



Università  
Ca' Foscari  
Venezia

Corso di Laurea magistrale (*ordinamento ex  
D.M. 270/2004*)  
in Economia e Finanza

Tesi di Laurea

—  
Ca' Foscari  
Dorsoduro 3246  
30123 Venezia

*Adaptive Markets Hypothesis:*  
una teoria dei mercati finanziari  
in un'ottica evolutivistica

**Relatore**

Ch. Prof. Marco Corazza

**Laureando**

Sara Gesuato

Matricola 821342

**Anno Accademico**

2014 / 2015



## **Sommario:**

|   |    |
|---|----|
| Elenco delle figure.....  | I  |
| Elenco dei grafici.....   | I  |
| Elenco delle tabelle.....   | II |
| <i>Introduzione</i> .....   | 1  |
| 1. L'EFFICIENZA DEL MERCATO .....   | 6  |
| 1.1 Introduzione.....   | 6  |
| 1.2 Concetto paretiano di efficienza .....  | 7  |
| 1.2.1 Il «mercato ideale» .....   | 9  |
| 1.3 Concetti teorici sull'efficienza del sistema e dei mercati finanziari.....                  | 10 |
| 1.3.1 Significati e tipologie di efficienza.....  | 10 |
| 1.3.2 L'evoluzione del significato di <i>efficienza di mercato</i> nella letteratura accademica | 14 |
| 1.4 Il contributo di Fama: le <i>Efficient Markets Hypothesis</i> .....                         | 18 |
| 1.4.1 Modelli di mercato finanziario efficiente .....   | 19 |
| 1.4.2 Le ipotesi di mercato efficiente (EMH).....   | 22 |
| 1.4.3 Test di verifica delle EMH .....  | 24 |
| 1.4.4 Studio di eventi ( <i>Event Study</i> ) .....   | 34 |
| 1.5 Anomalie e inefficienze del mercato finanziario.....  | 37 |
| 1.5.1 Risultati e anomalie emerse dai test di efficienza.....                                   | 37 |
| 1.5.2 Fonti di inefficienza di mercato.....   | 38 |
| 1.6 Conclusioni.....  | 41 |
| 2. ADAPTIVE MARKETS HYPOTHESIS.....   | 43 |
| 2.1 Introduzione.....   | 43 |
| 2.2 Controversia tra la teoria delle EMH e la finanza comportamentale .....                     | 45 |

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 2.2.1 | Distorsioni comportamentali ( <i>behavioral biases</i> ) .....   | 46 |
| 2.2.2 | Repliche dalla finanza razionale.....  | 51 |
| 2.2.3 | Differenze fra discipline economiche e psicologiche: la <i>physics envy</i> dell'economia .....            | 52 |
| 2.3   | Il contributo delle neuroscienze cognitive.....  | 56 |
| 2.3.1 | <i>Triune brain model</i> .....  | 58 |
| 2.3.2 | Interpretazione evoluzionistica delle funzioni cerebrali.....  | 60 |
| 2.4   | Ipotesi di mercato adattivo (AMH) .....  | 62 |
| 2.4.1 | La nuova teoria introdotta da Andrew W. Lo.....  | 63 |
| 2.5   | Applicazioni della teoria delle AMH: implicazioni pratiche ed evidenze empiriche.....                      | 69 |
| 2.5.1 | Preferenze e propensioni degli investitori .....   | 70 |
| 2.5.2 | Applicazione delle AMH all' <i>asset allocation</i> .....  | 72 |
| 2.5.3 | Dinamiche di mercato ed innovazione tecnologica.....   | 78 |
| 2.6   | Il cambiamento nel paradigma classico di investimento: il concetto di New World Order elaborato da Lo..... | 79 |
| 2.6.1 | Principi generali del modello tradizionale di investimento .....   | 79 |
| 2.6.2 | Il <i>New World Order</i> .....  | 81 |
| 2.7   | Conclusioni.....   | 84 |
| 3.    | APPLICAZIONE DELLE AMH: MODELLO EVOLUZIONISTICO .....  | 88 |
| 3.1   | Introduzione.....  | 88 |
| 3.2   | Il concetto e la teoria della <i>bounded rationality</i> .....   | 89 |
| 3.2.1 | Modelli di razionalità assoluta e limitata.....  | 90 |
| 3.2.2 | Gruppi sociali e contesti organizzati .....  | 92 |
| 3.2.3 | Cooperazione, fiducia, altruismo.....  | 94 |

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 3.3   | Premessa teorica e <i>framework</i> di riferimento al modello .....  | 95  |
| 3.4   | Modello evolucionistico basato sulla razionalità limitata e sull'intelligenza.....                                   | 100 |
| 3.4.1 | Presentazione .....  | 100 |
| 3.4.2 | Formalizzazione analitica .....  | 102 |
| 3.4.3 | Simulazione del modello .....  | 108 |
| 3.4.4 | Ulteriori variazioni e risultati .....   | 114 |
| 3.5   | Conclusioni .....  | 119 |
| 4.    | APPLICAZIONE DEL MODELLO EVOLUZIONISTICO IN MATLAB® .....  | 122 |
| 4.1   | Introduzione.....  | 122 |
| 4.2   | Descrizione analitica dell'implementazione del modello Brennan-Lo in Matlab e della metodologia operativa .....      | 123 |
| 4.2.1 | Costruzione delle variabili per l'elaborazione del codice Matlab .....   | 124 |
| 4.2.2 | Descrizione analitica dei vettori randomizzati e stesura dei codici.....   | 128 |
| 4.3   | <i>Data analysis</i> e descrizione dei risultati numerici.....   | 135 |
| 4.3.1 | Numerosità della popolazione associata alla probabilità $f^*$ ottimale .....   | 135 |
| 4.3.2 | Evoluzione generazionale della specie .....  | 142 |
| 4.3.3 | Altre simulazioni .....  | 154 |
| 4.3.4 | Elaborazione della rappresentazione cromatica dei valori di $f^*$ .....  | 156 |
| 4.4   | Interpretazioni del modello e dei risultati riferite ai mercati finanziari.....                                      | 158 |
| 4.4.1 | Casualità meteorologica → Volatilità dei mercati finanziari .....  | 160 |
| 4.4.2 | Scelta fra alternative <i>valley-plateau</i> → Scelta fra <i>asset</i> finanziari, scelta fra diverse strategie..... | 163 |
| 4.4.3 | Interpretazione dei risultati numerici delle simulazioni .....   | 167 |
| 4.5   | Conclusioni.....   | 168 |

|  |     |
|--|-----|
| <i>Conclusione</i> .....   | 170 |
| APPENDICE A) Dimostrazione dell'espressione (9) cap. 3.....  | i   |
| APPENDICE B) Codici Matlab per la simulazione del modello .....                                      | ii  |
| Prima formulazione del codice del modello .....  | ii  |
| Formulazione ottimizzata del codice del modello .....  | iii |
| Codice per riprodurre il grafico cromatico in Figura 4.2 .....                                       | iv  |
| APPENDICE C) Dati outcome delle simulazioni del modello in Matlab.....                               | v   |
| APPENDICE D) Matrice definita in Excel per la costruzione del grafico cromatico (v. Figura 4.2)..... | xix |
| APPENDICE E) Dati outcome di altre simulazioni del modello in Matlab .....                           | xx  |
| <i>Riferimenti bibliografici</i> .....   | I   |

## Elenco delle figure

|   |     |
|---|-----|
| <b>Figura 1.1</b> Information set rispetto le EMH.....  | 23  |
| <b>Figura 1.2</b> Rendimenti annuali medi per 10 portafogli, 1926-2008.....   | 31  |
| <b>Figura 1.3</b> Rendimento in eccesso nell'intorno della data dell'annuncio.....  | 36  |
| <b>Figura 1.4 a</b> Drift post annuncio.....  | 36  |
| <b>Figura 1.4 b</b> Rendimento in eccesso medio cumulato intorno alla data di frazionamento ( <i>split</i> ).....           | 36  |
| <b>Figura 2.1</b> <i>Value function</i> utilizzata nella teoria del prospetto.....  | 49  |
| <b>Figura 2.2 a</b> Principali aree del modello <i>truine brain</i> elaborato da MacLean.....                               | 59  |
| <b>Figura 2.2 b</b> Funzioni del modello <i>truine brain</i> elaborato da MacLean (1990).....                               | 59  |
| <b>Figura 2.3</b> Popolazione mondiale dal 10.000 a. C. ad oggi.....  | 83  |
| <b>Figura 3.1</b> Rappresentazione cromatica del valore di $f^*$ per valori di $r_1$ e $r_2$ .....                          | 113 |
| <b>Figura 4.1</b> Rappresentazione cromatica del valore di $f^*$ per valori di $r_1$ e $r_2$ elaborata da Brennan e Lo..... | 157 |
| <b>Figura 4.2</b> Rappresentazione cromatico per diversi valori di $f^*$ .....  | 158 |

## Elenco dei grafici

|   |     |
|---|-----|
| <b>Grafico 2.1</b> Rendimenti annuali e deviazioni standard del <i>CRSP Value-Weighted Stock Market Return Index</i> (1930 - 2010)..... | 74  |
| <b>Grafico 2.2</b> Coefficienti di autocorrelazione di primo ordine dei rendimenti mensili dello S&P Composite.....                     | 76  |
| <b>Grafico 2.3</b> Rendimenti cumulati del <i>CRSP Value-Weighted Stock Market Return Index</i> (1926-2010).....                        | 80  |
| <b>Grafico 2.4</b> Volatilità dei rendimenti del <i>CRSP: Value-Weighted Stock Market Return Index</i> .....                            | 82  |
| <b>Grafico 4.1</b> Numerosità della generazione finale $T=36$ per ciascuno dei 15 <i>shots</i> computazionali.....                      | 142 |

|  |     |
|--|-----|
| <b>Grafico 4.2 a</b> Simulazione della numerosità della generazione finale per ogni valore assegnato ad $f$ di una specie con 10 individui iniziali..... | 144 |
| <b>Grafico 4.2 b</b> Simulazione della numerosità della generazione finale per ogni valore assegnato ad $f$ di una specie con 20 individui iniziali..... | 145 |
| <b>Grafico 4.2 c</b> Grafico complessivo delle simulazioni della numerosità della generazione finale per ogni valore assegnato ad $f$ .....              | 146 |
| <b>Grafico 4.3 a</b> Evoluzione numerica della specie $n(1)=10$ per i valori di $f$ che manifestano i migliori successi riproduttivi.....                | 147 |
| <b>Grafico 4.3 b</b> Evoluzione numerica della specie $n(1)=20$ per i valori di $f$ che manifestano i migliori successi riproduttivi.....                | 148 |
| <b>Grafico 4.4 a</b> Evoluzione numerica della specie riferita alla $f^* = 0.75$ (applicazione di Brennan-Lo).....                                       | 149 |
| <b>Grafico 4.4 b</b> Evoluzione numerica della specie riferita alla $f^* = 0.55$ (popolazione iniziale $n(1)=10$ ).....                                  | 151 |
| <b>Grafico 4.4 c</b> Evoluzione numerica della specie riferita alla $f^* = 0.65$ (popolazione iniziale $n(1)=20$ ).....                                  | 152 |
| <b>Grafico 4.4 d</b> Evoluzione numerica della specie riferita alla $f^*$ (grafico complessivo delle due simulazioni) .....                              | 153 |

## Elenco delle tabelle

|  |     |
|--|-----|
| <b>Tabella 1.1</b> Numero di run effettivi e attesi per intervalli di 1, 4, 9 e 16 giorni.....   | 27  |
| <b>Tabella 3.1</b> <i>Data set outcome</i> della simulazione della numerosità generazionale nel modello <i>binary-choice</i> evolutivistico.....   | 110 |
| <b>Tabella 4.1</b> Simulazione del vettore $r$ che descrive il tempo meteorologico.....  | 131 |
| <b>Tabella 4.2</b> Simulazione del processo evolutivistico della numerosità di due popolazioni in base alla $f^*$ , differenziato per le due popolazioni con $n(1)=10$ e $n(2)=20$ ..... | 138 |



|  |     |
|--|-----|
| <b>Tabella 4.3</b> Numerosità della generazione finale $T=36$ relative a 15 <i>shots</i> computazionali.....                                   | 141 |
| <b>Tabella 4.4</b> Generazioni associate ai fenotipi comportamentali ottimali per le due simulazioni, variando i parametri $xv1$ e $xp2$ ..... | 155 |

## ***Introduzione***

Le principali teorie classiche che trattano tematiche qualitative e quantitative inerenti alla finanza spesso assumono implicitamente, come presupposto di base, che i mercati siano efficienti secondo l'accezione della teoria delle *Efficient Marktes Hypothesis*, elaborata da Eugene F. Fama negli anni Sessanta. La teoria delle ipotesi di mercato efficiente si basa sul concetto di efficienza informativa, cioè sull'idea che non è possibile conseguire degli extra-profitti attraverso operazioni su *asset* finanziari basate sulle informazioni pubblicamente disponibili nel mercato. Tale idea rappresenta nel concreto una situazione in cui sono eliminate le opportunità di profitto non sfruttate (le opportunità di arbitraggio) cioè rendimenti di uno strumento finanziario che sono maggiori rispetto a quanto giustifichino le sue caratteristiche. In base alla tipologia del set informativo che viene riflesso nei prezzi degli asset finanziari, sono state proposte in letteratura tre diverse forme di efficienza: la forma debole, la forma semi-forte e la forma forte. Per testare l'effettiva efficienza dei mercati finanziari si è sviluppato un filone nella letteratura accademica, relativo ai test sull'efficienza di mercato e agli *event study*, cioè un insieme di analisi e ricerche empiriche, alcune delle quali dimostrano la presenza di fonti di inefficienza nel sistema finanziario. I processi operativi e le dinamiche di mercato sono infatti caratterizzati da costi di transazione e informazione, da una mancanza di informazione e comunicazione, dall'asimmetria informativa (che provoca alcuni fenomeni negativi quali il *moral hazard* e l'*adverse selection*) e dalla mancanza di congruenza tra le aspettative e le preferenze di tutti gli individui che operano nel mercato. Tutte queste situazioni causano una discordanza empirica con i concetti della teoria dell'efficienza dei mercati, mettendone talvolta in discussione la concreta veridicità e la corretta applicazione nell'elaborazione di modelli matematici riferiti alle teorie classiche di portafoglio e *investment management*, nelle cui ipotesi rientra spesso quella della perfetta e completa razionalità, nelle aspettative e nelle decisioni, degli investitori. I molti episodi di crisi finanziarie, come quella del periodo attuale (causata dal "contagio globale" degli effetti del fallimento Lehman Brother nel 2008), o altri episodi passati si discostano molto, mettendone in discussione la validità, dai modelli finanziari basati sulla razionalità perfetta, che si fondano sulla teoria delle Efficient Markets Hypothesis. Degli esempi di alcuni fatti passati, dei quali se ne possono descrivere le cause e le conseguenze in maniera più certa rispetto a quelle per

la recente crisi, possono essere rappresentati da due episodi relativi al mercato azionario statunitense: il crollo del “Lunedì nero” del 1987 (giorno in cui l’indice Dow Jones Industrial Average diminuì di oltre il 20% in una sola giornata di contrattazione) e quello che ha coinvolto il mercato tecnologico statunitense del 2000 (il crollo dei prezzi delle società high-tech ebbe ripercussioni sull’indice NASDAQ, composto soprattutto da titoli high-tech, provocandone un declino del 60% in due anni). Questi eventi hanno messo in dubbio molti accademici e professionisti sulla validità empirica della teoria dell’efficienza del mercato, poiché oscillazioni così ampie nei prezzi di titoli o indici azionari erano non solamente causate dalle variazioni dei fondamentali dell’economia (reputando così errata la forma più forte dell’efficienza, cioè che i prezzi dei titoli incorporano tutte le informazioni del loro valore fondamentale). Certi studiosi hanno elaborato alcune idee riferite alle bolle finanziarie, quelle situazioni in cui il prezzo di un asset non si riferisce al suo valore fondamentale. Le bolle possono essere razionali se gli operatori di mercato, pur avendo aspettative sul fatto che si sta sviluppando una bolla, detengono lo strumento finanziario coinvolto perché convinti esso crescerà nel prezzo; in una bolla razionale i prezzi si discostano dai prezzi efficienti, ma, dato che lo scoppio della bolla non si può prevedere, nel mercato non si verificano opportunità di arbitraggio. D’altro canto, altri economisti sostengono che tali episodi di instabilità finanziaria siano una conseguenza di opportunità di extra-profitto e che la teoria delle aspettative razionali degli investitori e delle ipotesi di mercato efficiente non siano adeguate a spiegare il sistema finanziario.

