Jeanblanc-Picqué e Yor (1997). Il loro risultato consiste nell'esprimere il valore del contratto attraverso la trasformata di Laplace rispetto alla scadenza, ottenuta mediante la teoria delle escursioni richiamata nel paragrafo 4.3.2.
In termini generali, indicando con $V(T)$ il prezzo di un'opzione in funzione della sua scadenza T, a parità di tutti gli altri parametri, la trasformata di Laplace rispetto alla scadenza è definita come

$$\widehat{V}(s) \;=\; \int_0^{\infty} e^{-sT}\, V(T)\, dT, \qquad s > 0, \tag{4.7}$$

dove s è il parametro della trasformata. Il problema di valutazione viene quindi risolto dapprima nel dominio della trasformata, determinando $\widehat{V}(s)$, e il prezzo per la scadenza T di interesse si recupera successivamente mediante inversione.
Questo impianto è stato successivamente esteso in più direzioni. Schröder (2003) generalizza la nozione di opzione parigina in modo da consentirne la valutazione in un istante qualsiasi della vita del contratto, modificando, ove necessario, le trasformate ottenute da Chesney, Jeanblanc-Picqué e Yor (1997). L'estensione è rilevante sul piano operativo, poiché la valutazione a mercato aperto di una posizione già in essere richiede di tenere conto del tempo di escursione già accumulato, che costituisce una variabile di stato aggiuntiva rispetto al solo prezzo corrente. Labart e Lelong (2009) forniscono inoltre formule chiuse per le trasformate di Laplace nel caso a doppia barriera e analizzano l'accuratezza dell'inversione numerica quando la funzione da ricostruire presenta condizioni sufficienti di regolarità.
Il fatto che il risultato assuma la forma di una trasformata anziché di una formula esplicita nel dominio del tempo costituisce una delle differenze più rilevanti rispetto al Capitolo 3. Le opzioni barriera ammettono, nel quadro di Black (1976), espressioni analitiche in termini della funzione di ripartizione della normale, come illustrato nel paragrafo 3.2.1; le opzioni parigine, nella generalità dei casi, richiedono invece di passare attraverso una trasformata e la sua successiva inversione.

4.4.2 L'inversione numerica

Il passaggio dal dominio della trasformata a quello del tempo richiede un'inversione numerica, operazione che presenta difficoltà proprie. L'inversione di una trasformata di Laplace costituisce infatti un problema inverso, caratterizzato da una particolare sensibilità agli errori numerici e di arrotondamento, come osservato da Zhu e Chen (2013).
Uno degli algoritmi maggiormente utilizzati è quello proposto da Abate e Whitt (1995), basato sul metodo delle serie di Fourier e su una tecnica di accelerazione della convergenza mediante sommazione di Eulero. Labart e Lelong (2009) adottano questa impostazione e ne analizzano l'accuratezza nel contesto specifico delle opzioni parigine, mentre Bernard, Le Courtois e Quittard-Pinon (2005) propongono una procedura alternativa basata sull'approssimazione della trasformata mediante funzioni di cui è nota l'inversa analitica.
Merita una precisazione l'affermazione, formulata nel paragrafo 2.6.1, secondo cui per le opzioni parigine non sono generalmente disponibili espressioni analitiche nel dominio del tempo. Zhu e Chen (2013) ottengono, attraverso l'inversione delle trasformate, soluzioni analitiche per i prezzi delle varianti standard e cumulativa, espresse rispettivamente mediante un integrale doppio e integrali multipli. Tali risultati eliminano la necessità di ricorrere a un'inversione numerica della trasformata, ma richiedono comunque la valutazione numerica di integrali di dimensione elevata. L'affermazione del Capitolo 2 va quindi intesa nel senso che non sono generalmente disponibili formule chiuse di tipo elementare, paragonabili a quelle delle opzioni barriera, e non nel senso di un'assenza assoluta di risultati analitici.

4.4.3 Gli approcci alternativi: le differenze finite, i reticoli e la simulazione

Accanto alla via analitica, la letteratura ha sviluppato diverse famiglie di metodi numerici, caratterizzate da vantaggi e limiti differenti.

Le differenze finite

L'approccio basato sulle equazioni alle derivate parziali è stato sviluppato da Haber, Schönbucher e Wilmott (1999) e da Vetzal e Forsyth (1999). La difficoltà specifica del problema parigino consiste nel fatto che il valore del contratto non dipende soltanto dal prezzo corrente e dal tempo residuo, ma anche dal tempo di escursione già accumulato. Il dominio computazionale acquisisce pertanto una dimensione aggiuntiva rispetto al caso delle opzioni barriera, con il conseguente incremento della complessità e del costo computazionale.

I metodi reticolari

Avellaneda e Wu (1999) propongono un metodo basato su un reticolo trinomiale, mentre Costabile (2002) sviluppa una procedura combinatoria su un albero binomiale. Anche in questo caso, l'elemento critico è la necessità di tenere traccia, in ciascun nodo, del tempo trascorso oltre la barriera. L'informazione aggiuntiva richiesta dalla condizione parigina determina quindi un aumento del numero di stati da rappresentare e, di conseguenza, della complessità computazionale.

La simulazione Monte Carlo

Bernard e Boyle (2011) sviluppano un metodo Monte Carlo per opzioni parigine a monitoraggio discreto basato su una variabile di controllo e modificano inoltre la struttura del contratto assumendo che l'esercizio avvenga nell'istante in cui la condizione di barriera viene soddisfatta anziché alla scadenza. Il loro lavoro è particolarmente rilevante ai fini del Capitolo 5, poiché affronta direttamente il problema del monitoraggio discreto, che sarà discusso nel paragrafo 4.5.

4.4.4 Le estensioni oltre il moto browniano geometrico

I risultati richiamati sinora presuppongono la dinamica lognormale del quadro di Black (1976). Poiché il Capitolo 1 ha documentato la presenza di movimenti improvvisi nei prezzi del greggio, e il paragrafo 2.3.2 ne ha discusso le implicazioni per l'ipotesi di continuità delle traiettorie, è opportuno segnalare l'esistenza di estensioni a dinamiche più generali.

Chesney e Vasiljević (2018) sviluppano la valutazione di opzioni parigine in un modello a diffusione con salti, ricorrendo a una doppia trasformata di Laplace-Carson rispetto alla scadenza e al tempo di escursione. Il loro contributo consente inoltre di distinguere analiticamente il contributo della componente di salto da quello della componente diffusiva nella regione di escursione.

Questa possibilità di scomposizione è di interesse diretto per l'argomento della tesi. L'ipotesi sviluppata nel paragrafo 3.5 è infatti che una clausola basata sulla permanenza possa ridurre la sensibilità del contratto a movimenti di breve durata, mentre i salti rappresentano una componente particolarmente concentrata della dinamica del sottostante. Disporre di un quadro analitico nel quale i due contributi siano distinguibili fornisce quindi un termine di riferimento teorico per il confronto tra specificazioni del processo svolto nel Capitolo 5, nel quale ai salti permanenti si affianca una componente di movimenti transitori.

4.4.5 Il ricorso alla simulazione per le opzioni parigine

Le tre ragioni indicate nel paragrafo 2.6.1 a sostegno dell'impiego della simulazione trovano in questa sede una giustificazione più precisa.
La prima riguarda l'assenza di formule elementari. Come mostrato nei paragrafi precedenti, la valutazione analitica richiede, a seconda della specificazione considerata, l'inversione numerica di trasformate, con le difficoltà di stabilità e sensibilità agli errori numerici discusse da Zhu e Chen (2013), oppure la valutazione numerica di integrali multipli. Nessuna delle due procedure offre la semplicità delle formule disponibili per le opzioni barriera nel Capitolo 3.
La seconda riguarda l'uniformità del confronto. L'obiettivo del Capitolo 5 è confrontare opzioni barriera e opzioni parigine, nelle due varianti, al variare del parametro D, della frequenza di monitoraggio e della specificazione del processo. Adottare per ciascun caso il metodo analiticamente più efficiente comporterebbe il confronto di stime ottenute mediante procedure eterogenee, caratterizzate da fonti di errore differenti. La simulazione Monte Carlo consente invece di trattare tutti i contratti mediante uno schema computazionale comune, rendendo più diretto il confronto tra le diverse strutture contrattuali.
La terza riguarda la flessibilità rispetto al processo. Come osservato nel paragrafo 2.6.1, l'introduzione di salti o di volatilità stocastica richiede principalmente un adattamento dello schema di generazione delle traiettorie, mentre la logica di valutazione del payoff può rimanere invariata. È la proprietà che consente, nel Capitolo 5, di valutare i medesimi contratti sotto dinamiche con salti e con spike.
Il costo di questa scelta è rappresentato dalla necessità di gestire con attenzione gli errori introdotti dalla discretizzazione temporale e dalla simulazione Monte Carlo, tema affrontato nel paragrafo seguente.

4.5 Il monitoraggio discreto nel caso parigino

Questa sezione esamina le conseguenze del monitoraggio discreto sulle opzioni parigine. Dopo aver precisato come il parametro di permanenza sia specificato nella prassi contrattuale, vengono individuate le distorsioni che la discretizzazione introduce e viene discusso perché la correzione di continuità impiegata per le opzioni barriera non sia trasferibile a questo caso.

4.5.1 Il parametro D nella prassi contrattuale

Nella pratica contrattuale, il parametro D non è generalmente espresso come un intervallo di tempo continuo, ma come un numero di osservazioni. Un contratto negoziato over-the-

counter può specificare, ad esempio, che la clausola si attiva se il prezzo di regolamento giornaliero permane oltre la soglia per un determinato numero di giorni di negoziazione consecutivi. Questa struttura deve essere distinta dalle clausole «*m* su *n*» richiamate nel paragrafo 4.2.4, nelle quali il conteggio può riguardare anche osservazioni non consecutive all'interno di una finestra temporale prefissata.
Questa osservazione impone una precisazione concettuale che non ha un corrispettivo esatto nel Capitolo 3. Nel caso delle opzioni barriera, il monitoraggio discreto era stato presentato, nel paragrafo 3.4.2, come una convenzione che si discosta dalla formulazione teorica in tempo continuo. Nel caso parigino, il monitoraggio discreto non rappresenta soltanto una diversa modalità di osservazione del sottostante: esso definisce l'unità di misura stessa del parametro contrattuale. Un contratto che richiede cinque giorni consecutivi oltre la soglia, ad esempio, considera soddisfatta la condizione quando il prezzo di regolamento ha superato la barriera per cinque osservazioni consecutive. La formulazione a tempo continuo costituisce invece l'idealizzazione teorica corrispondente, nella quale la durata dell'escursione è misurata in termini di tempo anziché di numero di osservazioni.
Ne consegue che, nel Capitolo 5, la formulazione discreta sarà trattata come specificazione di riferimento per la simulazione, mentre la formulazione continua sarà impiegata come termine di confronto teorico.

4.5.2 Le distorsioni di discretizzazione

Quando la simulazione è impiegata per approssimare un contratto a monitoraggio continuo, l'errore di discretizzazione assume nel caso parigino una configurazione più articolata rispetto a quella descritta nel paragrafo 2.6.4.
La prima componente è la medesima già discussa per le opzioni barriera. Una traiettoria può oltrepassare la soglia tra due istanti di osservazione e rientrare prima dell'osservazione successiva, senza che la simulazione ne rilevi l'attraversamento. Si determina così una sottostima della probabilità di attraversamento della barriera.
La seconda componente è invece specifica del contratto parigino. Anche quando l'attraversamento viene rilevato, la durata dell'escursione viene approssimata contando gli intervalli della griglia nei quali il sottostante risulta oltre la barriera. Tale procedura può sottostimare la durata effettiva dell'escursione, poiché non tiene conto delle frazioni di intervallo comprese tra l'effettivo attraversamento della soglia e la prima osservazione successiva, né tra l'ultima osservazione al di sopra della soglia e il successivo rientro.
Le due componenti descritte tendono a ritardare l'attivazione della clausola. Nella variante standard ne esiste tuttavia una terza, di segno opposto. Così come la griglia può non rilevare un attraversamento verso l'alto, essa può non rilevare un breve rientro al di sotto della soglia: due escursioni distinte nel continuo appaiono allora come un'unica escursione, di durata superiore a ciascuna delle due, cosicché l'orologio non viene azzerato

quando dovrebbe e l'attivazione risulta anticipata. Il segno complessivo della distorsione non è quindi determinabile a priori, poiché dipende dal peso relativo dei tre effetti e, di conseguenza, dai parametri del contratto e dalla frequenza di osservazione. Nel caso delle opzioni barriera, per contro, la distorsione ha segno univoco: il prezzo di un'opzione knock-out risulta sistematicamente sovrastimato e quello di un'opzione knock-in sottostimato.

Merita osservare che la variante cumulativa presenta una caratteristica diversa rispetto alla variante standard. Il tempo di occupazione è infatti una quantità additiva e la sua approssimazione mediante il conteggio degli intervalli nei quali il sottostante si trova oltre la soglia può essere interpretata come una somma discreta che approssima l'integrale definito nel continuo. Nella variante standard, invece, è necessario identificare correttamente l'inizio e la fine di ciascuna escursione e verificare se la sua durata abbia raggiunto D, rendendo la valutazione maggiormente sensibile alla posizione degli attraversamenti rispetto alla griglia di osservazione. Il problema della valutazione dei derivati sui tempi di occupazione in presenza di monitoraggio continuo e discreto è stato analizzato da Fusai e Tagliani (2001).

4.5.3 I limiti della correzione di continuità nel caso parigino

Nel paragrafo 3.4.2 è stata presentata la correzione di Broadie, Glasserman e Kou (1997), che riconduce il prezzo di un'opzione barriera a monitoraggio discreto a quello di un'opzione a monitoraggio continuo mediante uno spostamento opportuno del livello della barriera. La sua estensione al caso parigino incontra tuttavia un ostacolo di natura strutturale.

La correzione agisce infatti su un singolo parametro contrattuale, il livello della barriera, e mira a compensare l'effetto principale del monitoraggio discreto, ossia la mancata rilevazione di attraversamenti di brevissima durata. Nel contratto parigino, invece, gli effetti della discretizzazione sono almeno due e il secondo riguarda la misurazione della durata dell'escursione anziché il livello della soglia. Uno spostamento della barriera non può quindi, per sua natura, correggere direttamente un errore che si manifesta lungo la dimensione temporale.

Coerentemente con questa difficoltà, la letteratura ha affrontato il caso parigino discreto attraverso metodi di valutazione specifici, anziché mediante una semplice estensione della correzione di continuità delle opzioni barriera. Vetzal e Forsyth (1999) sviluppano un approccio numerico generale rivolto alle opzioni parigine discrete e alle opzioni barriera ritardate, mentre Bernard e Boyle (2011) costruiscono uno stimatore Monte Carlo per il contratto a monitoraggio discreto.

Ne deriva la questione metodologica anticipata nel paragrafo 2.6.4. Confrontare un'opzione barriera e un'opzione parigina simulate sulla medesima griglia temporale significa

confrontare due procedure di valutazione soggette a errori di discretizzazione di natura differente. Nel Capitolo 5 sarà pertanto necessario rendere esplicito il trattamento adottato per ciascun contratto e distinguere, per quanto possibile, gli effetti derivanti dalla diversa struttura delle clausole da quelli introdotti dalla discretizzazione numerica.

4.6 Gli effetti della clausola sulle criticità delle opzioni barriera

Il paragrafo 3.4 ha esaminato cinque criticità delle opzioni barriera, mentre il paragrafo 3.5 ne ha ricondotto l'origine comune alla definizione dell'evento contrattuale come primo contatto con la soglia. La presente sezione verifica in che misura la clausola di permanenza modifichi tale quadro.

La fragilità della copertura

La discontinuità del payoff in prossimità della barriera, discussa nel paragrafo 3.4.1, viene attenuata. Il semplice raggiungimento della soglia non produce infatti un effetto contrattuale immediato, poiché è necessario che la permanenza oltre la barriera si protragga per la durata prevista D. Il valore del contratto risulta quindi meno sensibile al semplice attraversamento della soglia rispetto a un'opzione barriera tradizionale. L'attenuazione non è però uniforme nel tempo. Il valore del contratto dipende anche dalla durata già accumulata, misurata dal tempo di permanenza nella variante standard e dal tempo di occupazione in quella cumulativa, e man mano che tale quantità si avvicina a D, la sensibilità può concentrarsi nuovamente: in prossimità del completamento dell'escursione, una variazione del prezzo può determinare il raggiungimento della condizione di attivazione oppure interrompere il conteggio della durata. La clausola parigina distribuisce quindi l'effetto della soglia lungo il tempo di permanenza, riducendone la rilevanza immediata nella fase iniziale dell'escursione e rendendola nuovamente significativa quando la durata accumulata è prossima a D.

La convenzione di monitoraggio

La dipendenza del valore dalla frequenza di osservazione, discussa nel paragrafo 3.4.2, non viene eliminata. Come osservato nel paragrafo 4.5.1, essa assume anzi una rilevanza specifica, poiché la frequenza di osservazione concorre a definire l'unità di misura del parametro D. Sotto questo profilo, la clausola parigina non risolve la questione del monitoraggio, ma richiede una specificazione contrattuale più accurata, in particolare

riguardo alla frequenza delle osservazioni e alla modalità con cui viene conteggiata la permanenza oltre la soglia.

La sensibilità alle escursioni transitorie

È la criticità alla quale la clausola parigina risponde in modo più diretto, ed è quella che il paragrafo 3.4.3 ha identificato come centrale ai fini della tesi. Il parametro D trasforma infatti la durata dell'escursione in un elemento contrattuale esplicito: un movimento di breve durata può non produrre l'effetto previsto dalla clausola anche quando il livello della barriera viene temporaneamente raggiunto. La corrispondenza tra clausola contrattuale e fenomeno economico risulta pertanto modificata rispetto alla barriera tradizionale, nei limiti della scelta di D discussa nel paragrafo 4.7.

Il barrier event risk

La concentrazione di interessi economici su uno specifico livello di prezzo, discussa nel paragrafo 3.4.4, può essere attenuata dalla richiesta di una permanenza oltre la soglia. Nella variante standard, un eventuale tentativo di influenzare il prezzo di riferimento in prossimità della scadenza dovrebbe essere sostenuto senza interruzioni per una durata sufficiente a soddisfare la condizione contrattuale, aumentando il costo e l'esposizione associati a tale strategia. Questa considerazione figura tra le motivazioni all'origine dello strumento in Chesney, Jeanblanc-Picqué e Yor (1997). La clausola non elimina tuttavia ogni possibile concentrazione dell'interesse economico: quest'ultimo può spostarsi dalla sola soglia di prezzo alla combinazione tra soglia e durata e, in particolare, concentrarsi nelle fasi in cui il tempo di permanenza nella variante standard, o il tempo di occupazione in quella cumulativa, è prossimo a D.

Il rischio di modello

Il quadro è qui più articolato e merita di essere considerato in entrambe le direzioni. Da un lato, il risultato di Schoutens, Simons e Tistaert (2004), richiamato nel paragrafo 3.4.5, mostra che modelli calibrati con analoga accuratezza alla stessa superficie di volatilità implicita possono attribuire prezzi significativamente differenti alla medesima opzione barriera e che una parte rilevante del disaccordo riguarda la probabilità di attraversamento della soglia. Nella misura in cui la clausola parigina filtra i movimenti di brevissima durata, essa potrebbe ridurre il peso della componente della dinamica associata agli attraversamenti estremamente rapidi della barriera.
Dall'altro lato, il valore di un'opzione parigina dipende dalla legge delle durate delle escursioni, che costituisce un funzionale della traiettoria più ricco della sola probabilità

di primo attraversamento. Non è quindi possibile stabilire a priori che la sostituzione della clausola di primo passaggio con una clausola di permanenza riduca la dispersione dei prezzi tra modelli. Una minore rilevanza degli attraversamenti istantanei potrebbe infatti essere accompagnata da una maggiore dipendenza dalla struttura temporale delle traiettorie.
La questione è pertanto di natura empirica, e il Capitolo 5 la affronta confrontando i prezzi delle due famiglie di contratti sotto tre specificazioni del processo, calibrate sul medesimo premio europeo. Il quadro analitico di Chesney e Vasiljević (2018), che separa il contributo della componente di salto da quello della componente diffusiva, fornisce a tale verifica un riferimento teorico.

4.7 I criteri di scelta del parametro D

La discussione svolta ha ricondotto le proprietà del contratto parigino a un unico parametro. Resta da esaminare il criterio con cui esso debba essere determinato, questione che il paragrafo 4.1.3 ha lasciato aperta.
Il problema ammette una formulazione economica precisa. Il parametro D deve individuare la soglia di durata oltre la quale un movimento del prezzo cessa di essere considerato transitorio ai fini contrattuali. Un valore troppo contenuto riduce la capacità della clausola di distinguere tra attraversamenti transitori e movimenti persistenti, facendo riemergere alcune delle criticità proprie dell'opzione barriera. Un valore troppo elevato, al contrario, riduce la probabilità di attivazione della clausola fino a renderla scarsamente rilevante, avvicinando il contratto all'opzione europea e riducendo la giustificazione economica della condizionalità.
Le caratteristiche empiriche documentate nel Capitolo 1 forniscono alcuni elementi utili per orientare tale scelta. La persistenza dei regimi di volatilità e la distinzione tra shock riassorbiti rapidamente e shock destinati a produrre effetti più duraturi, discusse nel paragrafo 1.4, suggeriscono infatti che la dimensione temporale costituisca un elemento rilevante per distinguere le diverse dinamiche osservate nel mercato del greggio. Non è tuttavia possibile ricavare da tali evidenze una soglia quantitativa univoca da trasferire direttamente nella specificazione contrattuale. Il Capitolo 5 tratterà pertanto D come un parametro da far variare, esaminando la sensibilità dei risultati al suo valore anziché assumere un'unica durata di riferimento.
Occorre infine dichiarare esplicitamente il limite dell'impostazione adottata. Come osservato nel paragrafo 4.2.4, la logica delle clausole di permanenza è documentata nel comparto delle obbligazioni convertibili, mentre non è stata individuata una letteratura specificamente dedicata al loro impiego nei mercati delle materie prime energetiche.

L'applicazione al mercato del greggio sviluppata nel presente lavoro non dispone quindi di riferimenti empirici precedenti con i quali confrontare direttamente i risultati. Questa circostanza costituisce al tempo stesso un elemento di interesse e un limite dell'analisi: i risultati del Capitolo 5 dovranno essere interpretati come una verifica numerica condotta in un ambiente simulato e non come evidenza ricavata da contratti effettivamente negoziati sul mercato.

Il capitolo successivo procede quindi al confronto numerico. Le opzioni barriera analizzate nel Capitolo 3 e le opzioni parigine esaminate nel presente capitolo saranno valutate mediante il metodo Monte Carlo introdotto nel paragrafo 2.6, sotto tre specificazioni alternative del processo del sottostante, calibrate sul medesimo premio europeo. L'obiettivo sarà misurare l'effetto del parametro D sul valore del contratto e verificare se la clausola di permanenza riduca la dipendenza del prezzo dalla specificazione adottata, che il paragrafo 2.3.3 ha individuato come problema e il paragrafo 3.5 ha posto al centro dell'argomento.

Capitolo 5

Valutazione numerica e simulazione Monte Carlo

I capitoli precedenti hanno ricondotto le principali criticità delle opzioni barriera alla definizione dell'evento contrattuale come primo contatto con la soglia, presentando la clausola di permanenza come una possibile risposta a tali problematiche. L'analisi è rimasta finora sul piano teorico. Il presente capitolo ne propone una verifica numerica, attraverso la simulazione Monte Carlo di opzioni barriera e opzioni parigine scritte sul futures del greggio.

5.1 Le finalità dell'analisi numerica

L'obiettivo del capitolo è analizzare numericamente l'effetto dell'introduzione di una permanenza minima oltre la barriera sul valore di un'opzione scritta sul futures del petrolio. Il confronto viene effettuato tra un'opzione barriera e le due varianti di opzione parigina introdotte nel Capitolo 4, considerando diversi valori della durata minima necessaria per l'attivazione della clausola.
Il ricorso alla simulazione deriva dalla natura stessa del problema. Come discusso nel paragrafo 4.4, per le opzioni parigine non sono disponibili formule chiuse di tipo elementare; il metodo Monte Carlo, introdotto nel paragrafo 2.6, permette invece di valutare tutti i contratti attraverso un unico schema, rendendo possibile un confronto diretto.
L'esperimento considera tre diverse dinamiche per il prezzo futures: il modello lognormale di Black, una specificazione che incorpora salti permanenti e una terza che aggiunge anche movimenti transitori, denominati spike, destinati a riassorbirsi nell'arco di pochi giorni. L'introduzione delle ultime due dinamiche consente di verificare se i risultati siano sensibili alla specificazione adottata per il processo.
Il capitolo mira quindi a rispondere ad alcune domande, riprese nelle conclusioni. In

primo luogo, si vuole verificare se la clausola di permanenza modifichi in misura significativa il valore del contratto rispetto all'opzione barriera e, in tal caso, per quale motivo. In secondo luogo, si analizza se tale effetto dipenda dalla dinamica ipotizzata per il sottostante. In terzo luogo, si verifica se il fenomeno al quale la clausola intende intervenire, ossia l'escursione di breve durata oltre la soglia, sia effettivamente osservabile nel mercato del greggio. Infine, resta da valutare se, alla luce dei risultati ottenuti, l'opzione parigina possa essere considerata preferibile rispetto all'opzione barriera.

5.2 Le specificazioni del processo del prezzo futures

Questa sezione descrive le tre dinamiche considerate nell'analisi. Esse rappresentano casi particolari di una stessa struttura generale e vengono rese confrontabili attraverso una calibrazione comune.

5.2.1 La forma generale e il vincolo di martingala

Indicando con S_t il prezzo del sottostante, le dinamiche analizzate appartengono alla famiglia

$$dS_t \;=\; \theta(t, S_t)\, dt \;+\; \sigma S_t\, dW_t \;+\; g(t, S_{t^-})\, dJ_t, \tag{5.1}$$

nella quale il primo termine rappresenta la componente di deriva, il secondo quella diffusiva e il terzo i movimenti discontinui, descritti attraverso il processo di salto J_t.
Nel presente lavoro il sottostante è rappresentato dal prezzo futures F_t, circostanza che introduce un vincolo specifico. Sotto la misura risk-neutral, infatti, il prezzo futures è una martingala, come richiamato nel paragrafo 3.2.1: la componente di deriva deve pertanto essere nulla, mentre ogni componente di salto deve essere compensata mediante un termine deterministico che ne neutralizzi il contributo atteso. Di conseguenza, il ritorno verso la media documentato da Schwartz (1997) per i prezzi spot delle materie prime non può essere incorporato nella dinamica del futures sotto la misura risk-neutral.

5.2.2 Le tre specificazioni: il moto geometrico browniano, i salti e gli spike

La prima specificazione riprende quella introdotta nel Capitolo 3 e non presenta componenti discontinue:

$$\frac{dF_t}{F_t} \;=\; \sigma\, d\widetilde{W}_t \tag{5.2}$$

Essa costituisce il riferimento dell'analisi ed è l'unica specificazione per la quale sono disponibili le formule chiuse utilizzate nella fase di validazione.

La seconda introduce una componente di salto secondo l'impostazione di Merton (1976), già presentata nel paragrafo 2.3.2:

$$\frac{dF_t}{F_{t^-}} \;=\; \sigma\, d\widetilde{W}_t \;+\; \left(e^U - 1\right) dN_t \;-\; \lambda_J \left(\mathbb{E}[e^U] - 1\right) dt, \tag{5.3}$$

dove N_t è un processo di Poisson con intensità λ_J, mentre U rappresenta l'ampiezza del salto espressa in termini logaritmici. L'ultimo termine costituisce il compensatore. Il salto è permanente, poiché modifica il livello del prezzo senza prevedere un successivo rientro, rappresentando quindi uno shock che si consolida, come discusso nel paragrafo 3.4.3.

La terza specificazione introduce, oltre ai salti permanenti, una seconda componente discontinua volta a rappresentare movimenti di natura transitoria. Con una determinata intensità, il prezzo registra un rialzo improvviso e, dopo un intervallo di tempo casuale, caratterizzato da una durata media di quattro giorni di negoziazione, un movimento di segno opposto ne annulla esattamente l'ampiezza. Entrambi i movimenti sono compensati in modo da preservare la proprietà di martingala del prezzo; durante lo spike, il compensatore determina quindi una deriva positiva, necessaria a controbilanciare in media il successivo movimento di rientro.
La specificazione costituisce un adattamento dell'idea di componente di ritorno per salto introdotta da Geman e Roncoroni (2006) per i prezzi dell'elettricità. Il modello originale è formulato per il prezzo spot e incorpora un meccanismo di ritorno verso la media, risultando pertanto incompatibile con il vincolo di martingala imposto al prezzo futures sotto la misura risk-neutral. Nel presente lavoro se ne riprende l'idea di fondo, costruendo lo spike come una coppia di salti compensati.
Formalmente, sia A_t la variabile che assume valore uno quando è in corso uno spike e zero altrimenti, e sia U_t^s l'ampiezza dello spike attivo, definita come valore assoluto di una variabile normale e quindi positiva per costruzione. Indicando con $N^{\uparrow}$ il processo che conta i movimenti al rialzo, con intensità $\lambda_s(1 - A_{t^-})$, e con $N^{\downarrow}$ quello che conta i movimenti di rientro, con intensità κA_{t^-}, la dinamica del prezzo futures è

$$\frac{dF_t}{F_{t^-}} \;=\; \sigma\, d\widetilde{W}_t \;+\; \left(e^U - 1\right) dN_t \;+\; \left(e^{U^s} - 1\right) dN_t^{\uparrow} \;+\; \left(e^{-U_{t^-}^s} - 1\right) dN_t^{\downarrow} \;-\; c(t)\, dt, \tag{5.4}$$

dove $c(t)$ rappresenta il compensatore, ossia il termine deterministico che riassorbe il valore atteso delle variazioni generate dai salti e dagli spike, mantenendo il prezzo futures una martingala. Nel movimento di rientro viene utilizzata l'ampiezza $U_{t^-}^s$ dello spike in corso, anziché una nuova estrazione, così che il ribasso annulli esattamente l'ampiezza del rialzo iniziale. Durante lo spike, il compensatore deve quindi tenere conto del successivo rientro al ribasso e determina la deriva positiva precedentemente descritta. Il modello

consente inoltre la presenza di un solo spike alla volta.
Esplicitamente, il compensatore assume la forma

$$c_t \;=\; \lambda_J\big(\mathbb{E}[e^{U}]-1\big) \;+\; \big(1-A_{t^-}\big)\,\lambda_s\big(\mathbb{E}[e^{U^s}]-1\big) \;+\; A_{t^-}\,\kappa\,\big(e^{-U^s_{t^-}}-1\big). \tag{5.5}$$

Il primo addendo è il compensatore di Merton della (5.3) ed è costante. Il secondo opera sulle sole traiettorie nelle quali nessuno spike è in corso, poiché solo su quelle un nuovo rialzo può verificarsi. Il terzo è negativo, poiché il rientro riduce il prezzo: sottraendolo si ottiene la deriva positiva che caratterizza la fase di spike. Poiché U^s è definita come valore assoluto di una variabile normale di media μ_s e scarto σ_s, il valore atteso che compare nel secondo addendo si calcola in forma chiusa come

$$\mathbb{E}\big[e^{U^s}\big] \;=\; e^{\mu_s+\sigma_s^2/2}\,\Phi\!\left(\frac{\mu_s+\sigma_s^2}{\sigma_s}\right) \;+\; e^{-\mu_s+\sigma_s^2/2}\,\Phi\!\left(\frac{\sigma_s^2-\mu_s}{\sigma_s}\right),$$

dove Φ indica la funzione di ripartizione della normale standard.
I parametri adottati sono $\lambda_J = 1$ all'anno e U distribuita normalmente con media nulla e scarto 0,12 per i salti permanenti; per gli spike, $\lambda_s = 5$ all'anno, U^s pari al valore assoluto di una variabile normale con media 0,09 e scarto 0,03, e $\kappa = 63$.
La durata media di quattro giorni è stata scelta in coerenza con l'evidenza ottenuta dalla serie storica del Brent nel paragrafo 5.9, nella quale la mediana delle escursioni oltre la soglia è pari a quattro osservazioni giornaliere.