Se nel mercato non esistessero delle possibilità di conseguire degli extra-profitti, il mercato non collasserebbe su se stesso, poiché ‘smetterebbe di funzionare’, oppure non rappresenterebbe un contesto economico in cui sarebbe possibile sono una ‘mera’ compravendita di strumenti finanziari per il solo obiettivo di esserne i proprietari? Le assunzioni che stanno alla base delle teorie finanziarie classiche sono verosimili o si discostano troppo dalla realtà? Gli investitori, nell’elaborare aspettative e processi decisionali e comportamentali, operano davvero razionalmente?

La controversia sulla validità della teoria sull’efficienza dei mercati finanziari continua da molti anni, e in ambito accademico si è manifestato un certo disagio nel fatto di dover mettere in discussione assunzioni classiche, che fanno da fondamento a moltissime teorie. Il crollo azionario del 1987 diede origine alla nascita di una nuova

corrente di pensiero, divenuta con il tempo una vera e propria disciplina delle scienze economiche, prendendo il nome di finanza comportamentale. In essa si applicano i concetti di altre scienze sociali, soprattutto della psicologia, per analizzare e spiegare le dinamiche che caratterizzano i mercati finanziari, specialmente i trend dei prezzi azionari. Il principale contributo di questo ramo dell'economia è stato quello di aver individuato e categorizzato le cosiddette distorsioni comportamentali, cioè processi decisionali e operativi basati su approcci mentali innati negli esseri umani, che si sono evoluti in base alle caratteristiche dell'individuo e alle condizioni ambientali, con lo scopo di sopravvivere, facendo scaturire azioni istintive. Applicando tale visione in contesti economici quali i mercati finanziari, essa induce a fenomeni come l'avversione alle perdite, l'eccessiva fiducia, l'avversione al rischio, che rappresentano alcune delle distorsioni comportamentali osservate negli operatori, che provocano decisioni ed operazioni poco vantaggiose e con conseguenze talvolta pericolose per l'intero sistema. Infatti, ad esempio, l'eccessiva fiducia e il contagio sociale rappresentano una spiegazione sulla nascita delle bolle nel mercato azionario che si formano quando un certo numero di investitori sopravvaluta il valore di un asset, creando nel mercato una diffusa "esuberanza irrazionale" (concetto elaborato da Alan Greenspan) e continuando ad acquistare i titoli, creando aspettative autorealizzanti. L'aumento continuo del prezzo cresce fino a generare una bolla, che scoppierà quando il prezzo saranno troppo distante dal valore reale intrinseco. Questo può essere una motivazione del fatto che i mercati azionari hanno volumi di negoziazioni così elevati, non coerenti e non giustificabili sulla base delle ipotesi di mercato efficiente.

Accanto ai concetti teorici formulati dalla finanza comportamentale, negli stessi decenni, grazie alla collaborazione professionale tra neuro-scienziati e psicologi, si è sviluppata la neuroscienza cognitiva, una scienza appartenente alle neuroscienze, che si occupa di analizzare la relazione tra gli aspetti anatomici cerebrali e i cambiamenti di matrice evuzionistica, con lo scopo di individuare collegamenti causa-effetto tra funzioni cerebrali e comportamenti umani. Alcuni modelli cerebrali sono interpretabili dal punto di vista delle teorie evuzionistiche: infatti ogni singola area dell'encefalo umano può considerarsi come il risultato di un lungo processo di adattamento evolutivo messo in atto dalla specie umana per fronteggiare e sopravvivere in determinate condizioni contestuali. Infatti l'ambiente (o "ecosistema") in cui è inserita la specie

biologica umana, anche nelle sue sottopopolazioni, è caratterizzato da modifiche continue che influenzano i mutamenti adattivi nelle varie componenti cerebrali e i processi decisionali/comportamentali dell'individuo e della specie. Applicando questi concetti nell'ambito delle scienze economiche, si dà prova che le preferenze degli individui, dipendenti sia dalla personalità dell'individuo *Homo oeconomicus* sia dal contesto in cui egli è inserito, non sono permanenti poiché si modificano a seguito di mutamenti nei fattori esterni contestuali. Ad azioni inizialmente istintive, si assiste ad una modifica nelle preferenze come effetto delle forze della selezione naturale, secondo cui sopravvive chi riesce ad adattarsi ai continui mutamenti ambientali.

L'approccio che applica principi della teoria scientifica dell'evoluzione per descrivere l'andamento e le dinamiche dei mercati finanziari, è stato altresì influenzato dalla psicologia dell'evoluzione e della sociobiologia. Questa visione dinamica dei mercati finanziari, nella quale confluiscono concetti teorici ed aspetti della psicologia, delle neuroscienze cognitive, della sociobiologia e della teoria evoluzionistica (come la lotta alla sopravvivenza, la selezione naturale, l'adattamento) ha portato allo sviluppo di una nuova corrente di pensiero: la teoria delle *Adaptive Markets Hypothesis*, ipotesi di mercato adattivo, elaborata da Andrew W. Lo negli anni Novanta. Adottando questo filone teorico che si pone come completamento ed alternativa alla teoria classica delle ipotesi di mercato efficiente, si analizzano le dinamiche di mercato secondo un approccio biologico-evoluzionistico. Secondo la teoria delle ipotesi di mercato adattivo, i mercati finanziari sono caratterizzati da un processo evoluzionistico in cui, attraverso processi decisionali ed azioni comportamentali volte alla sopravvivenza e all'adattamento, gli operatori vincono le forze della selezione naturale e modificano l'«ecosistema finanziario». La teoria delle AMH, seppur faccia parte di una struttura concettuale ancora poco conosciuta e dettagliata, contribuisce all'attuazione di applicazioni e implementazioni concrete nell'ambito dell'*asset allocation*, della gestione del rischio e della consulenza finanziaria. Infatti, sebbene l'operatività e il funzionamento dei mercati finanziari sia altamente tecnologizzato, gli operatori di base, senza i quali non esisterebbe alcuna operazione computerizzata, sono gli investitori umani, che, attraverso i loro processi decisionali e comportamentali attuano scelte e, consequenzialmente, azioni concrete.

A. W. Lo, con il contributo di Thomas J. Brennan, ha elaborato un modello evolucionistico a scelta binaria sulla razionalità limitata e l'intelligenza. L'obiettivo del modello è simulare dei processi decisionali di taluni individui appartenenti ad una specie, attraverso una scelta fra due sole alternative, le quali apportano a diverse conseguenze sulle generazioni future della specie, in base a ciò che si verifica nell'ecosistema di riferimento. Nella sua semplicità analitica, il modello consente di mettere in evidenza come gli individui modifichino le proprie decisioni, manifestando talvolta distorsioni comportamentali che emergono in base all'azione delle forze della selezione naturale e alle caratteristiche del contesto.

L'obiettivo di questa tesi è quello di fornire una descrizione esaustiva dei principali concetti relativi alla nuova teoria delle Adaptive Markets Hypothesis, mettendone in luce i collegamenti con altre discipline, ed elaborare un'applicazione originale della simulazione del modello evolucionistico proposto da Brennan e Lo utilizzando il software Matlab. Inoltre implementando alcune modifiche ed estensioni computative nel modello ed elaborando i dati simulati ottenuti, sarà possibile condurre delle analisi interpretative per confrontare il contesto biologico descritto nel modello con il mercato finanziario.

L'elaborato è suddiviso in quattro capitoli: i primi tre sono di tipo compilativo, mentre l'ultimo rappresenta la parte sperimentale del lavoro. Nel primo capitolo viene condotto un breve *excursus* letterario accademico sulla teoria classica delle ipotesi di mercato efficiente su cui, oltre ad aspetti puramente teorici, vengono brevemente illustrati i test sull'efficienza e i relativi risultati. Il secondo capitolo è dedicato alla descrizione della teoria delle ipotesi di mercato adattivo: si mette in luce il collegamento con altre discipline e si illustrano i principali concetti e applicazioni concrete che derivano da questa teoria. Nel terzo capitolo viene esposto il modello evolucionistico a scelta binaria elaborato da Brennan e Lo sia dal punto di vista qualitativo che dal punto di vista prettamente analitico, comprendendo anche i risultati ottenuti dagli autori. Nell'ultimo capitolo si descrive l'applicazione del modello riprodotta e modificata in Matlab; oltre all'aspetto matematico-statistico dell'elaborazione del codice computativo e dell'analisi dei dati (tutti gli outcome sono riportati nelle appendici finali), si conclude con una parte relativa all'interpretazione del modello dal punto di vista dei mercati finanziari.

# 1. L'EFFICIENZA DEL MERCATO

---

## 1.1 Introduzione

---

La teoria dell'efficienza del mercato finanziario ha rappresentato fin dagli anni Sessanta, dopo la definizione e le tre forme di efficienza elaborate e proposte da E. Fama, uno dei temi dominanti del mondo accademico. La continua crescita quantitativa e qualitativa dei mercati finanziari si è accompagnata ad un'altrettanta intensa attività di ricerca scientifica, teorica e applicata, sul ruolo di tali mercati, affrontando in particolare questioni riguardanti l'*efficienza* e la *stabilità* di essi. In questo primo capitolo vengono descritti le teorie, i concetti e le ricerche più rilevanti in merito al concetto di "efficienza di mercato" cercando di riassumere in modo sintetico le argomentazioni più significative che si ritrovano nella vasta letteratura accademica riguardante questo argomento.

Nel paragrafo iniziale viene presentata una prima descrizione più generica del concetto di efficienza pur sempre nei limiti della scienza economica. Per la miglior comprensione di questa parte è utile puntualizzare brevemente alcuni importanti concetti dell'economia che saranno utilizzati per inquadrare il concetto di efficienza in un contesto più ampio. In economia, con il termine *utilità* si fa riferimento ad un'idea utilizzata per misurare la soddisfazione delle preferenze di un individuo. Questa nozione è particolarmente impiegata nelle basilari teorie microeconomiche del consumo: dal momento che le preferenze del consumatore sono caratterizzate da completezza, transitività e monotonicità, esse possono essere rappresentate da una funzione di utilità che misurerà il livello di soddisfazione del consumatore per ogni paniere di beni presente sul mercato. In ambito microeconomico si sviluppano anche altri concetti, successivamente considerati, quali: efficienza, produttività e benessere. In merito all'*efficienza*, si rimanda il lettore alla definizione paretiana di essa, descritta nel paragrafo 1.2. Considerando un'allocatione dei beni e dei fattori (intesa come modalità di consumo dei primi e utilizzo dei fattori produttivi) efficiente nello scambio, nella produzione e nella sostituzione, si ottiene un equilibrio del sistema tale da essere economicamente efficiente (ciò si verifica nell'equilibrio di concorrenza perfetta). Questo risultato è alla base dei teoremi dell'economia del benessere. In economia il

*benessere* è la condizione in cui un individuo ha soddisfatto le proprie preferenze e non esiste una condizione alternativa migliore.

Dopo la descrizione sul concetto generale di efficienza del mercato, saranno quindi esposti i principali filoni della letteratura sull'argomento riferendolo al sistema e ai mercati finanziari, per poi approfondirlo con la teoria sviluppata da Fama.

Poiché il capitolo in questione ha l'obiettivo di fornire una ' rassegna' nozionistica di tipo qualitativo sull'efficienza del mercato, nella successiva descrizione dei modelli e dei test non se ne approfondirà l'aspetto statistico-matematico, bensì si metteranno in luce gli aspetti (e anomalie) qualitativi più rilevanti emersi dalla ricerca empirica, che verranno infine confrontati con le principali fonti di inefficienza.

## **1.2 Concetto paretiano di efficienza**

---

Un primo concetto generale di efficienza su cui vale la pena spendere qualche parola, è quello elaborato da V. Pareto (v. Buchanan, 1992):

«Uno *stato*<sup>1</sup> di un dato sistema è *Pareto ottimo* se e solo se non c'è alcun stato alternativo realizzabile di quel sistema, in cui almeno una persona sta meglio e nessuna sta peggio. Uno stato,  $S_1$ , è Pareto superiore rispetto ad un altro stato,  $S_2$ , se e solo se almeno una persona sta meglio in  $S_1$  che in  $S_2$  e nessuna persona sta peggio in  $S_1$  che in  $S_2$ .»

Questo enunciato rappresenta le formulazioni più comprensive e generali dei principi di ottimalità e superiorità paretiana. I due concetti possono essere riferiti anche, in modo più ristretto, a *stati* distributivi (distribuzione di beni nel mercato tramite acquisti e vendite) e allocativi (allocazione di risorse come ad esempio per i processi produttivi o gli investimenti). Ad esempio, prendendo come riferimento l'allocazione delle risorse per la produzione di beni, un'allocazione è Pareto ottima se e solo se non esiste altra alternativa possibile che produce almeno un bene in più senza produrre meno di un altro bene (*ottimalità produttiva paretiana*). Inoltre se uno stato allocativo  $A_1$ , producesse un bene in più dello stato  $A_2$ , senza produrne di meno, allora  $A_1$  sarebbe produttivamente Pareto superiore rispetto  $A_2$  (*superiorità produttiva paretiana*).

---

<sup>1</sup> Con il termine "stato", nella teoria paretiana, si intende una determinata condizione o situazione in cui versa determinato sistema economico e gli individui che ne fanno parte. Si può inoltre declinare il termine "stato" con riferimento a certe specifiche attività e processi ad esempio la compravendita di beni, l'allocazione delle risorse, la produzione di beni, i processi decisionali e il soddisfacimento delle preferenze degli individui.



Una concezione diversa ma collegata a quella dell'efficienza produttiva paretiana è quella di *produttività* intesa come rapporto input/output: essa si differenzia dai concetti paretiani poiché assume input uguali fra i diversi sistemi (per verificare la massimizzazione degli output rispetto a input uguali), ipotesi non presente nell'ottimalità produttiva paretiana. Un'ulteriore assunzione da mettere in luce è che, per l'applicazione del concetto di produttività (come misurazione dell'efficienza), i prodotti (output) e le risorse (input) siano di ugual valore per gli individui nei vari differenti stati, intesi come processi produttivi, confrontati: ciò significa assumere implicitamente che siano possibili *confronti interpersonali di utilità* (interpretata come benessere) fra gli individui.

Per misurare l'efficienza globale, considerata come efficienza complessiva di un certo sistema economico, la nozione di produttività (come il tasso di crescita o di accumulazione di capitale), non è adeguata; esso potrebbe essere opportunamente applicato se si separasse il concetto di efficienza da quello di benessere. I principi generali di ottimalità e superiorità paretiana sembrano essere quindi più adatti per analizzare l'efficienza di un sistema poiché essi forniscono un criterio valutativo che non richiede confronti interpersonali di utilità, portando all'individuazione di un "ottimo" differente rispetto a quello concepito dall'utilitarismo.

In un contesto riferito a mercati finanziari, gli economisti considerano le precedenti definizioni di ottimalità e superiorità paretiana come fossero uguali ai seguenti enunciati, spiegati in termini di *preferenze individuali*<sup>2</sup> piuttosto che in termini di benessere:

- I. Uno stato  $S_1$  è Pareto ottimo se e solo se non c'è alcuno stato alternativo realizzabile,  $S_2$ , tale che almeno una persona preferisce  $S_2$  a  $S_1$  e tale che nessuno preferisce  $S_1$  a  $S_2$ .
- II. Uno stato  $S_1$  è Pareto ad uno stato  $S_2$  se e solo se almeno una persona preferisce  $S_1$  a  $S_2$  e nessuno preferisce  $S_2$  a  $S_1$ .

---

<sup>2</sup> La preferenza individuale è un concetto utilizzato nelle scienze sociali che assume l'idea di una scelta effettuata tra diverse alternative, sfruttando la possibilità di ordinare queste alternative in base al benessere, all'utilità, alla soddisfazione, al godimento, alla gratificazione che esse forniscono.

Interpretando le due formulazioni si può intendere che il benessere di un individuo come il soddisfacimento delle sue preferenze o, altresì, che esse indicano ciò che più contribuirà al suo benessere.