5.2.3 La calibrazione sul premio dell'opzione europea

Le tre dinamiche non sono direttamente confrontabili nella loro parametrizzazione iniziale: l'introduzione di componenti aggiuntive aumenta infatti la variabilità del processo, e le differenze osservate nei contratti a barriera rifletterebbero in parte anche questo effetto. Si procede pertanto secondo l'impostazione di Schoutens, Simons e Tistaert (2004), scegliendo la volatilità diffusiva di ciascuna specificazione in modo che tutte e tre producano lo stesso premio per l'opzione europea, pari a 6,7911.

Tabella 5.1: Volatilità diffusiva calibrata delle tre specificazioni, in modo che ciascuna riproduca il premio della call europea di riferimento, pari a 6,7911 e ottenuto con la formula di Black ($F_0 = K = 70$, $r = 3\%$, $T = 126$ giorni di negoziazione, $\sigma = 35\%$).

Specificazione	Volatilità diffusiva
Black	35,00%
Salti	32,71%
Salti e spike	15,99%

Una volta effettuata questa calibrazione, le tre dinamiche risultano indistinguibili considerando esclusivamente il prezzo dell'opzione europea; le differenze nei contratti condizionati riflettono quindi principalmente la diversa struttura della dinamica. È tuttavia importante precisare che l'allineamento del premio di una singola opzione europea non equivale alla calibrazione dell'intera superficie di volatilità implicita. L'esperimento rappresenta pertanto una versione più debole del risultato analizzato da Schoutens e coautori.

5.3 I contratti valutati e la definizione operativa di D

Questa sezione definisce i quattro contratti oggetto del confronto e la regola adottata per misurare la permanenza del sottostante al di sopra della soglia.
Tutti i contratti condividono il medesimo sottostante, la stessa scadenza e lo stesso prezzo di esercizio, differendo esclusivamente per la condizione che determina l'estinzione dell'opzione. La call europea, priva di barriera, costituisce il riferimento superiore. La call up-and-out si estingue alla prima chiusura del futures al di sopra della barriera. La call parigina standard up-and-out, invece, si estingue quando il futures chiude oltre la barriera per D osservazioni consecutive, mentre la corrispondente versione cumulativa si estingue quando il numero complessivo delle chiusure al di sopra della barriera raggiunge D.
La configurazione considerata è quella up-and-out reverse, individuata nel paragrafo 3.4.1 come particolarmente problematica sotto il profilo della copertura.
Il parametro D è espresso come numero di osservazioni giornaliere, in coerenza con quanto definito nel paragrafo 4.5.1. È necessario precisare che D osservazioni consecutive comprendono $D - 1$ intervalli della griglia temporale: cinque chiusure consecutive, ad esempio, corrispondono a quattro giornate effettivamente trascorse. La definizione contrattuale adottata è quindi quella basata sul numero di osservazioni; le relative conseguenze sono analizzate nel paragrafo 5.8.
Il caso $D = 1$ rappresenta il limite in cui una singola chiusura oltre la soglia è sufficiente a estinguere il contratto, rendendolo equivalente all'opzione barriera. I valori considerati sono $D \in \{1, 2, 3, 5, 8, 10, 15, 20, 30\}$.

5.4 L'impostazione della simulazione Monte Carlo

Questa sezione illustra nel dettaglio il procedimento di valutazione, i parametri utilizzati e i controlli adottati per verificarne la correttezza.

5.4.1 La generazione delle traiettorie e la stima del premio

Per ogni simulazione viene generata una traiettoria del prezzo futures sui 126 giorni di negoziazione che intercorrono tra la data di valutazione e la scadenza:

$$F_0 \;\to\; F_{t_1} \;\to\; F_{t_2} \;\to\; \cdots \;\to\; F_T$$

Per ciascuna traiettoria si seguono cinque passaggi: si verifica se il prezzo di chiusura ha oltrepassato la barriera; si misura per quante osservazioni consecutive e per quante complessive il prezzo è rimasto al di sopra della soglia; si determina, per ciascun contratto, se la relativa clausola di estinzione si sia attivata; si calcola il payoff $(F_T - K)^+$ per i contratti rimasti in vita; infine, si attualizza tale payoff. Il premio corrisponde quindi alla media dei payoff attualizzati sulle N traiettorie, secondo la (2.30):

$$V_0 \;=\; e^{-rT}\,\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\text{Payoff}_i \tag{5.6}$$

I quattro contratti vengono valutati utilizzando le medesime traiettorie. In questo modo, il confronto tra i relativi premi è soggetto allo stesso campione simulato e il rumore campionario associato alle differenze risulta fortemente ridotto, così da riflettere principalmente la diversa condizione di estinzione.
Le traiettorie sono generate a coppie antitetiche. Per il modello di Black vengono utilizzate 600.000 traiettorie, mentre per ciascuna delle due dinamiche con salti ne vengono impiegate 100.000. La componente diffusiva è simulata in modo esatto; le componenti di salto richiedono invece una discretizzazione più fine rispetto alla griglia di monitoraggio e vengono pertanto simulate mediante sedici sotto-passi per giornata.

5.4.2 I parametri di base

Tabella 5.2: Parametri di base dell'esperimento, riferiti a una call up-and-out sul futures con monitoraggio alla chiusura giornaliera. F_0 è il prezzo futures iniziale, K il prezzo di esercizio, B la barriera, r il tasso privo di rischio e T la scadenza, espressa in giorni di negoziazione.

Parametro	Valore
Prezzo futures iniziale F_0	70
Prezzo di esercizio K	70
Barriera B	84
Tasso privo di rischio r	3%
Scadenza T	126 giorni
Volatilità σ (modello di Black)	35%

Il prezzo iniziale, la volatilità e il tasso coincidono con quelli utilizzati nella Figura 3.1, così da mantenere la confrontabilità con i risultati del Capitolo 3. Lo strike è posto pari al prezzo iniziale, in modo che il confronto non sia influenzato da differenze di moneyness. La barriera è fissata al 20% al di sopra del prezzo corrente e determina una probabilità di attraversamento prossima al 39%: un livello sufficientemente elevato da rendere apprezzabili le differenze tra i contratti, ma non così basso da comportarne l'estinzione nella quasi totalità dei casi. Poiché $K < B$, la configurazione rientra nel caso reverse definito nel paragrafo 3.1.1.
I valori scelti non derivano da una calibrazione a prezzi di mercato, poiché l'obiettivo dell'esperimento è confrontare le diverse strutture contrattuali mantenendo gli stessi parametri di riferimento.

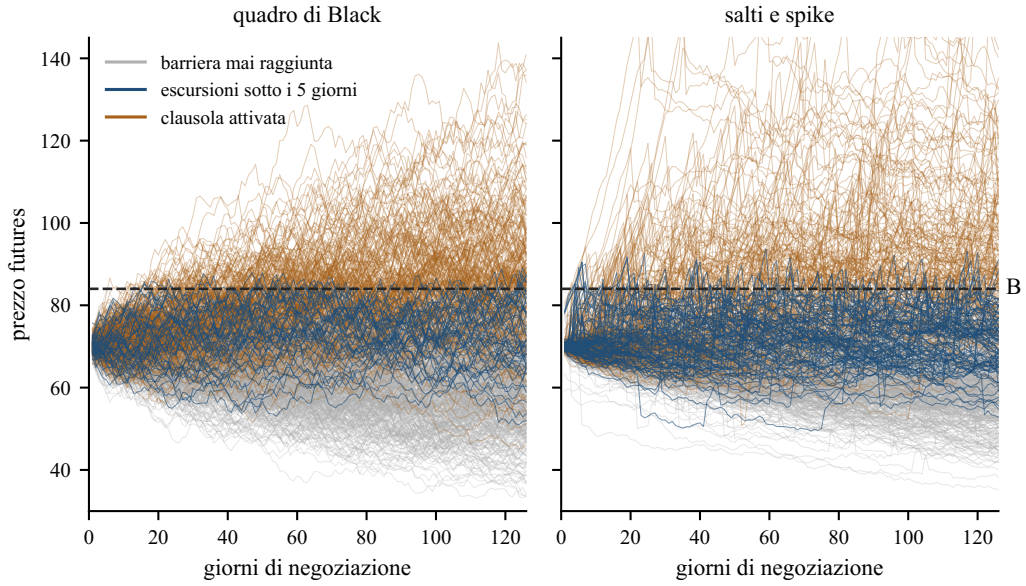

Figura 5.1: Traiettorie simulate del prezzo futures sotto il quadro di Black e sotto la specificazione con salti e spike. Il colore distingue le traiettorie in base all'esito della clausola di permanenza con $D = 5$: in grigio quelle che non raggiungono la barriera, in blu quelle che la superano senza permanervi, in ocra quelle che attivano la clausola. Sono rappresentate 750 traiettorie, estratte a caso in proporzione alla frequenza di ciascun esito.

La Figura 5.1 rende visibile il meccanismo alla base del confronto. Le traiettorie in blu rappresentano i casi in cui l'opzione barriera e quella parigina producono esiti differenti: la prima si estingue, mentre la seconda rimane in vita. Nel pannello di destra sono inoltre riconoscibili gli spike, che oltrepassano la barriera per poi rientrare nel giro di pochi giorni.

5.4.3 La validazione della simulazione

Poiché per le opzioni parigine non sono disponibili formule chiuse con cui confrontare direttamente le stime, l'affidabilità dei risultati dipende in primo luogo dalla correttezza

del procedimento di simulazione. La Tabella 5.3 presenta tre gruppi di controlli.

Tabella 5.3: Controlli di validazione della simulazione.

Controllo	Stima	Riferimento	Scarto in e.s.
$\mathbb{E}[F_T]$, Black	69,98	70	1,3
$\mathbb{E}[F_T]$, salti	69,97	70	1,2
$\mathbb{E}[F_T]$, salti e spike	70,14	70	2,6
Europea contro formula di Black	6,7643	6,7911	0,92
Barriera contro valore corretto	0,5862	0,5939	1,29

Il primo gruppo di controlli verifica che il prezzo futures conservi la proprietà di martingala, ossia che il suo valore atteso alla scadenza rimanga uguale al prezzo iniziale. Si tratta del controllo fondamentale per le dinamiche con salti e deve essere superato prima di interpretare gli altri risultati: in assenza di una corretta compensazione, infatti, il processo presenterebbe una deriva sistematica e i risultati della simulazione non sarebbero interpretabili. Le prime due specificazioni superano il controllo. La terza presenta invece uno scarto dello 0,20%, riconducibile alla discretizzazione della dinamica e non alla sua costruzione. Tale scarto si riduce progressivamente aumentando il numero di sotto-passi per giornata, passando da +0,56 con quattro sotto-passi a +0,17 con sedici e a +0,04 con quarantotto.

Il secondo gruppo mette a confronto le stime Monte Carlo con valori esatti, disponibili nel quadro di Black. Per l'opzione europea lo scarto risulta inferiore a un errore standard. Il confronto per l'opzione barriera richiede invece maggiore cautela: la simulazione monitora il prezzo una volta al giorno, mentre la formula del paragrafo 3.2 assume un monitoraggio continuo. La differenza tra i due valori, pari a circa il 24% del premio, rappresenta il bias di discretizzazione discusso nel paragrafo 3.4.2. Applicando la correzione di Broadie, Glasserman e Kou (1997), che porta la barriera da 84 a 85,09, il valore di riferimento diventa 0,5939 e lo scarto residuo scende a 1,29 errori standard, quindi non significativo. La correzione consente così di riassorbire il 93,1% della distorsione iniziale.

A questi controlli si aggiungono due verifiche di coerenza interna: la relazione di parità in/out discussa nel paragrafo 4.1.4 e l'ordinamento espresso dalla (4.4) risultano rispettati per ogni valore di D e per ciascuna delle tre specificazioni.

5.5 Il premio e la probabilità di attivazione al variare di D

Questa rappresenta la sezione centrale del capitolo. Nel quadro di Black, essa analizza come il valore del contratto vari all'aumentare della permanenza richiesta e ne individua la motivazione.

5.5.1 I risultati nel modello di Black

Tabella 5.4: Premio delle due varianti parigine e probabilità di attivazione della clausola al variare di D, nel modello di Black ($\sigma = 35\%$), per la call up-and-out con $F_0 = K = 70$, $B = 84$, $r = 3\%$ e $T = 126$ giorni di negoziazione. D è il numero di chiusure giornaliere oltre la barriera che causano l'estinzione; P(att.) è la probabilità che l'estinzione avvenga entro la scadenza. Stime su 600.000 traiettorie, con errori standard compresi tra 0,002 e 0,007.

D	Standard	Cumulativa	P(att.) standard	P(att.) cumulativa
1	0,5887	0,5887	38,9%	38,9%
2	0,7333	0,6918	36,0%	36,8%
3	0,8522	0,7721	33,9%	35,3%
5	1,0625	0,9113	30,8%	33,0%
8	1,3342	1,0925	27,4%	30,4%
10	1,5085	1,2079	25,5%	28,9%
15	1,9106	1,4830	21,8%	25,9%
20	2,2795	1,7468	19,0%	23,3%
30	2,9706	2,2758	14,5%	19,2%

Il premio dell'opzione europea è pari a 6,7775. Per $D = 1$, le due varianti coincidono con l'opzione barriera, il cui premio è 0,5887.

All'aumentare di D, il premio cresce mentre la probabilità di attivazione della clausola si riduce, come previsto: un numero sempre maggiore di escursioni di breve durata non è sufficiente a determinare l'estinzione del contratto. L'effetto risulta quantitativamente significativo. Passando da $D = 1$ a $D = 5$, quindi richiedendo cinque osservazioni consecutive oltre la barriera, il premio della variante standard aumenta dell'80%. Il riavvicinamento al premio dell'opzione europea è invece graduale: anche per $D = 30$, il premio raggiunge soltanto il 44% di quello europeo.

5.5.2 La scomposizione del premio per esito delle traiettorie

Il dato più rilevante della Tabella 5.4 è la sproporzione tra la variazione della probabilità di attivazione e quella del premio. Passando da $D = 1$ a $D = 5$, la probabilità di attivazione

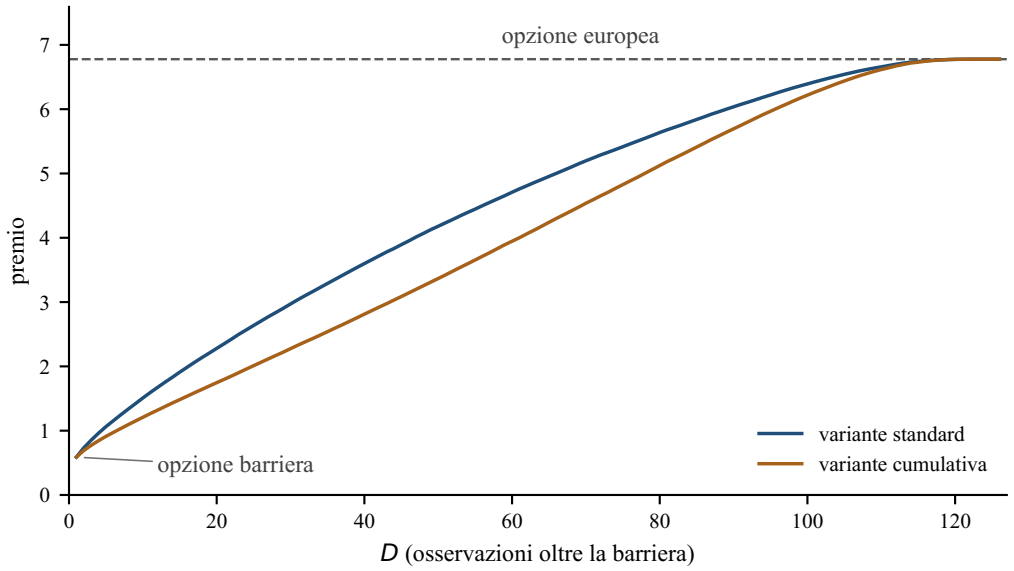

Figura 5.2: Premio in funzione di D per le due varianti parigine, con l'opzione barriera e l'opzione europea come riferimenti.

scende infatti dal 38,9% al 30,8%, quindi di circa un quinto, mentre il premio aumenta dell'80%.

La spiegazione emerge dal confronto tra i payoff medi attualizzati delle traiettorie, distinti in base al loro esito. Le traiettorie che non raggiungono mai la barriera, ossia le sole che l'opzione barriera mantiene in vita, presentano un payoff medio di 0,96. Quelle che superano la barriera senza rimanervi per cinque osservazioni, e che vengono quindi estinte dalla barriera ma conservate dall'opzione parigina, hanno invece un payoff medio di 5,84. Infine, le traiettorie che soddisfano la clausola di permanenza, e che vengono pertanto estinte anche dall'opzione parigina, mostrano un payoff medio di 18,55.

Le traiettorie recuperate grazie alla clausola di permanenza hanno quindi, in media, un valore circa sei volte superiore a quello delle traiettorie che l'opzione barriera conserva già. Esse rappresentano l'8,1% del totale e il loro contributo al premio, pari a 0,4739, aggiunto al premio della barriera di 0,5887, ricostruisce sostanzialmente il premio dell'opzione parigina, pari a 1,0625. La clausola di permanenza non determina quindi semplicemente la sopravvivenza di una quota casuale delle traiettorie estinte dalla barriera, ma restituisce al detentore traiettorie caratterizzate da un valore medio significativamente più elevato.

5.5.3 Il divario tra variante standard e cumulativa

La variante cumulativa presenta sistematicamente un valore inferiore rispetto a quella standard, in accordo con la relazione discussa nel paragrafo 4.2.2. Il divario aumenta inoltre con D: è nullo per $D = 1$, raggiunge il 14% per $D = 5$ e il 23% per $D = 30$. Le traiettorie che oltrepassano la barriera tendono infatti a presentare escursioni brevi e ripetute; il criterio cumulativo, sommando tali permanenze, può raggiungere la soglia in

numerose traiettorie nelle quali nessuna singola escursione sarebbe sufficientemente lunga. Questo spiega la scelta della variante standard come struttura principale nel paragrafo 4.2.3.

5.6 La dispersione dei prezzi tra specificazioni del processo

La domanda alla base di questa sezione è se i risultati ottenuti finora dipendano dalla dinamica assunta per il petrolio. L'analisi riprende la criticità discussa nel paragrafo 3.4.5, secondo cui modelli in grado di riprodurre gli stessi prezzi delle opzioni europee possono comunque produrre valori differenti per le opzioni barriera.

Tabella 5.5: Premio sotto le tre specificazioni, calibrate sul medesimo premio europeo con le volatilità della Tabella 5.1, per la call con $F_0 = K = 70$, $r = 3\%$ e $T = 126$ giorni di negoziazione. Le opzioni con barriera sono up-and-out con $B = 84$ e monitoraggio giornaliero; D è il numero di chiusure consecutive oltre la barriera che causano l'estinzione della parigina. La dispersione è la differenza tra il premio massimo e quello minimo delle tre specificazioni, in percentuale della loro media. Stime su 100.000 traiettorie per specificazione.

Contratto	Black	Salti	Salti e spike	Dispersione
Europea	6,7643	6,7145	6,8034	1,3%
Barriera	0,5862	0,6177	0,3147	59,9%
Parigina, $D = 3$	0,8453	0,8843	0,6366	31,4%
Parigina, $D = 5$	1,0592	1,0789	0,9036	17,3%
Parigina, $D = 10$	1,5090	1,5151	1,2627	17,7%

Il risultato appare netto. I tre modelli producono premi per l'opzione europea che differiscono soltanto dell'1,3%, differenza residua rispetto alla calibrazione. Per l'opzione barriera, invece, la dispersione raggiunge il 59,9%, evidenziando, nell'esperimento considerato, il fenomeno documentato da Schoutens, Simons e Tistaert (2004). Per l'opzione parigina la divergenza si riduce rapidamente all'aumentare di D, scendendo al 17,3% con cinque osservazioni e stabilizzandosi successivamente intorno al 17-20%.

Il confronto tra le diverse specificazioni permette di individuarne l'origine. La dinamica caratterizzata da salti permanenti genera premi vicini a quelli del modello di Black: un salto che porta il prezzo oltre la barriera tende infatti a mantenerlo oltre la soglia e viene quindi trattato in modo simile dal criterio di primo contatto e da quello basato sulla permanenza. La principale fonte di divergenza è rappresentata dagli spike, che determinano attraversamenti temporanei della barriera seguiti da un rapido rientro: l'opzione barriera considera ciascuno di questi episodi sufficiente per l'estinzione, mentre la clausola di permanenza ne attenua l'effetto quando D è dell'ordine della durata dello spike.

Il risultato deve tuttavia essere interpretato con cautela. La clausola di permanenza non elimina la dipendenza dal modello, che nell'esperimento rimane intorno a un quinto del

premio. Il valore di un'opzione parigina dipende infatti dalla distribuzione delle durate delle escursioni, che le diverse dinamiche possono rappresentare in modo differente. La clausola ne attenua però la componente associata ai movimenti transitori, riducendo la dispersione di oltre due terzi rispetto all'opzione barriera nell'esperimento considerato.

5.7 La sensibilità alla barriera e alla volatilità

Questo paragrafo analizza, nel modello di Black e con $D = 5$, come i risultati varino al modificarsi dei due parametri più rilevanti per un contratto con barriera: la posizione della barriera e il livello della volatilità.

Tabella 5.6: Premio dell'opzione barriera e delle due varianti parigine al variare del livello della barriera B, da 10% a 30% sopra il prezzo futures iniziale, per la call up-and-out con $F_0 = K = 70$, $r = 3\%$, $\sigma = 35\%$ (modello di Black) e $T = 126$ giorni di negoziazione. Per le varianti parigine $D = 5$ chiusure giornaliere oltre la barriera. Stime su 600.000 traiettorie.

B	Barriera	Parigina standard	Parigina cumulativa
77,0	0,0704	0,2315	0,1685
80,5	0,2527	0,5653	0,4565
84,0	0,5887	1,0625	0,9113
87,5	1,0761	1,6687	1,4904
91,0	1,6621	2,3383	2,1529

Il rapporto tra il premio della parigina e quello della barriera si riduce man mano che la soglia viene allontanata dal prezzo iniziale: passa da 3,3 per $B = 77$ a 1,4 per $B = 91$. Quanto più la barriera è vicina al prezzo corrente, tanto più frequenti risultano le escursioni di breve durata al di sopra della soglia e, di conseguenza, tanto maggiore è il numero di episodi che la clausola di permanenza non considera sufficienti per l'estinzione. L'effetto di D risulta quindi più marcato proprio quando la barriera è maggiormente esposta ad attraversamenti transitori.

Tabella 5.7: Premio dell'opzione europea, dell'opzione barriera e della parigina standard al variare della volatilità σ, nel modello di Black, per la call con $F_0 = K = 70$, $r = 3\%$ e $T = 126$ giorni di negoziazione. Le opzioni con barriera sono up-and-out con $B = 84$ e monitoraggio giornaliero; per la parigina $D = 5$ chiusure consecutive oltre la barriera.

σ	Europea	Barriera	Parigina standard
20,0%	4,3823	1,6266	2,0757
27,5%	5,5844	0,9550	1,4595
35,0%	6,7856	0,5839	1,0506
42,5%	7,9793	0,3801	0,7970
50,0%	9,1624	0,2628	0,6308

Si osserva il fenomeno anticipato nel paragrafo 3.2.2: mentre il premio dell'opzione europea aumenta con la volatilità, quello dell'opzione barriera e quello della parigina diminuiscono, poiché l'aumento della probabilità di attraversamento della barriera prevale sull'aumento del valore atteso del payoff. La clausola di permanenza attenua tale effetto, senza tuttavia invertirne la direzione: passando dal 20% al 50% di volatilità, il premio della barriera si riduce dell'84%, mentre quello della parigina diminuisce del 70%.

5.8 Gli effetti della frequenza di monitoraggio

Il valore di un'opzione parigina dipende non soltanto dall'eventuale superamento della barriera, ma anche dalla durata della permanenza oltre la soglia. La frequenza con cui il prezzo viene osservato incide quindi direttamente sulla misurazione di tale durata. Questa sezione ne quantifica l'effetto nel quadro di Black, assumendo una soglia di cinque osservazioni consecutive.

Per isolare l'effetto della frequenza di monitoraggio, viene generata un'unica griglia temporale fine, con 32 osservazioni per giornata, dalla quale vengono ricavate, mediante sottocampionamento, le griglie meno frequenti. In questo modo, tutte le frequenze di osservazione sono costruite sulle medesime traiettorie.

Tabella 5.8: Premio della parigina standard (call up-and-out con $F_0 = K = 70$, $B = 84$, $r = 3\%$, $\sigma = 35\%$, $T = 126$ giorni) al variare del numero di osservazioni giornaliere. La clausola si attiva dopo cinque giornate di permanenza oltre la barriera, cioè cinque volte il numero di osservazioni giornaliere in chiusure consecutive. Stime su 60.000 traiettorie.

Osservazioni per giornata	Premio	Scarto dalla griglia più fine
1	1,0530	−0,1762
2	1,1216	−0,1076
4	1,1618	−0,0674
8	1,1914	−0,0378
16	1,2139	−0,0153
32	1,2292	0

Il risultato presenta un segno opposto rispetto a quello osservato per l'opzione barriera. Nel caso della barriera, una frequenza di osservazione più bassa può non rilevare alcuni attraversamenti, determinando un aumento del premio. Per la parigina si osserva invece il contrario: con monitoraggio giornaliero il premio risulta inferiore del 14% rispetto a quello ottenuto con la griglia più fine.

La spiegazione risiede nella modalità con cui viene misurata la durata. Con una sola osservazione al giorno, ciascuna chiusura al di sopra della soglia viene associata a un'intera giornata, mentre k chiusure consecutive coprono in realtà soltanto $k - 1$ intervalli. La durata della permanenza risulta quindi sovrastimata di circa una giornata, e tale effetto

prevale sugli altri due fenomeni discussi nel paragrafo 4.5.2, ossia gli attraversamenti e i rientri che non vengono rilevati dalla griglia di osservazione.
Ne deriva una conseguenza pratica: nella definizione contrattuale di un'opzione parigina, l'espressione «D giorni consecutivi» rimane ambigua se non viene specificato se D rappresenti il numero di osservazioni oppure quello degli intervalli temporali. Con i parametri considerati, le due interpretazioni determinano una differenza di circa il 7% del premio.
La stessa considerazione chiarisce perché la correzione di Broadie, Glasserman e Kou, efficace nel caso delle opzioni barriera, non sia direttamente trasferibile alle opzioni parigine. La correzione interviene infatti modificando il livello della barriera, mentre nel caso parigino la principale fonte di distorsione riguarda la misurazione della durata.

5.9 La durata delle escursioni sulla serie storica del Brent

Le sezioni precedenti si basano su traiettorie generate secondo specifiche dinamiche di prezzo. Questa sezione verifica invece sui dati osservati se il fenomeno a cui interviene la clausola di permanenza, ossia il superamento della soglia per un periodo breve, sia effettivamente riscontrabile nel mercato del greggio.

È importante precisare che si tratta di frequenze storiche osservate sotto la misura fisica[1], e non di probabilità risk-neutral. Esse non sono pertanto direttamente confrontabili con le probabilità di attivazione stimate nelle sezioni precedenti.

5.9.1 I dati e la costruzione delle finestre

La serie utilizzata è costituita dai prezzi spot giornalieri del Brent pubblicati dalla U.S. Energy Information Administration, la stessa fonte impiegata per calcolare la volatilità riportata nella Figura 1.5. Il campione considerato va da gennaio 2011 ad agosto 2026 e comprende 3.962 osservazioni. L'intera serie disponibile, a partire dal 1987, viene utilizzata come controllo.
Poiché nel periodo considerato il prezzo del Brent ha assunto livelli molto differenti, la barriera viene definita in termini relativi. Per ciascuna finestra mobile di 126 giorni, corrispondente alla scadenza dell'esperimento simulato, la soglia è fissata al 20% al di sopra del prezzo di apertura della finestra; le finestre vengono poi fatte avanzare di un giorno alla volta. Esse risultano quindi fortemente sovrapposte: uno stesso episodio può

[1] La misura fisica è la misura di probabilità che descrive la frequenza effettiva degli eventi. Sotto di essa il prezzo del sottostante evolve con il rendimento atteso μ introdotto nel paragrafo 2.2.2, e non con la deriva imposta dalla misura risk-neutral del paragrafo 2.2.4.

contribuire a più finestre e, in prossimità dei loro estremi, può essere rilevato con una durata inferiore a quella effettiva. I risultati devono pertanto essere interpretati come evidenza di natura descrittiva.

5.9.2 La distribuzione delle durate

Tabella 5.9: Distribuzione delle durate delle escursioni del prezzo spot del Brent (EIA) oltre una soglia posta al 20% sopra il prezzo di apertura della finestra, su finestre mobili di 126 giorni di negoziazione, da gennaio 2011 ad agosto 2026. Durate in numero di osservazioni giornaliere consecutive.

Statistica	Osservazioni
Mediana	4
Media	14,3
Primo quartile	1
Terzo quartile	13
Nono decile	49
Massimo	125

Le 3.837 finestre analizzate contengono complessivamente 3.764 escursioni. La distribuzione delle durate presenta una marcata asimmetria: la mediana è pari a quattro osservazioni, equivalenti a tre giornate effettivamente trascorse, mentre la durata media supera le quattordici osservazioni. Il 54,2% delle escursioni si conclude in meno di cinque osservazioni; all'estremo opposto, il 10% supera le quarantanove osservazioni. Considerando l'intera serie disponibile dal 1987, i valori risultano pressoché invariati.

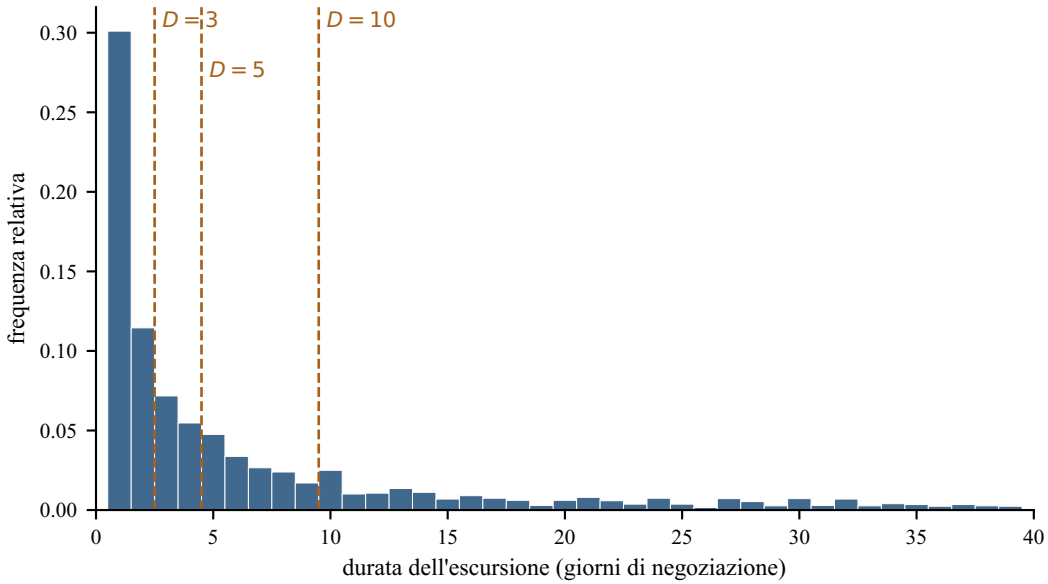

Figura 5.3: Distribuzione delle durate delle escursioni del prezzo spot del Brent (EIA) oltre la soglia, da gennaio 2011 ad agosto 2026. Le linee verticali indicano $D = 3$, 5 e 10.