I principi paretiani, in particolare quello della superiorità, sono fondati sulla *razionalità*<sup>3</sup>: se gli individui attuano scelte in maniera razionale di conseguenza miglioreranno il loro “stato”. Tuttavia questa corrispondenza può essere messa in questione dal fatto che non sempre i comportamenti di individui razionali determinano miglioramenti paretiani, soprattutto se essi agiscono con un’ottica strategica<sup>4</sup>. Il principio di superiorità paretiana è pertanto un principio con cui gli individui razionali agiscono quando le conseguenze delle scelte dei vari gruppi non siano interdipendenti tra esse e tali da provocare comportamenti strategici.

### 1.2.1 Il «mercato ideale»

Un mercato ideale è tale se gli scambi che avvengono in esso raggiungono un equilibrio descritto da un ottimo paretiano (*I teorema fondamentale dell’economia del benessere*<sup>5</sup>).

Le condizioni che determinano un mercato ideale sono le seguenti:

1. l’informazione su produzione e qualità di beni e servizi è completa, disponibile e a costo nullo;
2. i costi per far rispettare i contratti e i diritti di proprietà sono nulli;
3. gli individui che operano nel mercato sono razionali nelle preferenze: esse sono ordinate in modo decrescente e transitivo (se  $A$  è preferito a  $B$  e  $B$  a  $C$ ,  $A$  sarà preferito a  $C$ );
4. i costi di transazione sono pari a zero;
5. i prodotti offerti nel mercato sono indifferenziati.

Se e solo se tutte queste condizioni sono soddisfatte, si può raggiungere l’equilibrio paretiano in cui nessuno può migliorare la propria posizione senza peggiorare quella altrui. Poiché queste condizioni molto forti, non si osservano nei mercati reali i quali,

---

<sup>3</sup> Attraverso la razionalità, l’individuo effettua scelte con l’obiettivo di massimizzare il suo benessere, la sua utilità, rispettando le sue preferenze.

<sup>4</sup> R. Hardin (v. Buchanan, 1992) dimostra che può verificarsi una determinata sequenza di azioni in cui i guadagni successivi di alcuni individui, dipendono dalle scelte e guadagni iniziali di altri. Si supponga che nella mossa  $M_1$ , che dallo stato  $S_1$  conduce il sistema allo stato  $S_2$ , l’individuo  $A$  guadagnerà e l’individuo  $B$  non guadagnerà né perderà; se i guadagni successivi di  $B$ , saranno ridotti a causa di ciò che è accaduto durante la prima mossa, allora l’individuo attuerà una strategia razionale, non consentendo la mossa  $M_1$ .

<sup>5</sup> Sviluppatisi nella corrente di pensiero neo-classica, i teoremi dell’economia del benessere costituiscono una delle principali argomentazioni a favore del libero mercato.

tuttavia, possono essere modificati al fine di approssimare l'idealità. Ad esempio sono dette *efficienze diacroniche*, quelle che si sviluppano grazie all'aumento della concorrenza nel tempo, a causa della riduzione (fino al completo annullamento) dei costi di transazione e alla nascita parallela di un mercato dell'informazione funzionale all'intero sistema economico. Questo mercato dell'informazione sarà caratterizzato sia da aspetti puramente cognitivi (l'individuo ha la necessità di "conoscere") che da aspetti motivazionali (l'individuo è motivato perché vuole soddisfare il bisogno di "conoscenza"): poiché ciascun individuo dovrebbe sostenere un costo per ottenere un'informazione limitata di cui ha bisogno (e per cui è motivato), tutti saranno incentivati a essere costantemente informati nel modo più completo possibile.

## **1.3 Concetti teorici sull'efficienza del sistema e dei mercati finanziari**

---

### **1.3.1 Significati e tipologie di efficienza**

Il concetto di efficienza ha molteplici significati: il primo fa riferimento all'efficienza *informativa* (*information-arbitrage efficiency*)<sup>6</sup>. Un mercato finanziario è efficiente se non è possibile conseguire dei profitti attraverso compravendite di strumenti azionari basate sulle informazioni pubblicamente disponibili. Se ciò fosse vero solamente gli *insider*, cioè individui che sono in possesso di informazioni aggiuntive non pubbliche, avrebbero quindi il vantaggio di guadagnare da questi scambi: qualsiasi novità e informazione disponibile a tutti, il mercato l'ha già 'scontata' nei prezzi. Numerosi sono gli accademici che considerano i mercati azionari efficienti secondo questa accezione. A. Cowles (v. J. Tobin in Vaciago-Verga, 1995) fu uno tra i primi a comprovare che la scelta di un qualsiasi investitore, che investe in azioni in modo casuale, risulterebbe altrettanto opportuna rispetto alle soluzioni proposte da un professionista: statisticamente, i portafogli gestiti attivamente (detratti i costi di transazione) non battono il mercato. Infatti, i prezzi dei titoli possono essere descritti con un processo di tipo *random walk*<sup>7</sup>: la loro correlazione con eventi passati è troppo debole, se non nulla, per poter essere utilizzata con lo scopo di conseguire dei profitti. Il movimento casuale

---

<sup>6</sup> Questo concetto di *efficienza informativa* sarà in seguito ampiamente discusso descrivendo la teoria di E. Fama (v. *infra* 1.4).

<sup>7</sup> Formalmente, il *random walk* ("passeggiata casuale") rappresenta un processo per cui gli oggetti si muovono in modo imprevedibile: è la formalizzazione dell'idea di fare dei passi successivi in direzione casuale. Esso è il processo stocastico meno complesso.

dei prezzi non indica che essi non rispondano alle nuove informazioni, anzi, essi rispondono ad esse e le incorporano immediatamente e pienamente attraverso una scarsa e quasi nulla attività di negoziazione.

Questo contraddice gli asserti dell'*analisi tecnica*<sup>8</sup> e suggerisce che per i clienti di brokers, di consulenti finanziari e per i possessori di quote di fondi comuni d'investimento, l'aspettativa matematica di rendimento di risorse impiegate nella gestione attiva dei portafogli è nulla. L'efficienza dell'arbitraggio<sup>9</sup> basato sull'informazione, richiede comunque un costo da parte di arbitraggisti, specialisti e *market-makers*.

Un secondo e più sottile significato di efficienza si basa sui pagamenti futuri a cui lo strumento o l'attività finanziaria dà diritto: il mercato di un'attività finanziaria è efficiente se le sue quotazioni riflettono in modo corretto le aspettative razionali in merito ai pagamenti futuri. Tale concetto prende il nome di efficienza *valutativa* (*fundamental-valuation efficiency*). Considerando l'azione come strumento finanziario, i dividendi (o altri utili distribuiti) attesi rappresentano i suoi *fondamentali* e il prezzo dell'azione è il valore attuale di questi flussi. Nel mercato, tuttavia, i prezzi dei titoli azionari aumentano e diminuiscono molto più di quanto si modificano sia le aspettative razionalmente fondate (basate su ragionamenti rigorosi e sistematici) sia i tassi di interesse ai quali vengono scontati i flussi futuri. R. Shiller (v. Tobin in Vaciago-Verga, 1995) ha inoltre rilevato il medesimo comportamento empirico anche nel mercato obbligazionario. In teoria, il rendimento di un'obbligazione a lungo termine può essere considerato come una media dei tassi d'interesse a breve attesi nell'arco temporale che parte dal momento dell'emissione del titolo fino alla sua scadenza. Ciò nonostante, i prezzi delle obbligazioni oscillano in maniera maggiore rispetto alle fluttuazioni che giustificerebbero la variabilità dei tassi a breve. È evidente come la speculazione di mercato possa accentuare ed ampliare notevolmente la sottostante variabilità fondamentale di dividendi e profitti. Se si effettuano speculazioni su speculazioni già messe in atto, si parla di "bolle". Esse si manifestano soprattutto durante la fase di

---

<sup>8</sup> Attraverso l'analisi tecnica si utilizzano informazioni su prezzi e volumi passati per prevedere i prezzi futuri (essa sarebbe inutile se i mercati fossero efficienti).

<sup>9</sup> L'arbitraggio è quell'operazione di compravendita di strumenti finanziari che, sfruttando le differenze di prezzo e il mispricing degli *asset* rispetto al valore di equilibrio, fa ottenere profitti agli investitori fino a che i prezzi non si riallineano.

fissazione dei prezzi di attività con fondamentali trascurabili (come rendimenti di consumo o di produzione nulli o incerti)<sup>10</sup>. Ma, come afferma J.M. Keynes (v. Tobin in Vaciago-Verga,1995) le bolle sono presenti anche nei mercati azionari, obbligazionari, dei tassi di cambio, dei futures e immobiliari. Egli, inoltre, paragonò il mercato azionario statunitense

«a quei concorsi giornalistici nei quali i partecipanti devono scegliere tra cento fotografie i sei volti più graziosi e nei quali il premio viene assegnato al concorrente la cui scelta si avvicina di più alla media delle preferenze di tutti i concorrenti; cosicché ciascun concorrente deve scegliere non quei volti che giudica più gradevoli, ma quelli che pensa possano più verosimilmente incontrare il favore degli altri concorrenti, i quali a loro volta considerano il problema dallo stesso punto di vista [...] Abbiamo raggiunto il terzo stadio in cui applichiamo la nostra intelligenza [volta] ad anticipare ciò che l'opinione media si aspetta che sia l'opinione media. E credo che vi siano alcuni che mettono in pratica il quarto, il quinto e altri stadi superiori».

Keynes, da operativo attivo ed esperto, non aveva fiducia in investimenti basati solo su mere aspettative di lungo periodo, poiché l'esperienza dimostrava come non vi fossero evidenze chiare del fatto che una politica di investimenti socialmente produttiva coincidesse con ciò che era più remunerativo. Egli osservò che coloro che si focalizzano sui fondamentali a lungo termine, mentre altri sono impegnati (con un'ottica di breve) «a prevedere meglio della folla come la folla si comporterà», corrono rischi maggiori.

Proseguendo nella descrizione delle varie tipologie di efficienza, un mercato in cui gli operatori sono in grado di assicurarsi la consegna di beni e servizi in qualsiasi circostanza futura, cedendo subito risorse o contrattandone la consegna futura a determinate condizioni, può essere descritto come efficiente di *completezza* o di *totale assicurazione* (*full-insurance efficiency*). Nella teoria economica, i contratti aventi ad oggetto un bene in specifici “stati di natura” vengono denominati “contratti Arrow-Debreu”.

I due studiosi (v. Tobin in Vaciago-Verga 1995) immaginano un insieme di mercati nei quali le merci scambiate sono definite sia dalle loro caratteristiche fisiche ma altresì dagli “stati di natura”, (data e specifica situazione), in base alle quali avviene l'atto di compravendita. Il suddetto sistema, formato da mercati efficienti in tali termini

---

<sup>10</sup> Oro e beni non riproducibili, per esempio, derivano il loro valore quasi interamente dalla ipotesi sulle opinioni dei futuri speculatori.

(*completezza o totale assicurazione*), è condizione necessaria e sufficiente per creare un equilibrio economico ottimale caratterizzato dalle proprietà concorrenziali<sup>11</sup> teorizzate da Adam Smith e dai teorici del libero mercato. Dal punto di vista finanziario, i mercati mobiliari ed assicurativi possono assomigliare molto al sistema “Arrow-Debreu” se tutti gli strumenti finanziari disponibili soddisfano, nelle loro caratteristiche, tutti i possibili stati di natura<sup>12</sup>. Nella realtà i mercati finanziari si discostano molto da questa descrizione: per operare in essi è necessario impiegare delle risorse e sostenerne il costo, rendendo inefficiente un sistema *completo*. In aggiunta a questo, molti singoli mercati finanziari<sup>13</sup>, seppure complessi, non sarebbero sufficientemente ampi per essere perfettamente concorrenziali. Un’ulteriore motivazione si riscontra nel fatto che gli stati di natura sono difficili da definire e da osservare.

Infine il quarto concetto di efficienza detta *funzionale* (*functional efficiency*) fa riferimento alle funzioni economiche, ossia ai servizi che l’industria finanziaria presta all’economia nel suo complesso. Ad esempio si impiegano risorse in servizi e strumenti finanziari per: allocare e gestirne i rischi in modo più sicuro il più delle volte affidandosi ad esperti (funzione assicurativa); facilitare transazioni attraverso un ventaglio di modi e network; gestire il risparmio investendolo in diverse tipologie di capitale. Tuttavia solamente una minima parte dell’attività dell’industria finanziaria si riferisce al finanziamento diretto dell’investimento reale: nei mercati dei capitali, infatti, raramente avviene la trasformazione del risparmio privato delle famiglie in investimenti produttivi nelle società quotate. Questo processo avviene soprattutto fuori mercato, quando, in modo irregolare, gli utili non distribuiti determinano l’aumento del valore dei titoli azionari. I mercati del capitale e gli intermediari finanziari semplificano questo procedimento facilitando i trasferimenti da società in surplus a quelle in deficit: le banche commerciali facilitano la circolazione di fondi tra le imprese indirizzando surplus monetari temporanei, e stagionali, di alcune (tali surplus determinano eccessi

---

<sup>11</sup> Proprietà della concorrenza perfetta sono: omogeneità dei prodotti e servizi offerti e informazione simmetrica nel mercato.

<sup>12</sup> Un modo analogo per descrivere questa condizione è che ci siano tanti titoli *indipendenti* quanti sono gli “stati di natura”.

<sup>13</sup> I contratti *futures* su beni reali soddisfano una significativa funzione Arrow-Debreu (secondo cui i beni e servizi presenti nel mercato soddisfano tutte le caratteristiche e le condizioni possibili per quel bene) per gli operatori che hanno interessi commerciali per uno specifico bene. Dato che raramente la copertura equilibrerà domanda e offerta, nel mercato si necessita la presenza di coloro che si assumono il rischio di perdita, cioè gli speculatori. La speculazione sequenziale e continua non era prevista da Arrow e Debreu e quando essa si verifica, gli operatori di mercato agiscono con un’ottica di breve periodo, distorcendo l’influenza dei fondamentali sui prezzi.

dei depositi bancari sui prestiti) verso quelle con disavanzi temporanei (le imprese in disavanzo utilizzano infatti i loro depositi bancari e impiegano linee di credito).

Ovviamente i mercati finanziari hanno un ruolo maggiormente rilevante nel finanziamento degli investimenti pubblici e dei loro disavanzi; per mezzo del mercato, i titoli pubblici entrano direttamente nei portafogli dei singoli individui e degli intermediari.

### **1.3.2 L'evoluzione del significato di *efficienza di mercato* nella letteratura accademica**

A partire dal decennio del 1960, il termine “efficiente” ha iniziato ad essere sempre più diffuso e utilizzato per descrivere i mercati finanziari, specie quelli mobiliari, grazie al contributo iniziale di Eugene F. Fama [1970] che definì efficiente «un mercato che in ogni istante riflette pienamente le informazioni disponibili».

La precedente letteratura fornì vari studi empirici su serie temporali dei prezzi, che evidenziarono la relazione tra processi random walk e mercati concorrenziali. Secondo l'interpretazione di questi modelli l'ipotetica presenza di una dipendenza statistica nei rendimenti dei titoli implicherebbe l'esistenza di extra profitti non sfruttati, il che risulta incoerente con il comportamento razionale degli investitori operanti in mercati concorrenziali. Gli successivi sviluppi proseguirono in tale direzione: si evidenziò la relazione fra i processi random walk ed efficienza, (elaborando modelli di mercato simili a quello del CAPM<sup>14</sup>) e si estese l'insieme delle informazioni da sottoporre ad analisi. Oltre alle serie storiche dei prezzi dei titoli si inclusero anche tutte le *informazioni pubblicamente disponibili*, cioè quelle accessibili a tutti gli investitori senza dover sostenere alcun costo per elaborare un ingegnoso schema di ricerca. I semplici modelli di equilibrio di concorrenza perfetta implicano che i ricavi medi di un'attività siano pari al suo costo marginale, quindi se il costo dell'informazione pubblica è nullo, lo sono anche i guadagni. Se i prezzi dei titoli si adeguassero immediatamente dopo la prima negoziazione successiva all'annuncio pubblico

---

<sup>14</sup> Il Capital Asset Pricing Model è un modello di equilibrio introdotto da W. Sharpe e altri che mette in relazione il rendimento atteso di un titolo con il rendimento atteso del mercato (includendo il rendimento di un titolo risk-free), attraverso il coefficiente  $\beta$ , misura del fattore di rischio. La formalizzazione del modello è descritta dalla seguente formula:

$$E[r_i] = \beta_{im}(E[r_m] - r_f) + r_f$$

dove  $E[r_i]$  rappresenta il rendimento atteso del titolo  $-i$ ,  $E[r_m]$  rappresenta il rendimento atteso del mercato ed,  $r_f$  è il rendimento di un titolo privo di rischio (ad esempio un titolo di stato).

dell'informazione, guadagni e perdite non dovrebbero verificarsi per coloro che scambiano il titolo sulla base della novità. Al contrario, un mercato che è concorrenziale dal punto di vista informativo consentirebbe guadagni privati derivanti dalla produzione delle informazioni che, in tal caso, implicherebbe un costo. Le prime ricerche empiriche sull'efficienza dei mercati, focalizzate sul ruolo delle informazioni pubbliche (a costo nullo), furono semplicemente rivolte alla verifica della concorrenzialità nel mercato degli investimenti.