La presenza simultanea di escursioni molto brevi e di episodi che si protraggono per diversi mesi corrisponde alla configurazione descritta nel paragrafo 3.4.3. Una clausola basata esclusivamente sul primo contatto con la soglia non è in grado di distinguere tra queste diverse durate.

5.9.3 Le estinzioni evitate dalla clausola di permanenza

Dal punto di vista del contratto, tuttavia, rileva la singola finestra, poiché è sufficiente che al suo interno si verifichi un'unica escursione sufficientemente prolungata perché la clausola di permanenza si attivi.

Tabella 5.10: Quota di finestre attraversate in cui nessuna escursione raggiunge D osservazioni giornaliere consecutive, cioè quota di estinzioni che la clausola eviterebbe. Prezzo spot del Brent (EIA), soglia posta al 20% sopra il prezzo di apertura della finestra, finestre mobili di 126 giorni di negoziazione; una finestra è attraversata se contiene almeno una chiusura oltre la soglia.

D	2011-2026	1987-2026
3	10,2%	9,5%
5	16,1%	16,9%
10	27,3%	28,7%

Con cinque osservazioni consecutive, la clausola eviterebbe circa un'estinzione ogni sei, mentre con dieci osservazioni la quota supererebbe una su quattro. Il valore risulta inferiore alla quota di escursioni brevi perché, nella maggior parte delle finestre, a una successione di attraversamenti di breve durata segue prima o poi almeno un episodio sufficientemente prolungato da attivare la clausola.

I dati indicano quindi che le escursioni di breve durata, alle quali interviene la clausola di permanenza, costituiscono un fenomeno frequente nel mercato del greggio. Non consentono tuttavia di individuare un valore univoco o "corretto" di D: la scelta dipende dalle finalità del contratto e rimane pertanto aperta, come discusso nel paragrafo 4.7.

Conclusioni

Il presente lavoro è partito da un'osservazione. Le opzioni barriera sono impiegate per coprire l'esposizione al prezzo del greggio a un costo inferiore a quello delle opzioni europee, ma fanno dipendere l'esito del contratto dal primo contatto del prezzo con una soglia prefissata. In un mercato come quello del petrolio questa scelta contrattuale ha conseguenze rilevanti, e la tesi si è chiesta se una clausola che richieda la permanenza del prezzo oltre la soglia, quella che caratterizza le opzioni parigine, ne modifichi la portata e in quale misura.

Il Capitolo 1 ha mostrato perché il mercato del greggio renda la domanda pertinente. La ridotta elasticità di breve periodo della domanda e dell'offerta fa sì che gli squilibri vengano assorbiti prevalentemente attraverso il prezzo, la cui volatilità si colloca ordinariamente tra il 25% e il 40% annuo e supera il 100% nelle fasi di tensione. Gli episodi richiamati, dal crollo dell'aprile 2020 alla crisi dello Stretto di Hormuz del 2026, mostrano come nel mercato del greggio convivano movimenti di natura molto diversa: rialzi che si consolidano per mesi e oscillazioni che si esauriscono nel giro di pochi giorni. È una distinzione che una clausola definita sul primo contatto con la soglia non è in grado di operare.

I Capitoli 2 e 3 hanno costruito il quadro di valutazione. Il modello di Black, adattamento al futures del modello di Black-Scholes-Merton, consente di valutare in forma chiusa le opzioni barriera secondo le formule di Reiner e Rubinstein (1991). Il paragrafo 3.4 ha individuato cinque criticità di questi contratti: la fragilità della copertura in prossimità della barriera, la dipendenza dalla convenzione di monitoraggio, la sensibilità alle escursioni transitorie, il barrier event risk e l'amplificazione del rischio di modello. Tutte risultano accentuate dal modo in cui l'evento contrattuale è definito, cioè come contatto istantaneo privo di qualsiasi riferimento alla sua durata.

Il Capitolo 4 ha presentato le opzioni parigine, introdotte da Chesney, Jeanblanc-Picqué e Yor (1997), nelle quali l'evento contrattuale richiede una permanenza oltre la soglia almeno pari a una durata D. Il parametro D consente quindi di rendere progressivamente meno rilevanti le escursioni di breve durata, avvicinando la struttura all'opzione barriera nel caso limite $D = 1$ e a quella europea all'aumentare della permanenza richiesta.

Poiché per le configurazioni considerate nel presente lavoro non sono disponibili formule chiuse elementari direttamente utilizzabili, la verifica dell'argomento è stata affidata alla simulazione Monte Carlo del Capitolo 5.

I risultati consentono di rispondere alle domande poste in apertura del Capitolo 5.

La prima riguardava l'effetto della clausola di permanenza sul valore del contratto. L'effetto è rilevante. Nel quadro di Black, richiedere una permanenza di cinque osservazioni giornaliere aumenta il premio dell'80% rispetto all'opzione barriera, mentre la probabilità che la clausola si attivi scende soltanto di un quinto, dal 38,9% al 30,8%. La sproporzione trova spiegazione nel valore delle traiettorie coinvolte. Le traiettorie che la clausola di permanenza sottrae all'estinzione, cioè quelle che superano la barriera senza permanervi, hanno un payoff medio circa sei volte superiore a quello delle traiettorie che l'opzione barriera già conservava; il loro contributo, sommato al premio della barriera, restituisce esattamente il premio dell'opzione parigina. L'effetto risulta inoltre massimo quando la barriera è vicina al prezzo corrente, cioè proprio nelle configurazioni in cui l'opzione barriera è più esposta alle escursioni brevi.

La seconda domanda riguardava la dipendenza dei risultati dalla dinamica ipotizzata per il sottostante. Accanto al quadro di Black sono state considerate una dinamica con salti permanenti e una con salti e spike, cioè movimenti improvvisi che si riassorbono in pochi giorni, costruiti adattando l'idea di Geman e Roncoroni (2006) al vincolo di martingala del prezzo futures. Le tre dinamiche, calibrate sul medesimo premio europeo, concordano su quest'ultimo entro l'1,3%, ma divergono del 59,9% sull'opzione barriera: il risultato è coerente con quello di Schoutens, Simons e Tistaert (2004) richiamato nel paragrafo 3.4.5. Sull'opzione parigina la divergenza scende al 17,3% con cinque osservazioni. La clausola di permanenza riduce quindi di oltre due terzi il disaccordo tra modelli, senza eliminarlo. Il confronto tra le dinamiche mostra inoltre da dove il disaccordo provenga: i salti permanenti modificano poco i prezzi, mentre la divergenza è dovuta principalmente agli spike, che l'opzione barriera conta tutti e che la clausola di permanenza filtra quando D è commisurato alla loro durata. È una distinzione tra componenti discontinue di natura economica diversa che la letteratura richiamata nel Capitolo 4 non opera, e che risulta qui decisiva per individuare l'origine del disaccordo tra modelli.

La terza domanda riguardava la presenza, nel mercato reale, del fenomeno su cui la clausola interviene. Sulla serie storica del Brent dal 2011 al 2026, oltre la metà delle escursioni oltre una soglia collocata al 20% sopra il prezzo di riferimento si esaurisce in meno di cinque osservazioni giornaliere, mentre una parte minore si protrae per mesi. Le escursioni brevi sono dunque un tratto frequente del mercato del greggio. Poiché tuttavia a una finestra basta una sola permanenza prolungata perché la clausola si attivi, la quota di estinzioni che una permanenza di cinque osservazioni avrebbe evitato è più contenuta, pari a circa una su sei.

L'analisi ha inoltre chiarito un aspetto che il Capitolo 4 aveva lasciato indeterminato, cioè il segno della distorsione introdotta dal monitoraggio discreto. Nel caso delle opzioni barriera il monitoraggio giornaliero aumenta il premio rispetto a quello continuo, perché alcuni attraversamenti sfuggono all'osservazione. Nel caso delle opzioni parigine l'effetto ha segno opposto: la griglia giornaliera riduce il premio del 14%, perché attribuisce a ogni chiusura oltre la soglia un'intera giornata e sovrastima quindi la durata delle escursioni. Ne discende un'indicazione di natura contrattuale: la formula «D giorni consecutivi» è ambigua se non si precisa se D conti osservazioni o intervalli, e per i parametri considerati l'ambiguità vale circa il 7% del premio.

Riletti alla luce delle cinque criticità del paragrafo 3.4, i risultati consentono una valutazione articolata. La sensibilità alle escursioni transitorie è la criticità su cui la clausola di permanenza interviene in modo più netto, ed è quella che i risultati sostengono con maggiore chiarezza. Il rischio di modello risulta attenuato in misura rilevante, ma non eliminato. La convenzione di monitoraggio non viene risolta, bensì spostata dal livello della barriera alla misura del tempo, e richiede per questo una specificazione contrattuale più accurata. La fragilità della copertura resta priva di verifica numerica, perché la sensibilità rispetto alla durata di escursione già maturata non è stata misurata. Il barrier event risk, infine, resta argomentato sul piano teorico per la sua natura istituzionale, che non si presta a una verifica in un ambiente simulato.

Resta quindi da confrontare l'utilità delle due strutture rispetto alle diverse finalità di copertura. Le due strutture attribuiscono conseguenze economiche diverse alle escursioni oltre la soglia: l'opzione barriera le tratta tutte allo stesso modo, l'opzione parigina le distingue in base alla loro durata. Per un operatore che intenda proteggersi da variazioni persistenti del prezzo, e non da oscillazioni temporanee, questa distinzione corrisponde meglio all'esposizione economica da coprire. Per chi ricerchi invece il costo minimo della copertura, l'opzione barriera rimane la soluzione più economica, poiché proprio le estinzioni che la clausola di permanenza evita sono quelle che riducono il premio. La scelta dipende quindi dall'uso che si intende fare del contratto, e il contributo del presente lavoro consiste nell'avere reso misurabili, nel contesto del greggio, i termini di tale scelta.

L'analisi presenta alcuni limiti, che definiscono al tempo stesso le direzioni in cui può essere estesa. I parametri delle componenti di salto e di spike non sono stimati sui dati, ma scelti per produrre fenomeni di ampiezza e durata plausibili: la loro stima sulla serie storica, che richiede di identificare preliminarmente gli spike e di separarli dai movimenti persistenti, costituirebbe il naturale completamento dell'esperimento. La calibrazione incrociata fa coincidere il premio di una sola opzione europea, mentre una verifica più generale richiederebbe di calibrare le tre dinamiche sull'intera superficie di volatilità implicita delle opzioni sul WTI o sul Brent. La sensibilità del contratto rispetto alla durata di escursione già maturata, e con essa la fragilità della copertura, potrebbe essere misurata

valutando il contratto a partire da stati intermedi e simulando esplicitamente una strategia di copertura dinamica. L'analisi storica, infine, riguarda il prezzo spot, mentre i contratti sono scritti su futures, e potrebbe essere ripetuta sulla serie del contratto a scadenza più vicina.

Un'estensione di interesse riguarda infine altri mercati dell'energia. Nel mercato elettrico, dove la non immagazzinabilità del bene rende gli spike assai più frequenti e pronunciati che nel greggio, la capacità della clausola di permanenza di distinguere i movimenti transitori da quelli persistenti dovrebbe manifestarsi con particolare evidenza, e l'impostazione sviluppata in questo lavoro si presterebbe a esservi applicata con modifiche contenute.

Appendice A

Codice della simulazione

Questa appendice riporta il codice Python utilizzato per le simulazioni e le elaborazioni del Capitolo 5, con seme di base 20260923 per la riproducibilità dei risultati.

A.1 Simulatore delle tre specificazioni

```
1
2
3  import numpy as np
4  from math import log, sqrt, exp, erf
5
6  F0, K, B = 70.0, 70.0, 84.0
7  R = 0.03
8  N_OSS = 126
9  T = N_OSS / 252
10 DT = T / N_OSS
11 SEME = 20260923
12
13 # --- parametri delle componenti discontinue -------------------------
14 LAM_J = 1.0          # intensita' annua dei salti permanenti
15 MU_J, SD_J = 0.0, 0.12   # ampiezza in logaritmo, normale
16
17 LAM_S = 5.0          # intensita' annua degli spike
18 MU_S, SD_S = 0.09, 0.03  # ampiezza in logaritmo, positiva
19 KAPPA = 63.0         # intensita' di rientro: durata media 252/63 = 4 giorni
20
21
22 def _N(x):
23     return 0.5 * (1.0 + erf(x / sqrt(2.0)))
24
25 def media_esp_valore_assoluto(mu, sd):
26     """E[exp(|X|)] con X normale di media mu e scarto sd."""
27     return (exp(mu + 0.5 * sd**2) * _N((mu + sd**2) / sd)
28             + exp(-mu + 0.5 * sd**2) * _N((sd**2 - mu) / sd))
29
30 def call_black(F0, K, s, r, T):
31     sT = s * sqrt(T)
32     d1 = log(F0 / K) / sT + sT / 2
```

```
    return exp(-r * T) * (F0 * _N(d1) - K * _N(d1 - sT))


def simula(spec, sigma, n_coppie, seme=SEME, con_spike=True, sub=16):
    """
    Restituisce il logaritmo del prezzo alle 126 chiusure giornaliere.
    spec: 'black', 'salti', 'spike'. con_spike disattiva la sola
    componente di spike lasciando invariate le altre fonti di casualita'.
    """
    m = n_coppie
    passi = N_OSS * sub
    h = DT / sub
    n = 2 * m

    g_diff = np.random.default_rng(seme)
    g_salti = np.random.default_rng(seme + 101)
    g_spike = np.random.default_rng(seme + 202)

    usa_salti = spec in ("salti", "spike")
    usa_spike = (spec == "spike") and con_spike

    comp_j = LAM_J * (exp(MU_J + 0.5 * SD_J**2) - 1.0) if usa_salti else 0.0
    comp_s = LAM_S * (media_esp_valore_assoluto(MU_S, SD_S) - 1.0)

    p_j = -np.expm1(-LAM_J * h)
    p_s = -np.expm1(-LAM_S * h)
    p_r = -np.expm1(-KAPPA * h)

    logF = np.full(n, log(F0))
    attivo = np.zeros(n, bool)
    ampiezza = np.zeros(n)
    out = np.empty((n, N_OSS))

    for i in range(passi):
        z = g_diff.standard_normal(m)
        Z = np.concatenate([z, -z])
        Nj = g_salti.random(n) < p_j
        Uj = g_salti.normal(MU_J, SD_J, n)
        Ns = g_spike.random(n) < p_s
        Us = np.abs(g_spike.normal(MU_S, SD_S, n))
        Rec = g_spike.random(n) < p_r

        deriva = -0.5 * sigma**2 * h - comp_j * h
        if usa_spike:
            deriva = deriva - (~attivo) * comp_s * h
            deriva = deriva - attivo * KAPPA * (np.exp(-ampiezza) - 1.0) * h

        logF = logF + deriva + sigma * sqrt(h) * Z

        if usa_salti:
            logF = logF + np.where(Nj, Uj, 0.0)

        if usa_spike:
            rientra = attivo & Rec
            logF = logF - np.where(rientra, ampiezza, 0.0)
            attivo = attivo & ~rientra
            ampiezza = np.where(rientra, 0.0, ampiezza)
            nuovo = Ns & ~attivo
            logF = logF + np.where(nuovo, Us, 0.0)
```

```
            ampiezza = np.where(nuovo, Us, ampiezza)
            attivo = attivo | nuovo

        if (i + 1) % sub == 0:
            out[:, (i + 1) // sub - 1] = logF

    return out


def statistiche(logF):
    sopra = logF > log(B)
    occ = sopra.sum(axis=1).astype(np.int32)
    n = logF.shape[0]
    run = np.zeros(n, np.int32); run_max = np.zeros(n, np.int32)
    for i in range(N_OSS):
        run = np.where(sopra[:, i], run + 1, 0)
        np.maximum(run_max, run, out=run_max)
    return np.exp(logF[:, -1]), run_max, occ


def stima(x):
    m = x.size // 2
    c = 0.5 * (x[:m] + x[m:])
    return c.mean(), c.std(ddof=1) / sqrt(m)


def calibra(spec, obiettivo, n_coppie=60_000):
    """Trova la volatilita' diffusiva che riproduce il premio europeo dato."""
    lo, hi = 0.005, 0.40
    for _ in range(22):
        mid = 0.5 * (lo + hi)
        FT = np.exp(simula(spec, mid, n_coppie)[:, -1])
        p = stima(exp(-R * T) * np.maximum(FT - K, 0.0))[0]
        if p < obiettivo:
            lo = mid
        else:
            hi = mid
    return 0.5 * (lo + hi)


if __name__ == "__main__":
    obiettivo = call_black(F0, K, 0.35, R, T)
    print(f"Premio europeo di riferimento (Black, sigma = 35%): {obiettivo:.4f}\n")

    sigmi = {"black": 0.35}
    for spec in ("salti", "spike"):
        sigmi[spec] = calibra(spec, obiettivo)
        print(f"  {spec:<7} volatilita' diffusiva calibrata: {sigmi[spec]:.4f}")

    print("\nControllo di martingala e premio europeo (200.000 traiettorie)")
    print(f"  {'spec':<8} {'E[F_T]':>9} {'e.s.':>7} {'europea':>9} {'e.s.':>7}")
    for spec in ("black", "salti", "spike"):
        logF = simula(spec, sigmi[spec], 100_000)
        FT = np.exp(logF[:, -1])
        mF, eF = stima(FT)
        mE, eE = stima(exp(-R * T) * np.maximum(FT - K, 0.0))
        print(f"  {spec:<8} {mF:>9.4f} {eF:>7.4f} {mE:>9.4f} {eE:>7.4f}")
    print(f"  {'atteso':<8} {F0:>9.4f} {'':>7} {obiettivo:>9.4f}")