Sebbene i lavori empirici lo avessero preceduto, Fama continuò il suo lavoro di formalizzazione della teoria dell'efficienza di mercato<sup>15</sup>, precisandone condizioni e distinguendo l'insieme informativo in tre diverse tipologie a ciascuna delle quali era associata una *forma* di efficienza. L'operato di Fama, noto come "principale teorico" del concetto di efficienza del mercato, contribuì all'emergere di dibattiti e critiche che fecero da stimolo a nuovi studi e teorie.

Durante lo stesso periodo furono elaborati una serie di lavori volti a dare una caratterizzazione più specifica dell'equilibrio implicito nell'efficienza e tutti basati su un concetto di efficienza inserito nel linguaggio, nella logica e nei concetti della *teoria dell'informazione*. Gli studi condotti da M. Rubinstein (1975), A. Beja (1976), W. H. Beaver (1981) e M. Latham (1986) (v. R. Ball in Vaciago-Verga, 1995), svilupparono un concetto di efficienza attraverso una metodologia diversa da quella utilizzata da Fama e dagli accademici precedenti. Egli, come la letteratura empirica, descrisse un mercato che utilizza l'informazione o che stabilisce esso stesso i prezzi; le teorie successive, invece, furono formalmente espresse in termini di comportamenti di singoli investitori e di come essi influenzino i prezzi. Tale diversità trae origine dall'appartenenza di questi teorici a diverse scuole, in modo particolare l'approccio di Fama è più vicino alla "scuola di Chicago", mentre la sequenza degli studiosi da Rubinstein a Latham, che prende spunti dalla teoria dell'informazione, è orientata alla "scuola di Berkeley". La tradizione empirico-pragmatica della scuola di Chicago è largamente influenzata dall'idea secondo cui il comportamento *razionale*, pienamente informato e massimizzante, della totalità degli individui non è una condizione necessaria per cui i mercati si muovano in linea con i modelli che ipotizzano tale

---

<sup>15</sup> Per una descrizione più approfondita della teoria di Fama, si veda il successivo paragrafo 1.4.



comportamento. Secondo questa scuola di pensiero non occorre comprendere il processo di formazione dei prezzi con lo scopo di elaborare modelli che riescano a spiegarli; in questa accezione lo sviluppo delle preferenze del singolo individuo non è considerato. Gli studiosi adepti alla scuola di Berkeley, al contrario tendono a partire dal singolo individuo per poi modellare i prezzi in termini di un qualche processo o proprietà di aggregazione che sono definiti in base alla collettività di individui considerata. Nel comparare i due approcci si può propendere per una o l'altra scuola, tuttavia dal punto di vista empirico le definizioni teorico-formali non hanno apportato alcun vantaggio evidente rispetto a quanto teorizzato da Fama, specialmente se esse sono applicate nella stima e nell'interpretazione dei residui medi dopo l'annuncio in un *event study* o delle periodicità infrasettimanali dei rendimenti. I ricercatori non osservano il mondo "altrimenti identico", elemento centrale delle sottigliezze teoriche, ma cercano di elaborare uno schema interpretativo per valutare la correttezza dei prezzi rispetto alle informazioni impiegando modelli di determinazione dei prezzi (per prevedere come gli annunci possano influenzare i rendimenti finanziari). Essi, in pratica, assumono *a priori* che i prezzi dei titoli si comportino in maniera 'corretta' (ad esempio come nel CAPM)<sup>16</sup>. Inoltre, dal punto di vista teorico, i modelli più formali, sembravano confondere le proprietà dell'informazione con le proprietà dei mercati. Il modo in cui Latham concepisce l'informazione come «informazione pubblicamente disponibile», riferendosi al set informativo disponibile a tutti gli investitori a costo zero, rende tautologicamente<sup>17</sup> efficienti i mercati rispetto a tutte le informazioni che sono autenticamente disponibili al pubblico. Essa quindi è una formulazione riguardante l'informazione in sé e non l'efficienza del mercato.

In conclusione, la sequenza che va da Rubinstein a Latham enfatizzò la parte logico-teorica, sviluppando una costruzione teorica che non offrì molte possibilità ad applicazioni empiriche e che non si conciliò con il concetto originario di efficienza e con il filone principale della letteratura empirica.

---

<sup>16</sup> Per misurare l'efficienza la ricerca empirica sviluppa modelli di determinazioni dei prezzi di equilibrio piuttosto che modellare l'efficienza. Poiché i test sull'efficienza sono basati su tali modelli al fine di migliorarne la corretta distribuzione dei prezzi, la ricerca empirica sull'efficienza del mercato appare così compromessa dal fallimento di questi.

<sup>17</sup> Le "informazioni pubblicamente disponibili", sono già, per definizione, informazioni disponibili a tutti *a costo zero*.

S. J. Grossman e J. E. Stiglitz [1980] contestando la definizione di Fama, affermarono che in un mercato finanziario, nessun individuo avrebbe convenienza nel produrre informazioni, poiché operando in base ad esse, significherebbe rivelarle ad altri senza guadagnarne. Sulla base di quanto detto, essi modificarono il concetto di efficienza con quello del *noisy rational expectations equilibrium* (equilibrio ‘disturbato’ delle aspettative razionali). Il disturbo, *noise*, provocato dal lato dell’offerta, ostacola la capacità degli altri investitori di dedurre informazioni dai prezzi. Senza disturbo non viene prodotta alcuna informazione, data la mancanza di incentivi; al contrario, con la presenza di *noises*, i prezzi non possono riflettere pienamente le informazioni, poiché non tutti gli operatori sono completamente informati. I prezzi, perciò, non possono riflettere pienamente tutte le informazioni.

In aggiunta, Grossman e Stiglitz, criticarono la prima definizione di Fama che enunciava «i prezzi che riflettono tutta l’informazione disponibile», quando la teoria economica della concorrenza afferma che «i prezzi riflettono tutte le informazioni pubblicamente disponibili». In un mondo concorrenziale, infatti, non vi è convenienza nel produrre informazione pubblicamente già disponibile, ma vi sono incentivi nel produrre informazione privata. Nei modelli teorizzati dai due studiosi, le informazioni sono divulgate al mercato, indirettamente e con ‘disturbo’, per mezzo delle contrattazioni effettuate dagli investitori informati (che agiscono individualmente indipendentemente) e degli effetti che esse generano sui prezzi. Tali formulazioni teoriche, però, non considerano tutti gli aspetti aziendali-istituzionali che sottendono al fenomeno della divulgazione pubblica delle informazioni. Innanzitutto, le aziende decidono di impegnarsi a diffondere in modo volontario alcune notizie al mercato, e, oltre alla cosiddetta *comunicazione volontaria*, esse (come società quotate in mercati regolamentati e come controparte di un rapporto contrattuale con gli investitori) hanno obblighi istituzionali di comunicazione tempestiva di informazioni rilevanti (*comunicazione obbligatoria*). Grossman e Stiglitz nei loro studi non considerarono alcun ruolo delle istituzioni, incluse le società quotate, ipotizzando una produzione e distribuzione delle informazioni da parte dei singoli investitori in maniera indipendente. Proprio per questa lacuna, sebbene le critiche a Fama furono costruttive, la loro teoria risulta comunque non del tutto completa ed esaustiva.

L'elenco della letteratura accademica riguardante l'efficienza del mercato non si esaurisce in questo paragrafo. Tra quelle proposte, ogni definizione caratterizza l'equilibrio del mercato rispetto all'informazione. Una differenza più evidente emerge tra gli approcci della scuola empirica e quelli della scuola della teoria economica dell'informazione; quest'ultima sembra non aver dato alcuno spunto per ricerche empiriche di verifica e applicazione teorica più approfondite, ma ha per lo più fornito indicazioni e specificazioni su formalismi logico-teorici.

## **1.4 Il contributo di Fama: le *Efficient Markets Hypothesis***

Nel suo articolo del 1970, Eugene F. Fama, dopo una breve analisi teorica sul modello del mercato efficiente, presentò un lavoro empirico condotto attraverso dei test sull'adeguamento dei prezzi dei titoli azionari in risposta a tre insiemi di informazioni.

### **Condizioni di mercato compatibili con l'efficienza**

Prima di descrivere in modo più dettagliato i modelli teorici e le forme di efficienza, è opportuno elencare le condizioni di mercato *sufficienti* (non necessarie) per avere un mercato azionario efficiente:

1. i costi di transazione sono nulli;
2. tutte le informazioni esistenti sono disponibili (a costo zero) per tutti gli operatori del mercato;
3. tutti gli investitori hanno la stessa opinione in merito a come le informazioni si riflettono sui prezzi attuali e sulle distribuzioni future dei titoli.

In un mercato così caratterizzato, il prezzo corrente di un titolo «rispecchia pienamente» tutte le informazioni disponibili. La situazione descritta, tuttavia, non rappresenta esattamente ciò che si osserva nella realtà; le tre condizioni sono infatti sufficienti, ma non necessarie. Per esemplificare questa particolarità si può immaginare a come un operatore, che esegua transazioni (sostenendo dei costi non nulli), trasmetta comunque al mercato nuove informazioni che si riflettono nei prezzi attraverso le negoziazioni dei titoli. Ugualmente, un mercato può essere efficiente anche se non tutti gli investitori sono in possesso di tutte le informazioni in modo gratuito. Anche l'eventuale dissenso fra i pareri degli operatori circa l'effetto delle informazioni non implica inefficienza, tranne il caso in cui, regolarmente, gli investitori valutino le nuove notizie in modo più corretto e veritiero rispetto alla valutazione che effettua il mercato, ciò rispetto a quanto

esse siano realmente incorporate nei prezzi. Nonostante siano cause potenziali di inefficienza, i costi di transazioni, informazioni non gratuitamente disponibili e il dissenso fra operatori non implicano, necessariamente, un mercato inefficiente.

### 1.4.1 Modelli di mercato finanziario efficiente

#### Modello del rendimento atteso o del “gioco equo” (“*fair game*” model)

Per poter analizzare empiricamente l’affermazione di Fama sull’efficienza di mercato (v. *supra* 1.3.2) è opportuno che il processo di formazione del prezzo di un titolo, in relazione alle informazioni, venga descritto in maniera più dettagliata.

Assumendo che le condizioni di equilibrio in un mercato siano stabilite in termini di rendimenti attesi, il modello può essere formalizzato dalla seguente relazione:

$$E(\tilde{p}_{t+1}|\Phi_t) = [1 + E(\tilde{r}_{t+1}|\Phi_t)] p_t \quad (1)$$

in cui  $E$  è l’operatore atteso,  $p_t$  il prezzo del titolo al tempo  $t$ ,  $\tilde{p}_{t+1}$  è una variabile casuale indicante il prezzo al tempo  $t+1$ ,  $\tilde{r}_{t+1}$  è una variabile casuale indicante il rendimento del singolo titolo da  $t$  a  $t+1$  e  $\Phi_t$  rappresenta l’insieme di informazioni riflesse al tempo  $t$ .

L’equazione (1) descrive una aspettativa condizionata dal *relevant information set*  $\Phi_t$  che è pienamente incorporato nella formazione del prezzo  $p_t$ . Le ipotesi che l’equilibrio di mercato possa essere descritto in termini di rendimenti attesi e che essi dipendano dall’insieme delle informazioni, hanno una notevole conseguenza empirica: non è possibile attuare delle strategie (acquisti o vendite) basate sul set informativo  $\Phi_t$ , che generino rendimenti maggiori a quelli di equilibrio.

Quindi definendo:

$$x_{t+1} = p_{t+1} - E(\tilde{p}_{t+1}|\Phi_t) \quad (2)$$

allora

$$E(\tilde{x}_{t+1}|\Phi_t) = 0 \quad (3)$$

Il termine  $x_{t+1}$  rappresenta il valore di mercato in eccesso di un titolo, dato dalla differenza tra il prezzo osservato e il valore atteso del prezzo stimato in base alle informazioni  $\Phi_t$ . L’uguaglianza in (3) afferma che le serie storiche dei rendimenti  $\{\tilde{x}_t\}$  è un «gioco equo» rispetto all’insieme di informazioni  $\{\Phi_t\}$ . Nel modello del *fair*

*trade*, l'extravalore del titolo è infatti nullo e vi è la mancanza del conseguimento di extraprofitti.

### **Modello “random walk”**

Interpretando l'affermazione di modello efficiente (il prezzo attuale di un titolo rispecchia pienamente tutte le informazioni disponibili) con il fatto che tutte le variazioni del prezzo siano indipendenti e identicamente distribuite, si può ipotizzare un modello di equilibrio di tipo *random walk*. Come afferma anche Fama [1970], ammettendo e dichiarando una sua imprecisione formale, la terminologia è approssimata. Un prezzo può seguire un random walk solo se le sue variazioni (i rendimenti) sono IID (identicamente e indipendentemente distribuiti: stessa distribuzione di probabilità e il conoscere qualcosa di una variabile non influenza il valore dell'altra). Anche se i rendimenti uni-periodali fossero IID, i prezzi non potrebbero seguire un random walk perché la distribuzione delle variazioni (assolute) dei prezzi dipende dal livello dei prezzi stessi.

Il modello “random walk” è caratterizzato matematicamente da due funzioni di densità  $f$ , messe in relazione attraverso la seguente uguaglianza:

$$f(r_{t+1}|\Phi_t) = f(r_{t+1}) \quad (4)$$

L'espressione implica inoltre che, per una variabile casuale indipendente, le distribuzioni di probabilità condizionate e marginali (di una variabile casuale indipendente)<sup>18</sup> siano fra loro identiche. L'ipotesi del random walk è molto più limitativa rispetto al modello dei rendimenti attesi descritto in (1), che può essere riscritto, assumendo rendimenti costanti nel tempo, come:

$$E(\tilde{r}_{t+1}|\Phi_t) = E(\tilde{r}_{t+1}) \quad (5)$$

Secondo questa formula, si ha che il valore atteso della distribuzione di  $r_{t+1}$  è indipendente dalle informazioni presenti in  $\Phi_t$ , mentre nella (4), è l'intera distribuzione (non solo il suo valore atteso) ad essere indipendente da  $\Phi_t$ .

---

<sup>18</sup> In aggiunta si ipotizza che la funzione di densità  $f$  sia la medesima per ogni  $t$ .

Il modello però non è utile a comprendere se le ‘informazioni’ passate (cioè le serie storiche dei rendimenti) siano o meno utili per ipotizzare la distribuzione dei rendimenti futuri<sup>19</sup>, poiché non viene messa in evidenza l’importanza e la necessità di utilizzare la successione cronologica dei rendimenti passati per stabilire la loro futura distribuzione. Secondo il modello random walk, la successione e l’ordine dei rendimenti passati non serve per stabilire le distribuzioni dei rendimenti futuri: ciò che è necessario conoscere è quali siano stati i rendimenti passati, indipendentemente dal loro ordine.

A confronto con il modello di «gioco equo», il random walk ne è un caso particolare poiché, oltre alle condizioni di mercato che favoriscono l’equilibrio (esprese in termini di rendimenti attesi), in esso si specifica anche il tipo di processo stocastico che genera i rendimenti dei titoli<sup>20</sup>.