```

```
    np.save("sigmi.npy", np.array([sigmi["black"], sigmi["salti"], sigmi["spike"]]))
```

A.2 Calibrazione e confronto tra specificazioni

```
import importlib.util, numpy as np, json
from math import exp, sqrt

sp = importlib.util.spec_from_file_location("m", "cap5_processi.py")
m = importlib.util.module_from_spec(sp); sp.loader.exec_module(m)

# parametri delle componenti discontinue, piu' contenuti
m.LAM_J, m.MU_J, m.SD_J = 1.0, 0.0, 0.12
m.LAM_S, m.MU_S, m.SD_S, m.KAPPA = 5.0, 0.09, 0.03, 63.0

F0, K, B, R, T = m.F0, m.K, m.B, m.R, m.T
D_GR = (1, 2, 3, 5, 8, 10, 15, 20, 30)
SUB = 16
NC = 50_000

out = []
def P(s=""):
    print(s, flush=True); out.append(s)

obiettivo = m.call_black(F0, K, 0.35, R, T)
P(f"Premio europeo di riferimento: {obiettivo:.4f}\n")

def prezzo_eur(spec, sig, nc=12_000, sub=12):
    FT = np.exp(m.simula(spec, sig, nc, sub=sub)[:, -1])
    return m.stima(exp(-R * T) * np.maximum(FT - K, 0.0))[0]

sigmi = {"black": 0.35}
for spec in ("salti", "spike"):
    lo, hi = 0.005, 0.40
    for _ in range(14):
        mid = 0.5 * (lo + hi)
        if prezzo_eur(spec, mid) < obiettivo: lo = mid
        else: hi = mid
    sigmi[spec] = 0.5 * (lo + hi)
    P(f"  {spec:<6} volatilita' diffusiva calibrata {sigmi[spec]:.4f}")

P("\nProduzione: {:,} traiettorie, {} sotto-passi al giorno\n".format(2*NC, SUB))
ris = {}
P(f"  {'spec':<7} {'E[F_T]':>9} {'e.s.':>7} {'europea':>9} {'e.s.':>7} {'barriera':>9}")
for spec in ("black", "salti", "spike"):
    logF = m.simula(spec, sigmi[spec], NC, sub=SUB)
    FT, run_max, occ = m.statistiche(logF)
    sc = exp(-R * T); intr = np.maximum(FT - K, 0.0)
    mF, eF = m.stima(FT)
    mE, eE = m.stima(sc * intr)
    mB, _ = m.stima(sc * intr * ~(run_max >= 1))
    P(f"  {spec:<7} {mF:>9.4f} {eF:>7.4f} {mE:>9.4f} {eE:>7.4f} {mB:>9.4f}")
    d = {}
    for D in D_GR:
        s_, es_ = m.stima(sc * intr * ~(run_max >= D))
        c_, ec_ = m.stima(sc * intr * ~(occ >= D))
        d[D] = (s_, es_, c_, ec_, float((run_max >= D).mean()))
    ris[spec] = {"eur": mE, "barr": mB, "D": d}
    np.save(f"runmax_{spec}.npy", run_max); np.save(f"FT_{spec}.npy", FT)
```

```

P("\nPremio della parigina standard sotto le tre specificazioni\n")
P(f"  {'D':>3} {'Black':>9} {'salti':>9} {'spike':>9} {'dispersione %':>14}")
for D in D_GR:
    v = [ris[s]["D"][D][0] for s in ("black", "salti", "spike")]
    disp = 100 * (max(v) - min(v)) / np.mean(v)
    P(f"  {D:>3} {v[0]:>9.4f} {v[1]:>9.4f} {v[2]:>9.4f} {disp:>14.2f}")
vb = [ris[s]["barr"] for s in ("black", "salti", "spike")]
P(f"  {'barr':>3} {vb[0]:>9.4f} {vb[1]:>9.4f} {vb[2]:>9.4f} "
  f"{100*(max(vb)-min(vb))/np.mean(vb):>14.2f}")
ve = [ris[s]["eur"] for s in ("black", "salti", "spike")]
P(f"  {'eur':>3} {ve[0]:>9.4f} {ve[1]:>9.4f} {ve[2]:>9.4f} "
  f"{100*(max(ve)-min(ve))/np.mean(ve):>14.2f}")

P("\nProbabilita' di attivazione della clausola standard\n")
P(f"  {'D':>3} {'Black':>9} {'salti':>9} {'spike':>9}")
for D in D_GR:
    v = [ris[s]["D"][D][4] for s in ("black", "salti", "spike")]
    P(f"  {D:>3} {v[0]:>9.4f} {v[1]:>9.4f} {v[2]:>9.4f}")

json.dump({s: {"eur": ris[s]["eur"], "barr": ris[s]["barr"],
               "D": {str(k): list(v) for k, v in ris[s]["D"].items()}}
           for s in ris} | {"sigmi": sigmi}, open("ris_specifiche.json", "w"))
open("risultati_c.txt", "w").write("\n".join(out))
```

A.3 Validazione della simulazione

```

import importlib.util
import numpy as np
from math import log, sqrt, exp, erf

sp = importlib.util.spec_from_file_location("proc", "cap5_processi.py")
proc = importlib.util.module_from_spec(sp); sp.loader.exec_module(proc)

# parametri delle componenti discontinue (par. 5.2)
proc.LAM_J, proc.MU_J, proc.SD_J = 1.0, 0.0, 0.12
proc.LAM_S, proc.MU_S, proc.SD_S, proc.KAPPA = 5.0, 0.09, 0.03, 63.0

# volatilita' diffusive calibrate (Tabella 5.1); si ottengono con
# cap5_produzione.py
SIGMA = {"black": 0.3500, "salti": 0.3271, "spike": 0.1599}

F0, K, B, R, T = proc.F0, proc.K, proc.B, proc.R, proc.T
N_OSS = proc.N_OSS
BETA = 0.5826                       # Broadie, Glasserman e Kou (1997)


def _N(x):
    return 0.5 * (1.0 + erf(x / sqrt(2.0)))


def call_black(F0, K, s, r, T):
    sT = s * sqrt(T)
    d1 = log(F0 / K) / sT + sT / 2
    return exp(-r * T) * (F0 * _N(d1) - K * _N(d1 - sT))

```

```
32
33  def call_up_and_out(F0, K, B, s, r, T):
34      """Call up-and-out a monitoraggio continuo, caso K < B (Tabella 3.2)."""
35      sT = s * sqrt(T); d = exp(-r * T)
36      x2 = log(F0 / B) / sT + sT / 2
37      y1 = log(B * B / (F0 * K)) / sT + sT / 2
38      y2 = log(B / F0) / sT + sT / 2
39      A2 = d * (F0 * _N(x2) - K * _N(x2 - sT))
40      A3 = d * (B * _N(-y1) - K * (F0 / B) * _N(-y1 + sT))
41      A4 = d * (B * _N(-y2) - K * (F0 / B) * _N(-y2 + sT))
42      return call_black(F0, K, s, r, T) - (A2 - A3 + A4)
43
44
45
46  # Parte 1 - Validazione
47  # ====================================================================
48
49  print(f"  {'specificazione':<15} {'E[F_T]':>9} {'e.s.':>7} {'scarto':>9} {'in e.s.':>8}")
50
51  sconto = exp(-R * T)
52  for spec in ("black", "salti", "spike"):
53      logF = proc.simula(spec, SIGMA[spec], 50_000, sub=16)
54      FT, run_max, _ = proc.statistiche(logF)
55      m, es = proc.stima(FT)
56      print(f"  {spec:<15} {m:>9.4f} {es:>7.4f} {m - F0:>+9.4f} {abs(m - F0) / es:>8.2f}")
57
58      if spec == "black":
59          intr = np.maximum(FT - K, 0.0)
60          eur, eur_es = proc.stima(sconto * intr)
61          bar, bar_es = proc.stima(sconto * intr * ~(run_max >= 1))
62
63  rif_eur = call_black(F0, K, 0.35, R, T)
64  rif_cont = call_up_and_out(F0, K, B, 0.35, R, T)
65  B_corr = B * exp(BETA * 0.35 * sqrt(T / N_OSS))
66  rif_corr = call_up_and_out(F0, K, B_corr, 0.35, R, T)
67
68  print(f"\n  Europea:  Monte Carlo {eur:.4f} (e.s. {eur_es:.4f}), "
69        f"Black {rif_eur:.4f}, scarto {abs(eur - rif_eur) / eur_es:.2f} e.s.")
70  print(f"  Barriera: Monte Carlo {bar:.4f} (e.s. {bar_es:.4f})")
71  print(f"            valore continuo {rif_cont:.4f}, scarto {bar - rif_cont:+.4f}")
72  print(f"            barriera corretta B* = {B_corr:.4f}, valore {rif_corr:.4f}, "
73        f"scarto {bar - rif_corr:+.4f} = {abs(bar - rif_corr) / bar_es:.2f} e.s.")
74  print(f"            distorsione riassorbita: "
75        f"{100 * (1 - abs(bar - rif_corr) / abs(bar - rif_cont)):.1f}%")
76
77
78
79  # Parte 2 - Payoff condizionati
80  # ====================================================================
81
82
83  D = 5
84  DT = T / N_OSS
85  rng = np.random.default_rng(20260923)
86  Z = rng.standard_normal((300_000, N_OSS))
87  Z = np.concatenate([Z, -Z], axis=0)
88  logF = log(F0) + np.cumsum(-0.5 * 0.35**2 * DT + 0.35 * sqrt(DT) * Z, axis=1)
89  del Z
90
```

```
sopra = logF > log(B)
n = logF.shape[0]
run = np.zeros(n, np.int32); run_max = np.zeros(n, np.int32)
for i in range(N_OSS):
    run = np.where(sopra[:, i], run + 1, 0)
    np.maximum(run_max, run, out=run_max)
payoff = sconto * np.maximum(np.exp(logF[:, -1]) - K, 0.0)

mai = run_max == 0                      # conservate dalla barriera
salvate = (run_max >= 1) & (run_max < D) # estinte dalla barriera, non dalla parigina
estinte = run_max >= D                  # estinte da entrambe

for nome, g in (("mai oltre la barriera", mai),
                ("salvate dalla clausola", salvate),
                ("estinte anche dalla parigina", estinte)):
    print(f"  {nome:<30} quota {100 * g.mean():5.1f}%   payoff medio {payoff[g].mean():7.4f}")

barriera = payoff[mai].sum() / n
contributo = payoff[salvate].sum() / n
print(f"\n  premio della barriera            {barriera:.4f}")
print(f"  contributo delle salvate         {contributo:.4f}")
print(f"  somma, cioe' premio parigina     {barriera + contributo:.4f}")
print(f"  rapporto salvate / mai toccate   {payoff[salvate].mean() / payoff[mai].mean():.2f}")
```

A.4 Confronto tra strutture contrattuali e sensibilità

```

import numpy as np
from math import log, sqrt, exp, erf
import json

F0, K, B = 70.0, 70.0, 84.0
SIGMA, R = 0.35, 0.03
N_OSS = 126
T = N_OSS / 252
DT = T / N_OSS
SEME = 20260923
BETA = 0.5826
D_GRIGLIA = (1, 2, 3, 5, 8, 10, 15, 20, 30, 45, 63)

out = []
def P(s=""):
    print(s); out.append(s)


def _N(x):
    return 0.5 * (1.0 + erf(x / sqrt(2.0)))

def call_black(F0, K, sigma, r, T):
    sT = sigma * sqrt(T)
    d1 = log(F0 / K) / sT + sT / 2
    return exp(-r * T) * (F0 * _N(d1) - K * _N(d1 - sT))

def call_uo(F0, K, B, sigma, r, T):
    """Call up-and-out continua, caso K < B, via Tabella 3.2 (eta=-1, phi=1)."""
    if F0 >= B:
        return 0.0
    eta, phi = -1.0, 1.0
```

```
    sT = sigma * sqrt(T); d = exp(-r * T)
    x1 = log(F0 / K) / sT + sT / 2
    x2 = log(F0 / B) / sT + sT / 2
    y1 = log(B * B / (F0 * K)) / sT + sT / 2
    y2 = log(B / F0) / sT + sT / 2
    A1 = phi*d*(F0*_N(phi*x1) - K*_N(phi*x1 - phi*sT))
    A2 = phi*d*(F0*_N(phi*x2) - K*_N(phi*x2 - phi*sT))
    A3 = phi*d*(B*_N(eta*y1) - K*(F0/B)*_N(eta*y1 - eta*sT))
    A4 = phi*d*(B*_N(eta*y2) - K*(F0/B)*_N(eta*y2 - eta*sT))
    return call_black(F0, K, sigma, r, T) - (A2 - A3 + A4)



# Simulazione su griglia giornaliera, con struttura antitetica a coppie
# ----------------------------------------------------------------------
def simula_giornaliera(n_coppie, seme=SEME, sub=1):
    """
    Restituisce, per ciascuna coppia antitetica e per ciascuno dei due rami:
      logS   incrementi cumulati del logaritmo (senza il livello iniziale)
             alle chiusure giornaliere, shape (n, N_OSS)
    Con sub > 1 la griglia interna e' piu' fine e si restituisce anche
    la traiettoria fine, usata nel paragrafo 5.5.
    """
    rng = np.random.default_rng(seme)
    m = n_coppie
    passi = N_OSS * sub
    dt = T / passi
    Z = rng.standard_normal((m, passi))
    Z = np.concatenate([Z, -Z], axis=0)
    inc = -0.5 * SIGMA**2 * dt + SIGMA * sqrt(dt) * Z
    return np.cumsum(inc, axis=1)


def statistiche(logS, F0v, sub=1):
    """
    Da incrementi cumulati e prezzo iniziale ricava, per ogni traiettoria:
      FT, run_max (osservazioni consecutive oltre B), occ (osservazioni oltre B)
    Il monitoraggio e' sulle chiusure giornaliere: colonne ogni ‘sub‘ passi.
    """
    chiusure = logS[:, sub - 1::sub] if sub > 1 else logS
    logF = log(F0v) + chiusure
    sopra = logF > log(B)
    occ = sopra.sum(axis=1).astype(np.int32)
    n = logF.shape[0]
    run = np.zeros(n, np.int32); run_max = np.zeros(n, np.int32)
    for i in range(sopra.shape[1]):
        run = np.where(sopra[:, i], run + 1, 0)
        np.maximum(run_max, run, out=run_max)
    return np.exp(logF[:, -1]), run_max, occ


def stima_coppie(x):
    """Media ed errore standard calcolati sulle coppie antitetiche."""
    m = x.size // 2
    coppie = 0.5 * (x[:m] + x[m:])
    med = coppie.mean()
    es = coppie.std(ddof=1) / sqrt(m)
    return med, es