### Modello della “submartingala”

Considerando l’equazione (1) e assumendo le seguenti ipotesi:

$$E(\tilde{p}_{t+1}|\Phi_t) \geq p_t \quad \text{oppure} \quad E(\tilde{r}_{t+1}|\Phi_t) \geq 0 \quad (6)$$

si dimostra che la serie dei prezzi  $p_t$  è distribuita come una *submartingala* rispetto alla serie del set informativo  $\Phi_t$ : cioè il valore atteso del prezzo futuro è maggiore o uguale a quello corrente. Se vale l’uguaglianza allora, la distribuzione è una *martingala*<sup>21</sup>.

Le relazioni descritte in (6) hanno importanza dal punto di vista operativo: se i rendimenti attesi non sono negativi, alcune *trading rules*<sup>22</sup> basate solo sull’insieme delle informazioni, non possono portare al conseguimento di extraprofitti rispetto a quelli che conseguirebbe un cosiddetto “cassettista”.

La breve presentazione di questi modelli serve ad inquadrare in modo più “tecnico” le relazioni che intercorrono tra prezzi dei titoli e informazioni e le modalità con cui esse influenzano i primi, secondo la teoria elaborata da Fama.

<sup>19</sup> Se i rendimenti fossero al contrario rappresentati da un *processo stazionario*, i dati passati sarebbero la migliore approssimazione per quelli futuri.

<sup>20</sup> Il modello random walk implica il fair game, ma non viceversa.

<sup>21</sup> La *martingala* è un processo stocastico  $x_t$  (indicizzato ad un parametro crescente  $t$ ) in cui, per  $r \leq s \leq t$ , il valore atteso di  $x_t$  condizionato rispetto ai valori  $x_r$  è uguale a  $x_s$ .

<sup>22</sup> Regole operative meccaniche basate sul «detenere titoli o moneta»: se i titoli presentano rendimenti di equilibrio negativi infatti, è più conveniente detenere moneta.

### 1.4.2 Le ipotesi di mercato efficiente (EMH)

La teoria generale di efficienza di mercato finanziario (v. *supra* 1.3.2) è stata suddivisa in tre distinte ipotesi di mercato efficiente, secondo il tipo di informazione considerata:

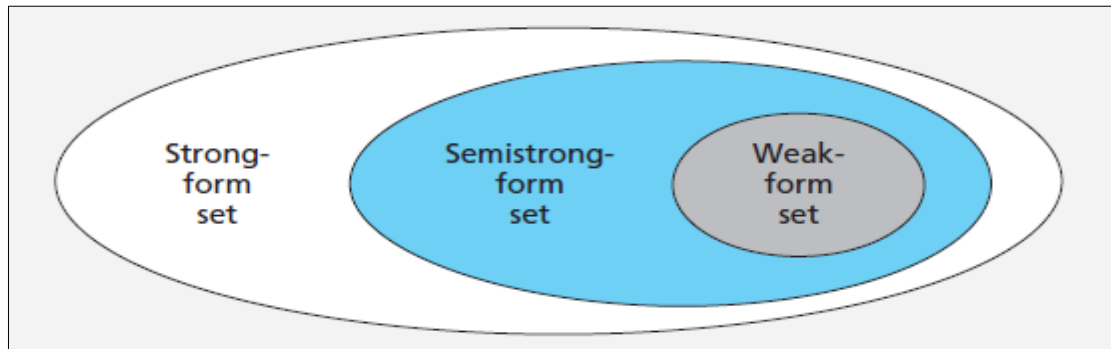
1. Efficienza in forma debole: i prezzi dei titoli osservati in un preciso momento, riflettono pienamente tutta l'informazione contenuta nella serie storica dei prezzi (pubblicamente disponibile a costo zero), dei volumi di scambio e dei tassi di interesse a breve. Secondo l'ipotesi di efficienza in forma debole, se i dati storici avessero apportato indicazioni (*signal*) rilevanti per prevedere l'andamento futuro dei prezzi, queste sarebbero già divenute note all'intero mercato e pienamente 'sfruttate' da tutti gli investitori. Non è perciò possibile formulare una strategia di trading che porti ad un rendimento atteso superiore a quello del mercato basandosi solo sulle informazioni contenute nelle serie storiche<sup>23</sup>.
2. Efficienza in forma semi-forte (o semi-debole): nei prezzi sono incorporate non solo l'informazione contenuta nelle serie storiche ma anche tutte le informazioni derivanti dai principali dati aziendali pubblicamente disponibili (ad esempio bilanci, previsioni sugli utili, annunci sui dividendi, qualità del management e altre comunicazioni finanziarie). I prezzi si riequilibrano immediatamente a seguito ad una divulgazione e non è possibile conseguire extra-rendimenti considerando solo informazioni di pubblico dominio.
3. Efficienza in forma forte: i prezzi riflettono oltre quanto detto nelle prime due ipotesi, anche tutte le informazioni private; qualunque operazione attuata rispetto a una qualsiasi informazione privilegiata non porta ad avere profitti superiori a quelli del mercato. Qualora ci fosse un *insider*, le informazioni in base a cui egli compie le sue operazioni verrebbero immediatamente 'catturate' dal prezzo.

L'efficienza in forma forte implica quella in forma semi-forte, che a sua volta implica quella in forma debole; viceversa non è logicamente possibile, proprio perché il set informativo va ampliandosi dalla forma debole a quella forte.

---

<sup>23</sup> L'efficienza in forma debole è conciliabile con la teoria dell'*asset pricing* che prevede che la distribuzione dei prezzi di un titolo possa essere descritta da una martingala rispetto alla misura di probabilità neutrale al rischio (in condizioni di non arbitraggio, il prezzo di un titolo è pari al suo valore atteso scontato al tasso privo di rischio).

**Figura 1.1** Information set rispetto alle EMH



Fonte: Bodie, Kane, Markus (2011)

Le ipotesi di efficienza di mercato possono essere ulteriormente rappresentate facendo riferimento alle tipologie e ai comportamenti degli operatori finanziari:

1. investitori razionali e ottimizzanti: essi valutano con precisione tutte le caratteristiche di un titolo basandosi sui fondamentali di essa (VAN, profitto atteso, rischio, tasso di sconto);
2. una parte di investitori si comporta in modo irrazionale: essendo però le aspettative differenti fra loro e non correlate, le strategie non efficienti si annullano e il prezzo di equilibrio non si modifica (è la presenza di arbitraggi che riporta ad equilibrio il mercato);
3. la maggioranza degli investitori è irrazionale: i disturbi stocastici generati da scorrette valutazioni non compromettono tuttavia le corrette strategie messe in atto da pochi investitori razionali.

Come si è letto, in tutte e tre le situazioni, sia, ovviamente, in quella in cui tutti gli investitori sono razionali, sia in quella più estrema in cui ci sono pochi investitori razionali, si riesce a raggiungere una condizione di equilibrio e di efficienza nei mercati finanziari.

Fin da subito le ipotesi di mercato efficiente non furono 'ben accolte' dalla comunità professionale dei gestori di portafogli, in particolare tra gli esperti dell'analisi tecnica.

Le principali questioni e argomenti su cui, a partire da allora, si è sviluppato un acceso dibattito, sia tra operatori, che tra accademici, sono le seguenti:

1. Spessore e grandezza del mercato (*magnitude issue*): in un mercato simile ad un *fair model*, solamente chi possiede un portafoglio di un certo valore può ottenere



profitti considerevoli sfruttando i *mispricing*<sup>24</sup> delle attività finanziarie; in quest'ottica sono i *portfolio manager* a rendere i prezzi di mercato più identici possibile a quelli di equilibrio ed è interessante capire non se il mercato è efficiente, ma quanto è efficiente, analizzarne cioè il *grado di efficienza*.

2. Propensione alla selezione (*selection bias issue*): ipotizzando che un investitore scopra una strategia in grado di generare dei rendimenti anomali, egli la renderà pubblica ottenendo dei riconoscimenti e premi o la sfrutterà in sua 'segretezza' guadagnando (finché gli altri operatori non ne comprendano il meccanismo analizzando le variazioni dei prezzi nel mercato)?
3. Eventi di 'fortuna' (*lucky event issue*): se il mercato è un *fair game*, allora l'investimento azionario può essere paragonato al 'lancio di una moneta': investitori sceglieranno croce, altri testa. Il loro guadagno, o perdita, dipenderà solo dalla fortuna (anche se il manager vincitore dirà che il profitto è stato ottenuto grazie alle sue capacità e competenze), o vi è una strategia vincente che si può ripetere in altri periodi?

Per capire meglio gli sviluppi pratici derivanti dalla teoria di Fama, sono stati elaborati varie tipologie di test empirici (v. *infra*) volti a verificare le tre ipotesi di efficienza.

### **1.4.3 Test di verifica delle EMH**

Nella letteratura accademica, quando si tratta l'argomento dell'efficienza dei mercati finanziari, si fa un ulteriore riferimento ai test di verifica sulle EMH. Essi sono stati elaborati e proposti da vari autori, con lo scopo di testare l'effettiva efficienza finanziaria attraverso analisi empiriche su diverse tipologie di dati. Il risultato generale che emerge non è categorico, nel senso che né si accettano, né si rigettano le ipotesi di efficienza; ovviamente tale esito deve essere opportunamente diversificato e contestualizzato in base al quadro di riferimento su cui è stata condotta l'analisi.

Come già anticipato nell'introduzione al capitolo, in questa sezione non verranno forniti in dettaglio gli aspetti matematico-statistici riguardanti i test<sup>25</sup>, ma si metteranno in luce

---

<sup>24</sup> I prezzi correnti sono diversi da quelli calcolabili attraverso modelli di pricing o di equilibrio.

<sup>25</sup> I più importanti sono stati brevemente descritti in questa sezione considerando che la letteratura accademica presenta una vasta quantità di test e ricerche empiriche diversi fra loro anche in minimi particolari.

le principali anomalie emerse da questi, dalle quali si svilupparono le successive idee sulle potenziali cause di inefficienza dei mercati.

### **Verifica dell'ipotesi di efficienza in forma debole**

I test per misurare la presenza di efficienza in forma debole, si basano sull'analisi empirica dei rendimenti azionari per comprendere se i dati passati delle serie storiche siano correlati ed influenzino i dati attuali e quelli futuri. Viene inoltre implementata una differenziazione nel periodo temporale di analisi: sono proposti test sui rendimenti nel breve periodo e medio lungo periodo. Questa distinzione è di fondamentale importanza poiché condurrà, come descritto in seguito, a risultati e conclusioni discordanti.

#### ***Pattern dei rendimenti azionari di breve periodo: correlazione seriale, run test***

Un modo per individuare i trend significativi dei prezzi azionari è misurare la *correlazione seriale* nei rendimenti per indagare sulla presenza di una relazione lineare fra i rendimenti attuali e quelli passati<sup>26</sup>.

Una correlazione seriale positiva significa che a rendimenti positivi, seguiranno rendimenti positivi (proprietà di *momentum*), mentre se la misura è negativa, a rendimenti positivi seguiranno rendimenti negativi (proprietà di inversione o *reversal property*).

A. Lo and C. MacKinlay [1987] esaminando i rendimenti settimanali dei titoli azionari del NYSE<sup>27</sup>, individuarono una correlazione seriale positiva nel breve periodo. Tuttavia i coefficienti di correlazione (fra i maggiori titoli azionari cui prezzi sono costantemente aggiornati) tendono ad avere valori modesti: l'evidenza non farebbe presupporre la presenza di opportunità di trading nel mercato. Mentre per i maggiori indici di mercato la correlazione seriale appariva debole, analizzando, per un periodo da 3 a 12 mesi, il comportamento di certi titoli azionari appartenenti a diversi settori del mercato (dette analisi di tipo *cross-section*), N. Jegadeesh e S. Titman (v. Bodie-Kane-Markus, 2011) riscontrarono un *momentum effect*: la buona o cattiva performance di particolari titoli

---

<sup>26</sup> La relazione può essere definita dall'equazione della retta di regressione  $r_t = \alpha + \beta r_{t-1} + e_t$  dove  $\alpha$  misura il rendimento atteso, indipendente da quello passato e  $\beta$  misura la relazione fra rendimento precedente e corrente ( $r_t$  e  $r_{t-1}$  sono i rendimenti nei due periodi,  $e_t$  rappresenta la variabilità del rendimento attuale non spiegata da quello passato).

<sup>27</sup> New York Stock Exchange è la borsa di New York, la più grande del mondo per volumi di scambi.

azionari si protraeva nel tempo. Infatti, un portafoglio contenente le *best performing stocks* offre generalmente un rendimento maggiore rispetto a singole azioni<sup>28</sup>.

Da queste ricerche empiriche è emerso che gli indici aggregati di mercato e le indagini di tipo *cross-section* sono caratterizzati dal *momentum effect*.

Per valutare quanto i dati passati delle serie storiche dei rendimenti influenzino i dati futuri, una parte preponderante dei test proposti in letteratura fa utilizzo dei coefficienti di correlazione. Tuttavia essi sono fortemente influenzati dai valori estremi delle osservazioni (*outlier*) e questo potrebbe provocare una distorsione nei risultati. Allo scopo di studiare la correlazione tra i rendimenti (e i prezzi) azionari, ovviando l'effetto distorsivo causato da eventuali outlier, si impiegano i *run test*. Attraverso la loro applicazione si esamina il segno della variazione subita dal prezzo di un titolo, indicando rispettivamente con “+” e “-” una variazione positiva e negativa e con “0” se il prezzo rimane costante cioè non subisce variazioni; ad esempio la sequenza [... + + + - - + - 0 ...] rappresenta in maniera sintetica le variazioni subite dal prezzo di un titolo in un certo periodo temporale.

In modo piuttosto intuitivo, se i prezzi sono positivamente correlati tra loro, è probabile che un segno + (-) sia seguito da un altro segno + (-). Una sequenza di segni dello stesso tipo è chiamata *run*. Nell'esempio: [+ + + +] [- - -] [0] sono presenti 3 run.

Ovviamente, se i prezzi sono correlati positivamente tra loro, il numero di run che descrive le variazioni (per un certo arco temporale) sarà minore rispetto a quello che risulterebbe in caso di correlazione negativa. Nelle sue verifiche empiriche Fama [1965] osservò come esisteva una debole correlazione positiva che tendeva ad aumentare positivamente ampliando l'intervallo temporale di rilevazione da 1 a 16 giorni.

---

<sup>28</sup> Tuttavia potrebbero esserci problemi di liquidità in alcuni portafogli: se i titoli non sono scambiati, e non si modifica la composizione del portafoglio, è molto probabile che esisterà una correlazione stabile tra passato e futuro in un determinato periodo.