```

```
92
93  def payoff(FT, run_max, occ, D, F0v=F0):
94      sc = exp(-R * T)
95      intr = np.maximum(FT - K, 0.0)
96      return {
97          "europea": sc * intr,
98          "barriera": sc * intr * ~(run_max >= 1),
99          "standard": sc * intr * ~(run_max >= D),
100         "cumulativa": sc * intr * ~(occ >= D),
101         "standard_in": sc * intr * (run_max >= D),
102     }
103
104
105 N_COPPIE = 300_000
106 logS = simula_giornaliera(N_COPPIE)
107 FT, run_max, occ = statistiche(logS, F0)
108 NTOT = FT.size
109
110 P("=" * 72)
111 P(f"Parametri: F0 = K = {F0:.0f}, B = {B:.0f}, sigma = {SIGMA:.0%}, "
112   f"r = {R:.0%}, T = {N_OSS} giorni di negoziazione")
113 P(f"Traiettorie: {NTOT:,} ({N_COPPIE:,} coppie antitetiche), seme {SEME}")
114 P("=" * 72)
115
116 # ------------------------------------------------------------
117 p = payoff(FT, run_max, occ, D=5)
118 m, es = stima_coppie(p["europea"])
119 rif = call_black(F0, K, SIGMA, R, T)
120 P(f"  Europea      MC {m:7.4f} (e.s. {es:.4f})   Black {rif:7.4f}   "
121   f"scarto {m-rif:+.4f} = {abs(m-rif)/es:.2f} e.s.")
122
123 m, es = stima_coppie(p["barriera"])
124 rif_c = call_uo(F0, K, B, SIGMA, R, T)
125 Bc = B * exp(BETA * SIGMA * sqrt(DT))
126 rif_b = call_uo(F0, K, Bc, SIGMA, R, T)
127 P(f"  Barriera     MC {m:7.4f} (e.s. {es:.4f})   continua {rif_c:7.4f}   "
128   f"con BGK {rif_b:7.4f}   scarto {m-rif_b:+.4f} = {abs(m-rif_b)/es:.2f} e.s.")
129 P(f"  Barriera corretta: B* = {Bc:.4f} contro B = {B:.2f}")
130
131 eur = p["europea"].mean()
132 P(f"  In-out parity (standard, D=5): out+in - europea = "
133   f"{p['standard'].mean()+p['standard_in'].mean()-eur:+.2e}")
134
135 # ------------------------------------------------------------
136
137 P(f"  {'traiettorie':>12} {'stima':>9} {'e.s.':>8} {'IC 95% semiamp.':>17}")
138 for nc in (5_000, 25_000, 50_000, 150_000, N_COPPIE):
139     sub = payoff(FT[:2*nc], run_max[:2*nc], occ[:2*nc], D=5)["standard"]
140     m, es = stima_coppie(sub)
141     P(f"  {2*nc:>12,} {m:>9.4f} {es:>8.5f} {1.96*es:>17.5f}")
142
143 grezzo = payoff(FT, run_max, occ, D=5)["standard"]
144 es_naive = grezzo.std(ddof=1) / sqrt(NTOT)
145 _, es_anti = stima_coppie(grezzo)
146 P(f"\n  Errore standard senza tener conto delle coppie: {es_naive:.5f}")
147 P(f"  Errore standard corretto (sulle coppie):        {es_anti:.5f}")
148 P(f"  Riduzione: {100*(1-es_anti/es_naive):.1f}%")
149
150 # variabile di controllo: la barriera come controllo per la parigina
```

```
X = payoff(FT, run_max, occ, D=5)["standard"]
Y = payoff(FT, run_max, occ, D=5)["barriera"]
mY = stima_coppie(Y)[0]
b_opt = np.cov(X, Y)[0, 1] / np.var(Y)
Xc = X - b_opt * (Y - rif_b)
m_cv, es_cv = stima_coppie(Xc)
P(f"\n  Variabile di controllo (barriera): coefficiente b = {b_opt:.4f}, "
  f"correlazione {np.corrcoef(X, Y)[0,1]:.3f}")
P(f"  stima {m_cv:.4f} con e.s. {es_cv:.5f}, contro {es_anti:.5f} "
  f"senza controllo (riduzione {100*(1-es_cv/es_anti):.1f}%)")


P(f"  {'D':>3} {'standard':>10} {'e.s.':>7} {'cumulativa':>11} {'e.s.':>7}"
  f" {'P(att.) std':>12} {'P(att.) cum':>12}")
tab54 = []
for D in D_GRIGLIA:
    q = payoff(FT, run_max, occ, D)
    ms, ess = stima_coppie(q["standard"])
    mc, esc = stima_coppie(q["cumulativa"])
    pa_s = (run_max >= D).mean(); pa_c = (occ >= D).mean()
    tab54.append((D, ms, ess, mc, esc, pa_s, pa_c))
    P(f"  {D:>3} {ms:>10.4f} {ess:>7.4f} {mc:>11.4f} {esc:>7.4f}"
      f" {pa_s:>12.4f} {pa_c:>12.4f}")
P(f"\n  Europea {eur:.4f}   Barriera {stima_coppie(p['barriera'])[0]:.4f}")

# sensibilita' alla barriera e alla volatilita' (D = 5)
P("\n  Sensibilita' alla posizione della barriera (D = 5)")
P(f"  {'B':>6} {'barriera':>10} {'standard':>10} {'cumulativa':>11}")
for Bv in (77.0, 80.5, 84.0, 87.5, 91.0):
    sopra = log(F0) + logS > log(Bv)
    o = sopra.sum(axis=1).astype(np.int32)
    n = sopra.shape[0]; r_ = np.zeros(n, np.int32); rm = np.zeros(n, np.int32)
    for i in range(N_OSS):
        r_ = np.where(sopra[:, i], r_ + 1, 0); np.maximum(rm, r_, out=rm)
    sc = exp(-R*T); intr = np.maximum(FT - K, 0.0)
    P(f"  {Bv:>6.1f} {stima_coppie(sc*intr*~(rm>=1))[0]:>10.4f}"
      f" {stima_coppie(sc*intr*~(rm>=5))[0]:>10.4f}"
      f" {stima_coppie(sc*intr*~(o>=5))[0]:>11.4f}")

P("\n  Sensibilita' alla volatilita' (D = 5, barriera 84)")
P(f"  {'sigma':>7} {'europea':>9} {'barriera':>10} {'standard':>10}")
for sv in (0.20, 0.275, 0.35, 0.425, 0.50):
    ls = simula_giornaliera(100_000, seme=SEME + 7)
    ls = ls * (sv / SIGMA)   # riscalatura degli incrementi
    corr = -0.5 * (sv**2 - SIGMA**2) * T * np.linspace(1/N_OSS, 1, N_OSS)
    lf = log(F0) + ls + corr
    sopra = lf > log(B)
    o = sopra.sum(axis=1).astype(np.int32)
    n = lf.shape[0]; r_ = np.zeros(n, np.int32); rm = np.zeros(n, np.int32)
    for i in range(N_OSS):
        r_ = np.where(sopra[:, i], r_ + 1, 0); np.maximum(rm, r_, out=rm)
    ft = np.exp(lf[:, -1]); sc = exp(-R*T); intr = np.maximum(ft - K, 0.0)
    P(f"  {sv:>7.3f} {stima_coppie(sc*intr)[0]:>9.4f}"
      f" {stima_coppie(sc*intr*~(rm>=1))[0]:>10.4f}"
      f" {stima_coppie(sc*intr*~(rm>=5))[0]:>10.4f}")

json.dump({"tab54": tab54}, open("tab54.json", "w"))
open("risultati_a.txt", "w").write("\n".join(out))
print("\n[salvato risultati_a.txt]")
```

A.5 Frequenza di monitoraggio

```

import numpy as np
from math import log, sqrt, exp, erf

F0, K, B = 70.0, 70.0, 84.0
SIGMA, R = 0.35, 0.03
N_OSS = 126
T = N_OSS / 252
SEME = 20260923
D_GIORNI = 5.0          # soglia di permanenza, in giornate

M = 32                  # sotto-passi per giornata nella griglia piu' fine
FREQ = (1, 2, 4, 8, 16, 32)
N_COPPIE = 30_000

out = []
def P(s=""):
    print(s); out.append(s)

def stima_coppie(x):
    m = x.size // 2
    c = 0.5 * (x[:m] + x[m:])
    return c.mean(), c.std(ddof=1) / sqrt(m)



# Un'unica passata sulla griglia fine
# ---------------------------------------------------------------------
rng = np.random.default_rng(SEME)
passi = N_OSS * M
dt = T / passi
Z = rng.standard_normal((N_COPPIE, passi))
Z = np.concatenate([Z, -Z], axis=0)
n = Z.shape[0]

logF = np.full(n, log(F0))
logB = log(B)

run = {m: np.zeros(n) for m in FREQ}        # durata corrente, in giornate
run_max = {m: np.zeros(n) for m in FREQ}    # durata massima, in giornate

# contatori diagnostici, riferiti alla griglia giornaliera (m = 1)
attrav_persi = np.zeros(n, np.int32)   # giornate attraversate ma chiuse sotto
rientri_persi = np.zeros(n, np.int32)  # rientri sotto B non visti a fine giornata
max_giorno = np.full(n, -np.inf)
min_giorno = np.full(n, np.inf)
chiusura_prec_sopra = np.zeros(n, bool)

for i in range(passi):
    logF = logF + (-0.5 * SIGMA**2 * dt + SIGMA * sqrt(dt) * Z[:, i])
    np.maximum(max_giorno, logF, out=max_giorno)
    np.minimum(min_giorno, logF, out=min_giorno)

    for m in FREQ:
        ogni = M // m
        if (i + 1) % ogni == 0:
```

```
            sopra = logF > logB
            run[m] = np.where(sopra, run[m] + 1.0 / m, 0.0)
            np.maximum(run_max[m], run[m], out=run_max[m])

    if (i + 1) % M == 0:                      # fine giornata
        chiusa_sopra = logF > logB
        attrav_persi += ((max_giorno > logB) & ~chiusa_sopra)
        rientri_persi += (chiusura_prec_sopra & chiusa_sopra &
                          (min_giorno < logB))
        chiusura_prec_sopra = chiusa_sopra
        max_giorno[:] = -np.inf
        min_giorno[:] = np.inf

FT = np.exp(logF)
sc = exp(-R * T)
intr = np.maximum(FT - K, 0.0)

P("=" * 72)
P(f" MONITORAGGIO DISCRETO   D = {D_GIORNI:.0f} giornate, "
  f"{n:,} traiettorie, griglia fine {M} sotto-passi")
P("=" * 72)

P(f"\n  {'oss./giorno':>12} {'premio':>9} {'e.s.':>8} {'scarto vs 32':>13}")
rif = None
for m in FREQ:
    v = sc * intr * ~(run_max[m] >= D_GIORNI)
    med, es = stima_coppie(v)
    if m == FREQ[-1]:
        rif = med
    P(f"  {m:>12} {med:>9.4f} {es:>8.4f}" +
      ("" if rif is None else f" {med - rif:>+13.4f}"))
v32 = sc * intr * ~(run_max[32] >= D_GIORNI)
for m in FREQ:
    v = sc * intr * ~(run_max[m] >= D_GIORNI)
    med, _ = stima_coppie(v)
    P(f"  m = {m:>2}: scarto rispetto a m = 32: {med - rif:+.4f}")

P("\n  Decomposizione degli effetti sulla griglia giornaliera")
est_fine = run_max[32] >= D_GIORNI
est_giorn = run_max[1] >= D_GIORNI
P(f"  estinte su entrambe le griglie           {np.mean(est_fine & est_giorn):.4f}")
P(f"  estinte solo sulla griglia fine (ritardo){np.mean(est_fine & ~est_giorn):>8.4f}")
P(f"  estinte solo su quella giornaliera (anticipo){np.mean(~est_fine & est_giorn):>4.4f}")
P(f"  traiettorie con almeno un attraversamento non rilevato "
  f"{np.mean(attrav_persi > 0):.4f}")
P(f"  traiettorie con almeno un rientro non rilevato          "
  f"{np.mean(rientri_persi > 0):.4f}")
P(f"  numero medio di attraversamenti non rilevati per traiettoria "
  f"{attrav_persi.mean():.3f}")
P(f"  numero medio di rientri non rilevati per traiettoria         "
  f"{rientri_persi.mean():.3f}")

P("\n  Convenzione di conteggio sulla griglia giornaliera")
k_oss = np.rint(run_max[1]).astype(int)
for D_oss in (3, 5, 8):
    a = np.mean(k_oss >= D_oss)
    b = np.mean(run_max[32] >= D_oss)
    c = np.mean(run_max[32] >= D_oss - 1)
    P(f"  D = {D_oss}: P(attivazione) giornaliera {a:.4f}; "
```

```
        f"continua con soglia {D_oss} giornate {b:.4f}; "
        f"con soglia {D_oss-1} giornate {c:.4f}")



open("risultati_b.txt", "w").write("\n".join(out))
print("\n[salvato risultati_b.txt]")
```