**Tabella 1.1** Numero di run effettivi e attesi per intervalli di 1, 4, 9 e 16 giorni

| Stock                       | DAILY  |          | FOUR-DAY |          | NINE-DAY |          | SIXTEEN-DAY |          |
|-----------------------------|--------|----------|----------|----------|----------|----------|-------------|----------|
|                             | Actual | Expected | Actual   | Expected | Actual   | Expected | Actual      | Expected |
| Allied Chemical.....        | 683    | 713.4    | 160      | 162.1    | 71       | 71.3     | 39          | 38.6     |
| Alcoa.....                  | 601    | 670.7    | 151      | 153.7    | 61       | 66.9     | 41          | 39.0     |
| American Can.....           | 730    | 755.5    | 169      | 172.4    | 71       | 73.2     | 48          | 43.9     |
| A.T.&T.....                 | 657    | 688.4    | 165      | 155.9    | 66       | 70.3     | 34          | 37.1     |
| American Tobacco.....       | 700    | 747.4    | 178      | 172.5    | 69       | 72.9     | 41          | 40.6     |
| Anaconda.....               | 635    | 680.1    | 166      | 160.4    | 68       | 66.0     | 36          | 37.8     |
| Bethlehem Steel.....        | 709    | 719.7    | 163      | 159.3    | 80       | 71.8     | 41          | 42.2     |
| Chrysler.....               | 927    | 932.1    | 223      | 221.6    | 100      | 96.9     | 54          | 53.5     |
| Du Pont.....                | 672    | 694.7    | 160      | 161.9    | 78       | 71.8     | 43          | 39.4     |
| Eastman Kodak.....          | 678    | 679.0    | 154      | 160.1    | 70       | 70.1     | 43          | 40.3     |
| General Electric.....       | 918    | 956.3    | 225      | 224.7    | 101      | 96.9     | 51          | 51.8     |
| General Foods.....          | 799    | 825.1    | 185      | 191.4    | 81       | 75.8     | 43          | 40.5     |
| General Motors.....         | 832    | 868.3    | 202      | 205.2    | 83       | 85.8     | 44          | 46.8     |
| Goodyear.....               | 681    | 672.0    | 151      | 157.6    | 60       | 65.2     | 36          | 36.3     |
| International Harvester.... | 720    | 713.2    | 159      | 164.2    | 84       | 72.6     | 40          | 37.8     |
| International Nickel.....   | 704    | 712.6    | 163      | 164.0    | 68       | 70.5     | 34          | 37.6     |
| International Paper.....    | 762    | 826.0    | 190      | 193.9    | 80       | 82.8     | 51          | 46.9     |
| Johns Manville.....         | 685    | 699.1    | 173      | 160.0    | 64       | 69.4     | 39          | 40.4     |
| Owens Illinois.....         | 713    | 743.3    | 171      | 168.6    | 69       | 73.3     | 36          | 39.2     |
| Procter & Gamble.....       | 826    | 858.9    | 180      | 190.6    | 66       | 81.2     | 40          | 42.9     |
| Sears.....                  | 700    | 748.1    | 167      | 172.8    | 66       | 70.6     | 40          | 34.8     |
| Standard Oil (Calif.).....  | 972    | 979.0    | 237      | 228.4    | 97       | 98.6     | 59          | 54.3     |
| Standard Oil (N.J.).....    | 688    | 704.0    | 159      | 159.2    | 69       | 68.7     | 29          | 37.0     |
| Swift & Co.....             | 878    | 877.6    | 209      | 197.2    | 85       | 83.8     | 50          | 47.8     |
| Texaco.....                 | 600    | 654.2    | 143      | 155.2    | 57       | 63.4     | 29          | 35.6     |
| Union Carbide.....          | 595    | 620.9    | 142      | 150.5    | 67       | 66.7     | 36          | 35.1     |
| United Aircraft.....        | 661    | 699.3    | 172      | 161.4    | 77       | 68.2     | 45          | 39.5     |
| U.S. Steel.....             | 651    | 662.0    | 162      | 158.3    | 65       | 70.3     | 37          | 41.2     |
| Westinghouse.....           | 829    | 825.5    | 198      | 193.3    | 87       | 84.4     | 41          | 45.8     |
| Woolworth.....              | 847    | 868.4    | 193      | 198.9    | 78       | 80.9     | 48          | 47.7     |
| Averages.....               | 735.1  | 759.8    | 175.7    | 175.8    | 74.6     | 75.3     | 41.6        | 41.7     |

Fonte: Fama (1965)

In definitiva, dai test di correlazione e dei segni di breve periodo emerge una debole relazione positiva fra le serie dei rendimenti azionari di ieri e quelli attuali, e questa risulta più bassa o negativa per i singoli titoli. Occorre inoltre evidenziare che, nonostante la presenza di queste correlazioni, il mercato finanziario risulta essere efficiente. Nella realtà i costi di transazione andrebbero a neutralizzare (se la correlazione è bassa) qualsiasi profitto derivante dal tentativo di trarre vantaggio dalla relazione fra rendimenti. In un mercato efficiente, perciò, i costi di transazione rappresentano un limite superiore al valore della correlazione<sup>29</sup>.

### ***Pattern dei rendimenti azionari di lungo periodo***

Sebbene gli studi rivolti all'analisi dei rendimenti nel breve e medio periodo abbiano individuato la proprietà di *momentum* nei prezzi dei titoli (cioè ad una data variazione positiva, ne segue una di medesimo segno), ciò non si verifica nel lungo periodo. Infatti,

<sup>29</sup> Un primo segnale dell'efficienza dei mercati è la presenza di costi di transazione elevati, conseguente ad un'elevata correlazione osservata.

esaminando il comportamento dei prezzi e dei rendimenti azionari in archi temporali pluriennali infatti, si riscontra una correlazione seriale negativa. La principale motivazione di questo fatto è legata ad una reazione eccessiva (*overreaction*) del mercato rispetto alle notizie: nel breve periodo i prezzi dei titoli sono caratterizzati da correlazione seriale positiva (*momentum effect*), ma, all'aumentare dell'arco temporale di riferimento, si verificano delle 'correzioni' che portano a variazioni negative dei prezzi (performance negative dei rendimenti) a cui seguono, all'opposto, aumenti dei prezzi e performance positive (vi è quindi una correlazione negativa tra i prezzi azionari). In altri termini una 'correzione' dei prezzi sta a significare che ad un *run* di variazioni positive dei prezzi [+ + +], seguirà un *run* di rendimenti negativi [- - -], rilevando un *correlazione seriale negativa* nel lungo periodo.

Un'interpretazione alternativa di questi risultati può riguardare il fatto che il *risk premium* (premio per il rischio, attribuito ai titoli azionari poiché essi sono volatili e quindi maggiormente rischiosi) varia nel tempo; ad esempio, quando il premio al rischio e, di conseguenza, anche il rendimento atteso aumentano, i prezzi azionari diminuiscono; nel momento in cui il mercato raggiunge il suo più elevato tasso di rendimento, i prezzi iniziano ad aumentare (poiché la domanda dei titoli con un rendimento atteso maggiore aumenterà). Questa apparente 'reazione' o 'correzione' non è altro che la conseguente modifica dei prezzi di mercato dovuta alla variazione dei tassi di sconto (o tassi di rendimento).

Altri studi suggeriscono che nel lungo periodo, le performance dei titoli azionari tendono a subire un'inversione (*reversal effect*): le azioni che hanno conseguito buoni rendimenti nel passato, tendono poi ad avere una performance relativamente peggiore rispetto al resto del mercato e viceversa. Questo comportamento di tipo inversivo indica che il mercato azionario reagisce esageratamente alle news più importanti; non appena nel mercato si percepisce che la reazione è stata forte, si attua un meccanismo di correzione e, come conseguenza, vi è un'inversione nelle performance dei titoli.

Concludendo questa breve analisi dei test sui pattern dei rendimenti azionari, ciò che è emerso dalla maggior parte degli studi è che la *overreaction* nel breve periodo, che causa dei *momentum* nei prezzi, porti a inversioni di performance nel medio-lungo periodo (quando il mercato riconosce gli errori di *overreaction* passati e aggiusta i prezzi).

Da questi test sull'efficienza in forma debole si può desumere che i mercati finanziari sono piuttosto efficienti (in forma debole) nel breve periodo, per quanto riguarda il fatto che le informazioni passate sono 'contenute' nei prezzi correnti (anche se in questo caso l'ipotesi di un processo random walk per i prezzi azionari sarebbe non accettabile).

Effettuando i test sul medio-lungo periodo, gli andamenti dei prezzi sono analizzati con un'ottica più ampia e ciò permette di identificarne e comprenderne meglio le dinamiche sottostanti i trend e le variazioni. L'ipotesi di efficienza in forma debole si può accettare considerando il fatto che, a seguito di una overreaction, che rappresenta un'inefficienza operativa temporanea, gli investitori, dopo aver compreso l'errore, modificano le loro valutazioni e il mercato 'si aggiusta'. Bisogna tenere comunque a mente che l'overreaction in sé non è un comportamento previsto dalla teoria delle EMH.

### **Verifica dell'ipotesi di efficienza in forma semi-forte**

I test sulla forma semi-forte di efficienza sono equivalenti allo studio dell'efficacia dell'*analisi fondamentale*, cioè a come e quanto la conoscenza di tutte le informazioni pubblicamente disponibili<sup>30</sup> e di tutte le serie storiche dei rendimenti, possa migliorare la performance di un investimento. Spesso i risultati di questi test, che studiano le relazioni fra fondamentali e rendimenti in eccesso, sono difficilmente conciliabili con la teoria delle EMH<sup>31</sup>, poiché evidenziano anomalie di mercato tali da rigettare l'ipotesi di efficienza in forma semi-forte.

La relazione fra caratteristiche aziendali ed extra-rendimenti (che porta ad anomalie nel mercato) viene giustificata secondo cinque possibili spiegazioni:

1. gli studiosi, piuttosto che effettuare il test su un campione più ampio e verosimile, si focalizzano su un periodo particolare utilizzando una certa metodologia, sovrastimando la reale significatività di questa relazione;
2. le caratteristiche aziendali rappresentano solo una *proxy* della variabile "rischio" omessa: ad esempio le aziende minori hanno meno probabilità di sopravvivenza che non è adeguatamente misurata dal coefficiente di rischio  $\beta$  nel principale modello di riferimento di *pricing* di asset finanziari, cioè il CAPM;

---

<sup>30</sup> Informazioni pubblicamente disponibili, in particolare alcune caratteristiche aziendali come: la dimensione, il rapporto prezzo di mercato/valore contabile, l'indice utile/prezzo; misure che sono tutte collegate al realizzo di extra-rendimenti.

<sup>31</sup> Infatti secondo le EMH in forma semi-forte non è possibile conseguire degli extra-profitti sulla base di caratteristiche societarie pubbliche.

3. il CAPM non è stato applicato in modo corretto e i rendimenti attesi risultano elevati (se si sottostima il coefficiente  $\beta$  delle imprese minori, i rendimenti attesi calcolati sarebbero molto inferiori rispetto a quelli che si verificano, registrando un extra-profitto non veritiero);
4. i costi di transazione annullano qualsiasi strategia volta a sfruttare in modo profittevole queste relazioni;
5. i mercati sono inefficienti.

Di seguito saranno descritti alcuni test, fra i più conosciuti, che mettono in relazione le dinamiche dei prezzi e rendimenti dei titoli azionari con alcune tra le variabili dei fondamentali delle aziende (considerate informazioni di pubblico dominio) per studiare la presenza e gli effetti dell'efficienza in forma semi-forte.

#### ***Rapporto Prezzo/Utile (Price/Earnings ratio: P/E)***

S. Basu (v. Bodie-Kane-Markus, 2011) scoprì che i portafogli contenenti azioni con rapporto P/E basso, facevano conseguire profitti maggiori rispetto a portafogli con P/E alto. Questo risultato sta a significare che il mercato prezza erroneamente e sistematicamente le società con un rapporto prezzo/utile basso?

Una motivazione più plausibile è che i rendimenti non siano adeguatamente corretti per il rischio: se due aziende avessero gli stessi utili attesi, il titolo più rischioso avrebbe un prezzo ed un rapporto P/E minore rispetto al titolo più sicuro. Tuttavia data la maggiore rischiosità, il titolo con P/E più basso dovrebbe far conseguire rendimenti maggiori; quindi il P/E *ratio* viene utilizzato come misura di rischiosità del titolo ed è associato ad extra-rendimenti<sup>32</sup>. In termini di verifica delle EMH questo influisce sul fatto che, la presunta mancanza presenza di efficienza è dovuta alla possibilità di conseguire degli extra-profitti (ipotesi non attribuibile alla teoria delle EMH) dovuta alla non valutazione, da parte del mercato, del rischio aziendale. Il rischio di un'azienda in termini di rapporto prezzo/utile è un'informazione, si presuppone, di carattere pubblico, quindi se essa non viene riflessa nei prezzi, l'ipotesi di efficienza in forma semi-forte non è riscontrabile.

#### ***L'“effetto dimensione” (Small-firm-in-January effect)***

L'“effetto dimensione” o *small firm effect* è stato particolarmente analizzato dagli studi di Banz (v. Bodie-Kane-Markus, 2011). Egli documentò i rendimenti in eccesso

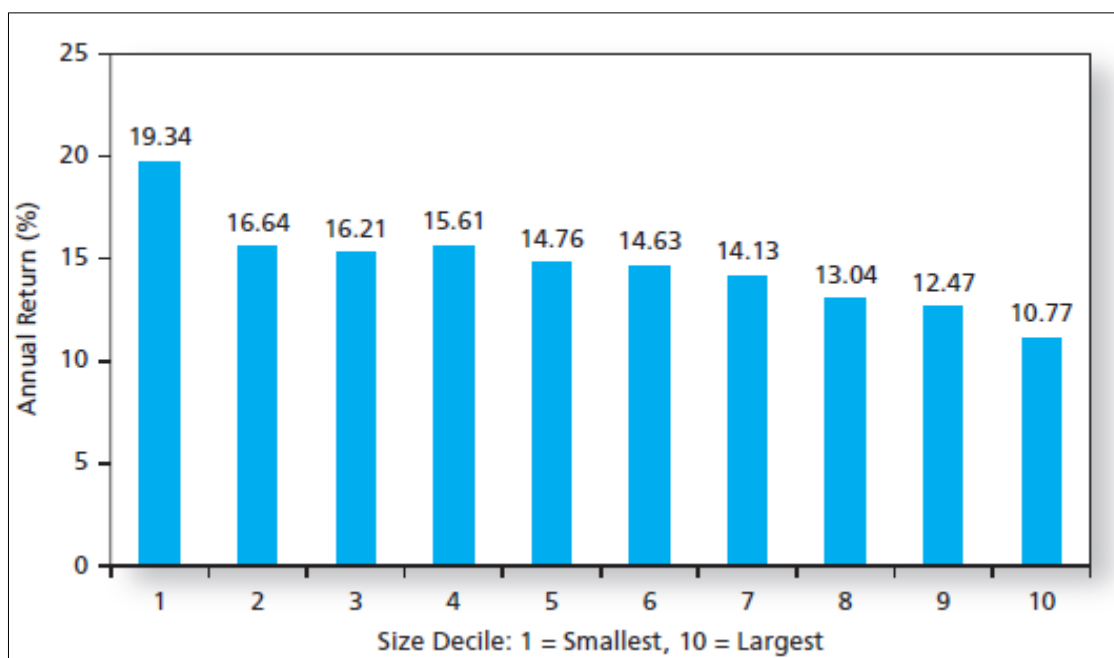
---

<sup>32</sup> Si utilizza il CAPM per misurare la performance del titolo o portafoglio *benchmark*.

conseguiti dalle imprese di minori dimensioni e notò che la dimensione aziendale era una caratteristica importante sia in termini di significatività statistica che di rilevanza empirica. Dalle sue ricerche, Banz dimostrò che il rendimento netto che si otteneva detenendo titoli di imprese a bassa capitalizzazione (*small cap*) era prodotto dal 20% delle aziende più piccole rispetto al campione di analisi (composto da tutte le società del NYSE).

Come si vede dalla Figura 1.2, suddividendo le azioni del NYSE in 10 portafogli in base alla dimensione<sup>33</sup> delle aziende, per il periodo temporale dal 1926 al 2008, i rendimenti medi annuali maggiori sono quelli relativi ai portafogli *small cap*.

**Figura 1.2** Rendimenti annuali medi per 10 portafogli, 1926-2008



I portafogli sono costruiti in base alla dimensione delle società del NYSE con valori assegnati da 1 (aziende più piccole) a 10 (aziende con capitalizzazione maggiore).

Fonte: Bodie, Kane, Markus (2011)

Ovviamente i portafogli contenenti titoli di aziende *small cap* sono più rischiosi<sup>34</sup> perciò il premio al rischio che determina il rendimento effettivo, risulta maggiormente valutato. Inoltre gli investitori richiedono un rendimento addizionale per le azioni delle

<sup>33</sup> Dimensione intesa come valore totale delle azione emesse (il cosiddetto *equity*).

<sup>34</sup> La maggiore variabilità e rischiosità delle piccole aziende (caratteristiche che si ripercuotono sui titoli) deriva dalla loro bassa produzione di beni o servizi e dall'elevato rapporto di indebitamento: esse sono aziende 'ai margini' del mercato, con bassa e incerta probabilità di 'sopravvivenza'.



aziende minori anche per il fatto che, essendo meno liquide<sup>35</sup> (in questo contesto si parla anche di *liquidity effect*), la loro compravendita implica dei costi di transazione più elevati, che riducono drasticamente l'extra-profitto.

In seguito al risultato ottenuto dallo studio di Banz, si è dimostrato che l'”effetto dimensione” si verifica soprattutto durante il primo mese dell'anno. La differenza dei rendimenti (dovuti al fattore *size*) registrata nel mese di gennaio, è circa il 50% di quella annuale: si parla perciò di *small-firm-in-January effect*. In questo caso, i prezzi di mercato dei titoli azionari, e in particolare i rendimenti, rispecchiano la caratteristica dimensionale aziendale (anche dal punto di vista cronologico, poiché l'aumento dei prezzi si manifesta soprattutto a gennaio). In questo caso, l'ipotesi di efficienza in forma semi-forte risulta accettabile, probabilmente dovuto al fatto che le informazioni sulla dimensione aziendale sono molto più diffuse tra gli operatori nel mercato e vengono opportunamente riflesse nei prezzi dei relativi titoli.