A.6 Durata delle escursioni sulla serie del Brent

```


import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt

FILE_EIA = "RBRTEd.xls"   # file scaricato dall'EIA, nella stessa cartella dello script
FINESTRA = 126        # giorni di negoziazione, come la scadenza simulata
SOGLIA = 1.20         # barriera al 20% sopra il prezzo di apertura
D_GRIGLIA = (3, 5, 10)
FINE = "2026-09-01"   # la serie e' troncata a fine agosto 2026

BLU, OCRA, GRIGIO = "#1f4e79", "#a6611a", "#d9d9d9"

out = []
def P(s=""):
    print(s); out.append(s)


def carica():
    d = pd.read_excel(FILE_EIA,
                      sheet_name="Data 1", header=2)
    d.columns = ["data", "prezzo"]
    d = d.dropna().reset_index(drop=True)
    d["data"] = pd.to_datetime(d["data"])
    return d[d["data"] < FINE].reset_index(drop=True)


def escursioni(p, soglia):
    """Durate, in giorni di negoziazione, delle escursioni oltre la soglia."""
    sopra = p > soglia
    dur, corrente = [], 0
    for s in sopra:
        if s:
            corrente += 1
        elif corrente:
            dur.append(corrente); corrente = 0
    if corrente:
        dur.append(corrente)
    return dur


def analizza(prezzi, etichetta):
    n = len(prezzi)
    n_fin = n - FINESTRA + 1
    attraversate = 0
    max_run = []
    tutte_le_durate = []
```

```
49
50      for i in range(n_fin):
51          fin = prezzi[i:i + FINESTRA]
52          b = fin[0] * SOGLIA
53          dur = escursioni(fin, b)
54          if dur:
55              attraversate += 1
56              max_run.append(max(dur))
57              tutte_le_durate.extend(dur)
58
59      max_run = np.array(max_run)
60      P(f"\n{etichetta}")
61      P(f"  osservazioni {n:,}, finestre {n_fin:,}")
62      P(f"  finestre con almeno un attraversamento: {attraversate:,} "
63        f"({100*attraversate/n_fin:.1f}%)")
64      P(f"  escursioni complessive: {len(tutte_le_durate):,}")
65      d = np.array(tutte_le_durate)
66      P(f"  durata mediana {np.median(d):.0f} giorni, media {d.mean():.1f}, "
67        f"massima {d.max()}")
68      for q in (0.25, 0.50, 0.75, 0.90):
69          P(f"  quantile {q:.0%}: {np.quantile(d, q):.0f} giorni")
70      P(f"  escursioni piu' brevi di 3 giorni: {100*np.mean(d < 3):.1f}%")
71      P(f"  escursioni piu' brevi di 5 giorni: {100*np.mean(d < 5):.1f}%")
72      P(f"  escursioni piu' brevi di 10 giorni: {100*np.mean(d < 10):.1f}%")
73
74      P(f"\n  Quota di finestre attraversate nelle quali nessuna escursione")
75      P(f"  raggiunge D giorni consecutivi, cioe' quota filtrata dalla clausola:")
76      for D in D_GRIGLIA:
77          P(f"    D = {D:>2}: {100*np.mean(max_run < D):.1f}%")
78      return d, max_run
79
80
81  dati = carica()
82  P("=" * 68)
83  P("Serie: Europe Brent Spot Price FOB (EIA), prezzi giornalieri")
84  P(f"Copertura: {dati.data.min():%d/%m/%Y} - {dati.data.max():%d/%m/%Y}")
85  P(f"Barriera: {100*(SOGLIA-1):.0f}% sopra il prezzo di apertura della finestra")
86  P(f"Finestre mobili di {FINESTRA} giorni, scorrimento giornaliero")
87  P("=" * 68)
88
89  recente = dati[dati.data >= "2011-01-01"].reset_index(drop=True)
90  d_rec, mr_rec = analizza(recente.prezzo.values,
91                           "PERIODO DI RIFERIMENTO: 2011-2026")
92  d_tot, mr_tot = analizza(dati.prezzo.values,
93                           "CONTROLLO DI ROBUSTEZZA: intera serie 1987-2026")
94
95
96  # Figura: distribuzione delle durate
97  # ---------------------------------------------------------------------
98  plt.rcParams.update({
99      "font.family": "serif",
100     "font.serif": ["Times New Roman", "Liberation Serif", "DejaVu Serif"],
101     "font.size": 9, "axes.labelsize": 9,
102     "xtick.labelsize": 8, "ytick.labelsize": 8, "legend.fontsize": 8,
103     "axes.spines.top": False, "axes.spines.right": False,
104     "axes.linewidth": 0.8, "pdf.fonttype": 42,
105 })
106
107 fig, ax = plt.subplots(figsize=(6.3, 3.4))
```

```
bins = np.arange(0.5, 40.5, 1)
ax.hist(np.clip(d_rec, 0, 40), bins=bins, color=BLU, alpha=0.85,
        edgecolor="white", linewidth=0.3,
        weights=np.ones_like(d_rec) / len(d_rec))
ymax = ax.get_ylim()[1]
for D, q in zip(D_GRIGLIA, (0.97, 0.87, 0.97)):
    ax.axvline(D - 0.5, color=OCRA, lw=1.0, ls="--")
    ax.annotate(f"$D={D}$", xy=(D - 0.5, ymax * q), xytext=(3, 0),
                textcoords="offset points", color=OCRA, fontsize=8,
                va="center", ha="left")
ax.set_xlabel("durata dell'escursione (giorni di negoziazione)")
ax.set_ylabel("frequenza relativa")
ax.set_xlim(0, 40)
fig.savefig("fig5_3.pdf", bbox_inches="tight", pad_inches=0.02)
fig.savefig("fig5_3.png", dpi=160, bbox_inches="tight", pad_inches=0.02)

open("risultati_brent.txt", "w").write("\n".join(out))
```

Bibliografia

Abate, J. e W. Whitt (1995). «Numerical Inversion of Laplace Transforms of Probability Distributions». In: *ORSA Journal on Computing*, 36–43.

Avellaneda, M. e L. Wu (1999). «Pricing Parisian-Style Options with a Lattice Method». In: *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 1–16.

Baumeister, C. e L. Kilian (2016). «Forty Years of Oil Price Fluctuations: Why the Price of Oil May Still Surprise us». In: *Journal of Economic Perspectives*, 139–160.

Bernard, C. e P. P. Boyle (2011). «Monte Carlo Methods for Pricing Discrete Parisian Options». In: *The European Journal of Finance*, 169–196.

Bernard, C., O. Le Courtois e F. Quittard-Pinon (2005). «A New Procedure for Pricing Parisian Options». In: *The Journal of Derivatives*, 45–53.

Black, F. (1976). «The Pricing of Commodity Contracts». In: *Journal of Financial Economics*, 167–179.

Black, F. e M. Scholes (1973). «The Pricing of Options and Corporate Liabilities». In: *Journal of Political Economy*, 637–654.

Bollerslev, T. (1986). «Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity». In: *Journal of Econometrics*, 307–327.

Boyle, P. P. (1977). «Options: A Monte Carlo Approach». In: *Journal of Financial Economics*, 323–338.

Boyle, P. P., M. Broadie e P. Glasserman (1997). «Monte Carlo Methods for Security Pricing». In: *Journal of Economic Dynamics and Control*, 1267–1321.

Broadie, M., P. Glasserman e S. G. Kou (1997). «A Continuity Correction for Discrete Barrier Options». In: *Mathematical Finance*, 325–349.

Caldara, D., M. Cavallo e M. Iacoviello (2019). «Oil Price Elasticities and Oil Price Fluctuations». In: *Journal of Monetary Economics*, 1–20.

Carr, P. (1995). «Two Extensions to Barrier Option Valuation». In: *Applied Mathematical Finance*, 173–209.

Cheng, I.-H. e W. Xiong (2014). «Financialization of Commodity Markets». In: *Annual Review of Financial Economics*, 419–441.

Chesney, M., M. Jeanblanc-Picqué e M. Yor (1997). «Brownian Excursions and Parisian Barrier Options». In: *Advances in Applied Probability*, 165–184.

Chesney, M. e N. Vasiljević (2018). «Parisian Options with Jumps: A Maturity–Excursion Randomization Approach». In: *Quantitative Finance*, 1887–1908.

Clark, I. J. (2014). *Commodity Option Pricing: A Practitioner's Guide*. Wiley Finance. Chichester: John Wiley & Sons.

Costabile, M. (2002). «A Combinatorial Approach for Pricing Parisian Options». In: *Decisions in Economics and Finance*, 111–125.

Engle, R. F. (1982). «Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation». In: *Econometrica*, 987–1007.

Fusai, G. e A. Tagliani (2001). «Pricing of Occupation Time Derivatives: Continuous and Discrete Monitoring». In: *Journal of Computational Finance*, 1–37.

Geman, H. e A. Roncoroni (2006). «Understanding the fine structure of electricity prices». In: *The Journal of Business*, 1225–1261.

Geman, H. e M. Yor (1996). «Pricing and Hedging Double-Barrier Options: A Probabilistic Approach». In: *Mathematical Finance*, 365–378.

Gibson, R. e E. S. Schwartz (1990). «Stochastic Convenience Yield and the Pricing of Oil Contingent claims». In: *The Journal of Finance*, 959–976.

Glasserman, P. (2003). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Stochastic Modelling and Applied Probability. New York: Springer.

Goldman, M. B., H. B. Sosin e M. A. Gatto (1979). «Path Dependent Options: Buy at the Low, Sell at the High». In: *The Journal of Finance*, 1111–1127.

Haber, R. J., P. J. Schönbucher e P. Wilmott (1999). «Pricing Parisian Options». In: *The Journal of Derivatives*, 71–79.

Hamilton, J. D. (2009). «Causes and Consequences of the Oil Shock of 2007–08». In: *Brookings Papers on Economic Activity*, 215–261.

Harrison, J. M. e D. M. Kreps (1979). «Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets». In: *Journal of Economic Theory*, 381–408.

Harrison, J. M. e S. R. Pliska (1981). «Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading». In: *Stochastic Processes and their Applications*, 215–260.

Heston, S. L. (1993). «A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options». In: *The Review of Financial Studies*, 327–343.

Heynen, R. C. e H. M. Kat (1994). «Partial Barrier Options». In: *Journal of Financial Engineering*, 253–274.

Hugonnier, J.-N. (1999). «The Feynman–Kac Formula and Pricing Occupation Time Derivatives». In: *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 153–178.

Hull, J. C. (2021). *Options, Futures, and Other Derivatives*. 11ª ed. Harlow: Pearson.

Kaldor, N. (1939). «Speculation and Economic Stability». In: *The Review of Economic Studies*, 1–27.

Karatzas, I. e S. E. Shreve (1998). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. 2ª ed. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer.

Kemna, A. G. Z. e A. C. F. Vorst (1990). «A Pricing Method for Options Based on Average Asset Values». In: *Journal of Banking & Finance*, 113–129.

Kilian, L. (2009). «Not all Oil Price Shocks are Alike: Disentangling Demand and Supply Shocks in the Crude Oil Market». In: *The American Economic Review*, 1053–1069.

Kilian, L. e D. P. Murphy (2014). «The Role of Inventories and Speculative Trading in the Global Market for Crude Oil». In: *Journal of Applied Econometrics*, 454–478.

Kou, S. G. (2002). «A Jump-Diffusion Model for Option Pricing». In: *Management Science*, 1086–1101.

Kunitomo, N. e M. Ikeda (1992). «Pricing Options with Curved Boundaries». In: *Mathematical Finance*, 275–298.

Labart, C. e J. Lelong (2009). «Pricing Double Barrier Parisian Options Using Laplace Transforms». In: *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 19–44.

Lau, K. W. e Y. K. Kwok (2004). «Anatomy of Option Features in Convertible Bonds». In: *The Journal of Futures Markets*, 513–532.

Merton, R. C. (1973). «Theory of Rational Option Pricing». In: *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 141–183.

– (1976). «Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous». In: *Journal of Financial Economics*, 125–144.

Ni, S. X., N. D. Pearson e A. M. Poteshman (2005). «Stock Price Clustering on Option Expiration Dates». In: *Journal of Financial Economics*, 49–87.

Øksendal, B. (2003). *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. 6ª ed. Berlin: Springer.

Osler, C. L. (2003). «Currency Orders and Exchange Rate Dynamics: An Explanation for the Predictive Success of Technical Analysis». In: *The Journal of Finance*, 1791–1819.

Pindyck, R. S. (1991). «Irreversibility, Uncertainty, and Investment». In: *Journal of Economic Literature*, 1110–1148.

Reiner, E. e M. Rubinstein (1991). «Breaking Down the Barriers». In: *Risk*, 28–35.

Schoutens, W., E. Simons e J. Tistaert (2004). «A Perfect Calibration! Now What?» In: *Wilmott Magazine*, 66–78.

Schröder, M. (2003). «Brownian Excursions and Parisian Barrier Options: A Note». In: *Journal of Applied Probability*, 855–864.

Schwartz, E. S. (1997). «The Stochastic Behavior of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging». In: *The Journal of Finance*, 923–973.

Shreve, S. E. (2004). *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. Springer Finance. New York: Springer.

Taleb, N. N. (1997). *Dynamic Hedging: Managing Vanilla and Exotic Options*. New York: John Wiley & Sons.

Tang, K. e W. Xiong (2012). «Index Investment and The Financialization of Commodities». In: *Financial Analysts Journal*, 54–74.

Trolle, A. B. e E. S. Schwartz (2009). «Unspanned Stochastic Volatility and the Pricing of Commodity Derivatives». In: *The Review of Financial Studies*, 4423–4461.

U.S. Commodity Futures Trading Commission (2020). *Interim Staff Report: Trading in NYMEX WTI Crude Oil Futures Contract Leading up to, on, and around April 20, 2020*. Interim Staff Report. Division of Market Oversight e Office of the Chief Economist.

Vetzal, K. R. e P. A. Forsyth (1999). «Discrete Parisian and Delayed Barrier Options: A General Numerical Approach». In: *Advances in Futures and Options Research*, 1–15.

Vo, M. T. (2009). «Regime-Switching Stochastic Volatility: Evidence from the Crude Oil Market». In: *Energy Economics*, 779–788.

Working, H. (1949). «The Theory of Price of Storage». In: *The American Economic Review*, 1254–1262.

Zhu, S.-P. e W.-T. Chen (2013). «Pricing Parisian and Parasian Options Analytically». In: *Journal of Economic Dynamics and Control*, 875–896.

Sitografia

- U.S. Energy Information Administration — https://www.eia.gov
- Short-Term Energy Outlook — https://www.eia.gov/outlooks/steo/
- Weekly Petroleum Status Report — https://www.eia.gov/petroleum/supply/weekly/
- World Oil Transit Chokepoints — https://www.eia.gov/international/analysis/special-topics/World_Oil_Transit_Chokepoints
- CME Group — https://www.cmegroup.com
- NYMEX Rulebook, Chapter 200 — https://www.cmegroup.com/rulebook/NYMEX/2/200.pdf
- ICE Futures Europe — https://www.ice.com/products/219/Brent-Crude-Futures
- Commodity Futures Trading Commission — https://www.cftc.gov
- Bank for International Settlements — https://www.bis.org

Dichiarazione del ricorso a strumenti di Intelligenza Artificiale (IA)

Il sottoscritto, Andrea Penzo, matricola numero 886391, iscritto presso Ca' Foscari al corso di Laurea magistrale in Economia e Finanza, autore della tesi di laurea "Barrier e Parisian options nel mercato dei futures sul petrolio: valutazione, criticità e confronto", relatrice Martina Nardon, consapevole delle sanzioni previste dall'art. 76 del Testo unico, D.P.R. 28/12/2000 n. 445, e della decadenza dei benefici prevista dall'art. 75 del medesimo Testo unico in caso di dichiarazioni false o mendaci, sotto la propria personale responsabilità ai sensi degli artt. 46 e 47 del D.P.R. 28/12/2000 n. 445,

DICHIARA

☐ di NON aver fatto ricorso a tecnologie di intelligenza artificiale generativa per supportare vari aspetti della ricerca e della scrittura del suo elaborato finale/della sua tesi di laurea;

☒ di aver fatto ricorso a tecnologie di intelligenza artificiale generativa per supportare vari aspetti della ricerca e della scrittura del suo elaborato finale/della mia tesi di laurea, in particolare:

- **Strumenti utilizzati**: ChatGPT, modello GPT-5.6 Luna, e Claude, modello Claude Opus 5.5.
- **Traduzione e supporto alla comprensione di articoli scientifici**: gli strumenti di IA sono stati utilizzati come supporto nella traduzione di articoli scientifici redatti in lingua straniera, al fine di facilitarne la comprensione e l'analisi. Le traduzioni e le informazioni ricavate sono state successivamente verificate dall'autore sulla base delle fonti originali.
- **Supporto alla programmazione in Python**: gli strumenti di IA sono stati utilizzati come supporto tecnico nella stesura e nel controllo del codice Python

impiegato nell'elaborato, principalmente per individuare e correggere errori di sintassi. Il codice prodotto è stato verificato dall'autore mediante la sua esecuzione e il controllo dei risultati ottenuti.

- **Revisione grammaticale**: gli strumenti di IA sono stati utilizzati per un controllo grammaticale finale del testo della tesi, con l'obiettivo di individuare eventuali errori linguistici e migliorare la correttezza formale dell'elaborato.

- **Coerenza stilistica di grafici, tabelle e immagini**: gli strumenti di IA sono stati utilizzati come supporto per rendere graficamente e stilisticamente coerenti tra loro i grafici, le tabelle e le immagini presenti nella tesi, al fine di mantenere una presentazione uniforme dell'elaborato.

- **Controllo della coerenza della notazione**: gli strumenti di IA sono stati utilizzati come supporto nella verifica della coerenza e dell'uniformità della notazione matematica e simbolica adottata nell'elaborato, con particolare riferimento alla denominazione delle variabili, dei parametri e delle formule.

Le attività sopra indicate hanno riguardato tutti i capitoli della tesi, in relazione alle specifiche esigenze di ciascuna sezione.

DICHIARA INOLTRE

che la correttezza, la qualità e l'attendibilità dei contenuti e dei suggerimenti forniti dagli strumenti di IA sono state verificate dall'autore attraverso il confronto con le fonti scientifiche originali, il controllo diretto dei risultati del codice e la revisione personale dei testi e dei materiali prodotti. L'IA è stata utilizzata esclusivamente come strumento di supporto alle attività sopra indicate; l'elaborazione, la selezione e la valutazione dei contenuti scientifici rimangono sotto la piena responsabilità dell'autore.