#### ***Rapporto valore contabile/prezzo di mercato (Book-to-Market ratio)***

Un altro indicatore che appare essere influente sui rendimenti azionari è il rapporto fra il valore contabile dell'*equity* aziendale (il valore totale delle azioni emesse) e il prezzo di mercato. Suddividendo le società in 10 gruppi rispetto al rapporto valore contabile/prezzo di mercato, Fama e French (v. Elton *et al*, 2007) dimostrarono che i titoli delle aziende con il più alto rapporto *book to market*, registravano un rendimento medio mensile maggiore. Questa accentuata dipendenza tra i rendimenti e il suddetto *ratio*, suggerisce che le società con alto rapporto valore contabile/prezzo di mercato siano sottovalutate dagli investitori (quindi sottoprezzate) o, altresì, che tale rapporto possa essere considerato come un'approssimazione del fattore di rischio che altera i rendimenti attesi di equilibrio. Quest'ultima considerazione suggerisce che i prezzi di mercato, sebbene alterino i rendimenti attesi di equilibrio, incorporino anche il fattore rischio aziendale (dal momento che il rapporto valore contabile dell'azione/prezzo di mercato dell'azione può identificare la rischiosità di un determinato titolo). Se la valutazione è corretta e tiene conto anche di tutti gli altri aspetti e informazioni pubblicamente disponibili, l'efficienza in forma semi-forte è accettabile, purché nel

---

<sup>35</sup> I titoli *small cap* hanno differenziali prezzo denaro-prezzo lettera (*bid-ask spread*) più elevati, e si dicono meno 'liquidi' poiché le aziende di minore entità sono meno seguite dagli analisti e le informazioni sono ridotte (*neglected-firm effect*). Per questo motivo nel mercato non vi è sempre la certezza che ci siano operatori disposti ad acquistarli o venderli (sono titoli poco 'scambiati').

mercato si modifichino istantaneamente i rendimenti attesi di equilibrio a seguito di questa valutazione del rischio.

### **Verifica dell'ipotesi di efficienza in forma forte**

#### ***Insider trading e insider information***

Tutti gli investitori che possiedono una certa quota azionaria (pari a circa il 10% del totale) o che rivestono ruoli di direzione significativa aziendale (funzionari, direttori, esponenti aziendali) in una determinata società sono considerati degli *insider*. Dal momento che essi si trovano in una situazione privilegiata rispetto ad altri comuni investitori, negli USA questi soggetti hanno l'onere di rendere note alla SEC<sup>36</sup> tutte le operazioni effettuate sui titoli della società di cui fanno parte. Da vari studi condotti da Jaffe *et al* (1974) è emerso che gli *insider* operano in maniera molto profittevole (acquistando le azioni nel periodo anteriore l'aumento del prezzo e vendendole prima che la quotazione di mercato diminuisca) e ottengono dei rendimenti in eccesso rispetto al loro valore atteso poiché utilizzano in modo illegale notizie riservate e non disponibili all'intero mercato. Viene inoltre rilevata la tendenza dei prezzi ad aumentare a seguito di grandi acquisti da parte degli *insider* e viceversa: sostanzialmente le loro operazioni contribuiscono a determinare i movimenti del prezzo del titolo. La SEC, attraverso l' "Official Summary of Security Transactions and Holdings" rende pubbliche le operazioni effettuate dagli *insider*: se i mercati fossero efficienti, i prezzi dovrebbero immediatamente incorporare queste nuove informazioni e nessun investitore sarebbe in grado di conseguire dei profitti operando sulla base del trading effettuato in precedenza dagli *insider*. Nella realtà, dunque è praticamente impossibile accettare l'ipotesi di efficienza in forma forte perché se i prezzi riflettessero tutte le informazioni, anche quelle non pubblicamente disponibili, i mercati finanziari si 'esaurirebbero in un equilibrio perenne' e non vi sarebbe più alcuna dinamica operativa.

Un altro filone di ricerche ha approfondito il contenuto informativo delle previsioni e raccomandazioni degli analisti finanziari, per verificare se essi siano o meno in possesso di informazioni non ancora incorporate nei prezzi di mercato. La maggior parte di questi studi presenta tuttavia due effetti distorsivi: il *selection bias* e il *survivorship bias*

---

<sup>36</sup> La Security and Exchange Commission é l'ente federale degli Stati Uniti predisposto a vigilare la borsa valori.

Il primo si verifica poiché l'accesso e il possesso del set di dati utilizzato per queste ricerche, costituito da previsioni/informazioni storiche, viene sottoposto a diversi controlli: le case di investimento rendono accessibili soprattutto le previsioni passate con valente contenuto informativo, in modo da mettere in luce la superiorità e le capacità tecniche degli analisti finanziari. Il *survivorship bias*, invece, si verifica dalla parte degli studiosi dal momento che la selezione dal campione delle società di investimento su cui condurre una determinata analisi, viene attuata in base alle loro capacità previsionali.

In aggiunta alle varie tipologie di test, differenziati in base alla forma di efficienza da esaminare, vi è un ulteriore insieme di studi empirici finanziari che si occupa dell'effetto degli annunci di alcune news sul prezzo dei titoli e quindi di valutare l'efficienza dei mercati. Queste ricerche utilizzano la metodologia dell'*event study*.

#### **1.4.4 Studio di eventi (*Event Study*)**

Lo studio di eventi si occupa di esaminare l'effetto della diffusione di certe news (in particolari di annunci societari) nei mercati finanziari, in particolare in quello azionario, che si manifesta sui prezzi dei titoli. Questo metodo ha lo scopo di misurare l'efficienza del mercato focalizzandosi sulla misurazione della velocità con cui le nuove informazioni sono 'scontate' dai prezzi. Ad esempio se un'azienda annuncia una variazione in positivo sugli utili, questa metodologia cerca di individuare la tempistica con cui tale annuncio viene incorporato nella quotazione. Vari studi dimostrano che i prezzi delle azioni rispondono velocemente alle news con modalità e variazioni prevedibili, perciò l'*event study* si impiega per capire quale tipo di informazione venga riflessa nei prezzi e se si tratta di una notizia 'buona' o 'cattiva' (*good o bad news*).

#### **Metodologia dell'*event study***

Le fasi in cui si articola uno studio di evento è la seguente:

1. si determina il campione di analisi attraverso la selezione delle società che hanno fatto una comunicazione al mercato di notizie non attese, provocando un 'effetto sorpresa' (il cosiddetto "evento");

2. si definisce il giorno della notizia indicandolo come “giorno zero”: per verificare in modo più preciso l’efficienza del mercato è auspicabile utilizzare intervalli temporali più brevi possibili, utilizzando dati di quotazione infra-giornalieri;
3. si determina la finestra di evento (*event window*) cioè il periodo oggetto dell’analisi, considerando giorni precedenti e successivi alla comunicazione;
4. per ogni azienda del campione si calcola il rendimento relativo a ciascun giorno del periodo e si stima in egual modo il rendimento in eccesso (cioè la differenza fra il rendimento effettivo e una *proxy*, cioè un valore approssimato mediante opportuni calcoli, di quello che si sarebbe registrato in assenza di notizie);
5. si calcola il rendimento in eccesso medio per ogni giorno del periodo (calcolando la media dei dati per ciascuna azienda) per poter analizzare l’effetto medio dell’annuncio in generale (rispetto al campione di analisi) e non per singola azienda;
6. eventualmente si può calcolare il rendimento in eccesso medio cumulato, sommando gli extra profitti medi giornalieri del periodo, per osservare in modo più sintetico e intuitivo il comportamento e le variazioni dei prezzi attorno al giorno zero<sup>37</sup>.

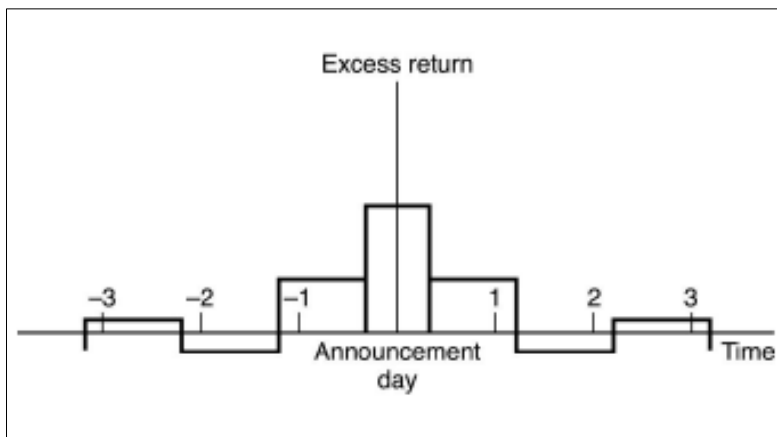
Per comprendere meglio i risultati di alcuni studi di evento è utile fare riferimento alle figure che seguono. Nella Figura 1.3 si denota un notevole rendimento in eccesso in corrispondenza del giorno dell’annuncio (giorno zero) e rendimenti distribuiti in modo casuale negli altri giorni. La Figura 1.4 b relativa ai frazionamenti (*split*) azionari rappresenta gli effetti dei frazionamenti sui rendimenti azionari per un campione di 940 casi tra il 1927 e il 1959. I frazionamenti ricevono normalmente una ‘buona accoglienza’ da parte degli investitori, inoltre, il prezzo dei titoli non pare aumentare ulteriormente il proprio valore in seguito a tale comunicazione aziendale rimanendo stabile. Queste due figure mostrano il trend dei rendimenti in eccesso in situazione di mercato efficiente in forma semi-forte: è giusto aspettarsi un extra-rendimento al giorno zero ma non negli altri giorni.

---

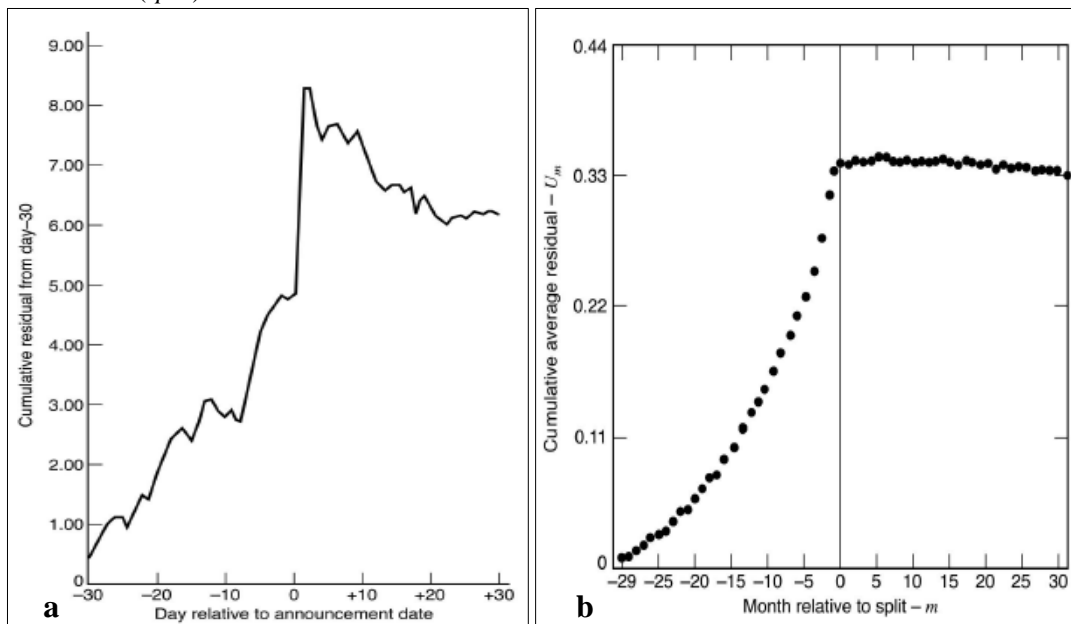
<sup>37</sup> La presenza di extra-rendimenti successivi al giorno della notizia indica il tempo che essa impiega ad essere incorporata nei prezzi. Se vi sono extra-rendimenti precedenti all’annuncio allora: il mercato è già a conoscenza e in attesa di un’imminente importante notizia o vi è una fuga di notizie da parte di chi ne è a conoscenza (colui che è a conoscenza di notizie riservate è detto *insider*, da cui deriva il termine *insider trading*).

La Figura 1.4 a descrive i rendimenti in eccesso medi cumulati dei 30 giorni seguenti all'annuncio: nel giorno zero la curva raffigura il cosiddetto *drift post annuncio* ovvero si evidenzia la rapidità con cui il prezzo incorpora le news. Poiché l'aumento repentino avviene tra l'operazione precedente all'annuncio e quella immediatamente successiva, il grafico presenta una leggera flessione negativa del rendimento in eccesso medio cumulato nei giorni successivi alla data dell'evento. Questo fatto è in coerenza con l'ipotesi di efficienza in forma semi-forte del mercato, perché i prezzi incorporano in modo quasi 'simultaneo' la notizia e ciò si riflette come conseguenza immediata anche sui rendimenti.

**Figura 1.3** Rendimento in eccesso nell'intorno della data dell'annuncio



**Figura 1.4 a** Drift post annuncio **b** Rendimento in eccesso medio cumulato intorno alla data di frazionamento (*split*)



Fonte: Elton et al (2007)

## 1.5 Anomalie e inefficienze del mercato finanziario

---

### 1.5.1 Risultati e anomalie emerse dai test di efficienza

Il rapporto prezzo/utile, l'effetto (*small*) *size*, il rapporto *book-to-market*, il *momentum effect* nel breve, il *reversal effect* nel lungo periodo e l'*overreaction* del mercato sono caratteristiche emerse attraverso i test di efficienza e costituiscono situazioni empiriche di non immediata interpretazione. Le aziende con dimensione ridotta, con un basso rapporto valore contabile/prezzo di mercato e con titoli classificati come "perdenti" sembrano avere come causa comune la caduta del prezzo delle azioni nei mesi o anni precedenti. Questi effetti potrebbero essere considerati come dei segni concreti del premio al rischio in quanto provengono da azioni più rischiose, con alti valori del coefficiente  $\beta$  (associato alla dimensione più piccola o ad un basso book to market ratio), che portano a rendimenti medi più alti. Un'altra interpretazione prende spunto dall'errore sistematico delle *forecast* azionari da parte degli analisti che provoca una generalizzata inefficienza nel mercato. Deducendo, attraverso le serie storiche dei prezzi dei titoli<sup>38</sup>, i rendimenti futuri per un periodo temporale troppo ampio, si può incorrere nell'errore di sovrapprezzare le aziende rappresentati da titoli caratterizzati da una recente buona performance e, viceversa, sottoprezzare i titoli che hanno fatto conseguire scarsi rendimenti. Infine, quando il mercato si 'accorge' di questi sbagli<sup>39</sup>, si realizza il "meccanismo di inversione" dei prezzi (*reversal effect*). Quando vi è l'aggiustamento dei prezzi, in quel momento il mercato può essere considerato efficiente in forma debole o semi-forte, poiché i prezzi incorporano adeguatamente le informazioni. Tuttavia l'efficienza è, nella maggior parte dei casi, una situazione temporanea, poiché l'irrazionalità degli investitori e le distorsioni comportamentali (v. *infra* cap. 2) ne impediscono una presenza continua.

Da un punto di vista più generale, le irregolarità riscontrate nei risultati empirici possono derivare dall'utilizzo improprio di certi modelli (ad esempio il CAPM) per la determinazione dei prezzi di equilibrio, piuttosto che elaborarne altri volti a misurare l'efficienza di per sé. Dal momento che i test sull'efficienza si basano su tali modelli, specialmente per migliorare le approssimazioni delle distribuzioni dei rendimenti attesi,

---

<sup>38</sup> Si stimano i rendimenti futuri sulla base del fatto che la società sia *winner* o *loser* (vincitrice o perdente).

<sup>39</sup> Gli analisti sembrano essere troppo pessimisti per le aziende con basse prospettive di crescita (titoli *value*) e troppo ottimisti nei confronti di quelle con elevata prospettiva di crescita (titoli *growth*).

i risultati empirici appaiono compromessi a causa del fallimento dei modelli usati, piuttosto che per la non-formale e non-puntuale definizione del concetto di efficienza.

Una spiegazione alternativa di queste anomalie è da ricercare negli studi di *finanza comportamentale*<sup>40</sup> (v. *infra* cap. 2).

### **Anomalie ‘stagionali’**

In aggiunta al *January effect* associato ai rendimenti più elevati delle imprese di piccola dimensione, vi sono altre anomalie, legate alla temporalità o alle condizioni meteorologiche, che possono essere definite delle curiosità. Secondo alcuni studi le giornate soleggiate rendono le persone più ottimiste e ciò si ripercuote in scelte finanziarie operative più ottimistiche. Viceversa infatti, le ricerche empiriche di Saunders dimostrano che l'indice di borsa di New York tende a manifestare variazioni prevalentemente negative quando è nuvoloso.

Anche i giorni della settimana sembrano influenzare le performance dei mercati borsistici: ad esempio il lunedì si registrano chiusure di mercato in maggioranza negative, mentre il mercoledì e il venerdì (prima della pausa del weekend) i principali indici chiudono con segno positivo. Infine, i pattern infragiornalieri suggeriscono che l'aumento dei prezzi si verificherebbe in gran parte durante gli ultimi 30 minuti di contrattazione. Gli operatori del mercato finanziario contratta soprattutto a fine giornata poiché suppongono che i prezzi abbiano incorporato tutte le nuove informazioni giornaliere che si sono pubblicamente diffuse se il mercato è efficiente in forma semi-forte. Tuttavia alcune dinamiche operative si spiegano concretamente attraverso altre interpretazioni, che fanno riferimento alla razionalità e al comportamento degli investitori.

### **1.5.2 Fonti di inefficienza di mercato**

Per una migliore comprensione delle inefficienze che si riscontrano nelle dinamiche dei mercati finanziari, verranno brevemente proposte di seguito le descrizioni di quelle che sono le principali fonti di inefficienza di un mercato. Proprio per le conseguenze indesiderate che implicano nelle condizioni generali di un mercato, esse sono spesso

---

<sup>40</sup> La finanza comportamentale è una disciplina in ambito economico che applica concetti di psicologia cognitiva, in particolare l'aspetto della razionalità, alla ricerca empirica per comprendere come le decisioni economiche degli operatori si riflettano nei mercati finanziari.

considerate ‘assenti’ nelle ipotesi e condizioni delle principali formalizzazioni dei modelli utilizzati in economia e in finanza.

Le analisi e ricerche empiriche di mercato dimostrano che i processi che lo caratterizzano non soddisfano pienamente le condizioni e le assunzioni del mercato (finanziario) ideale. Talvolta il sistema finanziario presenta delle inefficienze che possono derivare soprattutto da: costi di transazione (e di informazione), mancanza di informazione (e di comunicazione), asimmetria informativa (con conseguenti fenomeni di *moral hazard* e *adverse selection*, v. *infra*), mancanza di congruenza tra la soddisfazione delle preferenze individuali e quelle del mercato e comportamenti non razionali degli investitori<sup>41</sup>.

### **Costi di transazione e informazione**

I mercati finanziari reali tendono a stati di equilibrio ed efficienza nel momento in cui i costi di transazione e di reperimento delle informazioni si annullano. Ma, ovviamente, questi costi non sono mai pari a zero sia per gli acquirenti sia per i venditori. Costi di transazione possono inoltre essere causati da comportamenti strategici ingannevoli (v. *infra*) e da particolari condizioni contrattuali/fiscali e di intermediazione finanziaria.

Per quanto riguarda i costi di reperimento delle informazioni, anche quelle che dovrebbero essere pubblicamente disponibili, per alcuni investitori non lo sono. Esistono comunque degli incentivi (a favore degli operatori di mercato) a recuperare le informazioni opportunamente calcolati in base ad un trade-off fra costo dell’acquisizione informativa e maggior rendimento.

Proprio perché le informazioni non sono disponibili in egual modo all’intero mercato, i prezzi non le incorporano pienamente, perciò, in ultima istanza, i mercati non sono efficienti secondo l’asserzione elaborata da Fama.

### **Mancanza di informazione e comunicazione**

Spesso le aziende non ottemperano alle richieste di informazioni da parte del mercato o attuano, come descritto in seguito, atteggiamenti e *modi operandi* poco trasparenti.

Dei metodi per contrastare l’inefficienza nei mercati finanziari dovuta a questa mancanza comunicativa sono:

---

<sup>41</sup> Su questo ultimo punto riguardante la non-razionalità degli investitori si rimanda al cap. 2.



1. il *market signalling* (comunicazione implicita tramite “segnali”<sup>42</sup>): l’individuo bene informato, dà informazioni al mercato attraverso qualche operazione (ad esempio l’acquisto di azioni proprie è considerato un buon segnale dal mercato); ovviamente l’operatore che dà il *signal* può essere considerato un *insider* in possesso di informazioni privilegiate sulla cui base attua determinate strategie;
2. il *market screening*: il soggetto meno informato (cioè l’investitore) può, per tutelarsi maggiormente, proporre e/o imporre ad una società di emettere più tipologie di contratti azionari, clausole contrattuali e la possibilità di effettuare dei controlli, in modo tale da ridurre la mancanza di comunicazione e le asimmetrie informative;
3. l’informativa (e comunicazione) obbligatoria: regole che pongono in capo alle società l’obbligo di comunicare informazioni necessarie e rilevanti per diverse strategie e decisioni di investimento; il soggetto riduce comportamenti opportunistici e vi è una garanzia di una migliore allocazione delle risorse;
4. la presenza di intermediari informativi: essi attraverso la rielaborazione dell’informativa primaria della società, producono l’informativa secondaria, importante per gli investitori del mercato poiché sono messi in condizione di capire meglio il business aziendale nella sua interezza.

### **Asimmetria informativa**

Argomentando sull’asimmetria informativa si fa spesso riferimento all’esempio del *lemons market*<sup>43</sup> per rappresentare situazioni in cui il venditore possiede più conoscenze e informazioni rispetto all’acquirente che è costretto a valutare e attuare decisioni in una condizione di incertezza, in cui si verificano distorsioni comportamentali.

In primis, secondo questo esempio, i venditori si comportano in modo opportunistico sfruttando l’asimmetria informativa e offrono prodotti scadenti senza renderlo noto alla controparte (il cosiddetto “azzardo morale” o *moral hazard*). Congiuntamente, da parte degli acquirenti che non riescono a distinguere la ‘bontà’ dei beni, si verifica il fenomeno della “selezione avversa” o *adverse selection*.

---

<sup>42</sup> La comunicazione implicita non implica una comunicazione diretta delle informazioni ma si lascia che esse si formino automaticamente nel mercato, a seguito di comportamenti e strategie gestionali.

<sup>43</sup> Un *lemons market* rappresenta un mercato in cui il venditore di un bene è posto in una situazione migliore, dal punto di vista informativo-conoscitivo, rispetto a quella dell’acquirente. Egli perciò ha più potere contrattuale e una maggiore opportunità di adottare comportamenti opportunistici, tali a sfruttare l’ ‘ignoranza’ dell’acquirente, per conseguire guadagni maggiori.

In ambito finanziario-aziendale i limoni rappresentano gli investimenti aziendali proposti dai venditori, che si traducono in titoli azionari da sottoscrivere da parte degli acquirenti. Affinché vi sia un rapporto duraturo fra società e investitori, il flusso informativo tra azienda e mercato deve essere continuo e trasparente. Se le società attuassero politiche di comunicazione finanziaria puntuali ed esaustive, precise, nel mercato si riscontrerebbe una maggiore efficienza in forma semi-forte. Tutti gli investitori sarebbero messi in grado di reperire tali informazioni e, grazie alla loro diffusione, sarebbero repentinamente e costantemente ‘scontate’ nei prezzi dei titoli azionari. Inoltre, anche la società stessa ne gioverebbe poiché verrebbe considerata, dal mercato, più affidabile, più credibile e meno rischiosa, con l’effetto di una maggiore richiesta e liquidità delle sue azioni.

### **Mancanza di congruenza tra benessere individuale e preferenze del mercato**

Un’altra condizione dell’efficienza del mercato in generale è che il soddisfacimento delle preferenze di un individuo, così come sono rivelate al mercato, ne migliori la condizione, senza tuttavia andare a peggiorare la condizione di alcun’altro. Tuttavia è perfettamente sensata la possibilità di chiedersi se la soddisfazione di una particolare preferenza, possa far stare meglio qualcuno o meno. Nelle condizioni imperfette dei mercati reali, gli individui possono essere in errore in merito a ciò che può condurre al proprio benessere, o perché non ne sono perfettamente a conoscenza o perché non sono esattamente razionali. Una condizione affinché ci sia efficienza nel mercato è che tutti gli investitori abbiano la stessa opinione in merito a come le informazioni si riflettono sui prezzi attuali e sulle distribuzioni future dei titoli, cioè siano tutti razionali nelle aspettative. Se tale condizione non è sempre soddisfatta, appare chiaramente impossibile che si possa accettare in modo assoluto la presenza dell’efficienza nei mercati finanziari, ma, piuttosto, si debba considerare di volta in volta il contesto specifico di analisi.

## **1.6 Conclusioni**

---

Sebbene vi sia una vastissima quantità di ricerche e test empirici volti a verificare la presenza e misurare l’efficienza dei mercati, la questione non è ancora risolta.

Citando le parole conclusive del lavoro di Fama [1970]:

«[...] the evidence in support of the efficient markets model is extensive, and (somewhat uniquely in economics) contradictory evidence is sparse. Nevertheless, we certainly do not want to leave the impression that all issues are closed. The old saw, "much remains to be done," is relevant here as elsewhere. Indeed, as is often the case 'in successful scientific research, now that we know we've been in the past, we are able to pose and (hopefully) to answer an even more interesting set of questions for the future. In this case the most pressing field of future endeavor is the development and testing of models of market equilibrium under uncertainty. When the process generating equilibrium expected returns is better understood (and assuming that some expected return model turns out to be relevant), we will have a more substantial framework for more sophisticated inter security tests of market efficiency.»

I risultati emersi dagli studi e dai test (v. *supra*) sono più o meno discordati con la teoria dell'efficienza del mercato. Ad esempio, gli *event study*, poco influenzati dal modello di stima dei rendimenti utilizzato, dimostrano che l'informazione viene incorporata con rapidità nelle quotazioni, sostenendo quindi l'ipotesi di efficienza del mercato; al contrario, i risultati degli studi che rilevano la presenza di anomalie di calendario nei rendimenti dei titoli sono incompatibili con l'ipotesi di efficienza.

Perché i mercati presentano tali anomalie, poco comprensibili? In che modo si può perfezionare l'analisi sull'efficienza del mercato ampliandone eventualmente i concetti teorici? Le condizioni *a priori* e assunzioni che stanno alla base della teoria sono verosimili o si discostano troppo dalla realtà? Gli investitori, cioè coloro che *costituiscono* e 'fanno funzionare' i mercati finanziari, operano davvero razionalmente? Per cercare di dare delle risposte a questi interrogativi, si illustrerà di seguito un nuovo filone di studi, una nuova teoria che vuole ampliare il concetto di efficienza del mercato, focalizzandosi soprattutto sul comportamento e sulla razionalità degli investitori.

Concludendo questo capitolo, si citano, allo scopo di suscitare eventuali riflessioni personali, le parole di S. J. Grossman [1980] (*Conjecture 6*) conosciute come "il paradosso di Grossman":

«In the limit, when there is no noise, prices convey all information, and there is no incentive to purchase information. Hence, *the only possible equilibrium is one with no information*. But if everyone is uninformed, it clearly pays some individual to become informed. Thus, there does not exist a competitive equilibrium.»

## 2. ADAPTIVE MARKETS HYPOTHESIS

---

### 2.1 Introduzione

---

Negli ultimi anni è emerso un nuovo filone teorico volto ad ampliare le teorie classiche sull'efficienza dei mercati finanziari e a proporre delle soluzioni alle discordanze tra l'evidenza empirica e le assunzioni sottostanti le teorie di portafoglio classiche.

Questa corrente di pensiero si sviluppa partendo dalle critiche mosse dalla finanza comportamentale alle EMH, in particolare alle ipotesi che riguardano le aspettative degli investitori. Come presentato nel capitolo precedente, secondo le ipotesi di efficienza di mercato e, di fatto, tutti i modelli di portafoglio<sup>1</sup> e *investment management* elaborati sulla base di queste, gli operatori di mercato sono “esseri economici” razionali, con aspettative razionali. Tuttavia è stato mostrato che essi manifestano spesso comportamenti distorti e adottano meccanismi decisionali basati su, come sostenuto dagli accademici della finanza comportamentale, *euristiche*. Esse sono degli approcci e processi mentali quasi innati che si sono evoluti in base alle caratteristiche umane e alle condizioni ambientali con lo scopo di sopravvivere, facendo scaturire azioni fisiche istintive; se applicati in contesti diversi da quelli che minacciano la sopravvivenza, ad esempio un mercato finanziario, esse possono indurre a comportamenti ed azioni sbagliati. Le euristiche rappresentano delle «regole e condotte operative che vengono usate per risolvere in modo “semplice” problemi “complessi”» (v. Rigoni, 2006). Questi concetti di finanza comportamentale<sup>2</sup> e le *behavioral biases* non saranno oggetto specifico di questo capitolo. Ciò nonostante è utile, ai fini della trattazione delle *Adaptive Markets Hypothesis*, descriverne le caratteristiche principali. Una scienza che ha profondamente influenzato la finanza comportamentale è la psicologia ed, in particolare la disciplina della neuroscienza cognitiva (v. *infra*), tant'è che vi è un ramo,

---

<sup>1</sup> I modelli di portafoglio si inseriscono nell'ambito generale della cosiddetta *portfolio theory* (teoria di portafoglio). Un portafoglio finanziario è un paniere di attività finanziarie descritto dalla lista delle quantità, o “pesi” = porzioni del patrimonio totale, investite nelle singole attività. L'obiettivo di questa teoria è quello di individuare dei portafogli ottimali in termini di rischio e rendimento, minimizzando il primo e massimizzando il secondo. La *portfolio theory* viene utilizzata nell'*asset management industry*, nelle operazioni di *hedging* (copertura) e nel *risk management*.

<sup>2</sup> Per approfondire la disciplina della finanza comportamentale Lo [2005] propone letture di H. Shefrin “*Beyond Greed and Fear*”, M. Statman “*Behavioral Finance: Past Battle and Future Engagements*”, R. Shiller, W. Sharpe e gli studi effettuati dallo psicologo D. Kahneman (premio Nobel per l'economia nel 2002) contenuti in T. Gilovich “*How We Know What Isn't So: The Fallibility of Human Reason in Everyday Life*” e R. Dawes “*Everyday Irrationality: How Pseudo-Scientists, Lunatics, and the Rest of Us Systematically Fail to Think Rationally*”.

di recente sviluppo, della letteratura delle scienze economiche che si occupa di questo campo di ricerca detto neuro-economia.

I successivi paragrafi, elaborati con lo scopo di descrivere in modo esaustivo questa nuova corrente di pensiero e le sue applicazioni, sono il risultato di un riassunto critico dei principali studi di Andrew W. Lo<sup>3</sup>, economista e direttore del MIT's Laboratory of Financial Engineering, che ha sviluppato la teoria delle *Adaptive Markets Hypothesis*. Esse si basano sui principi base della *teoria evoluzionistica* e della biologia (vista in termini di competizione, mutazione, riproduzione, adattamento, sopravvivenza e selezione naturale) applicandoli ai mercati finanziari per analizzarli e descriverne in modo più realistico le dinamiche e i comportamenti degli investitori che operano in essi. Già i primi economisti moderni T. Malthus e A. Smith furono citati da C. Darwin, il quale aveva preso spunto dai loro lavori per sviluppare il concetto di selezione naturale, all'interno della *teoria dell'evoluzione*. Sebbene vi siano delle ovvie differenze tra l'evoluzione negli ecosistemi biologici e l'evoluzione nei mercati finanziari, vi si possono riscontrare anche delle similitudini. Per questo motivo, all'interno del capitolo, si farà spesso riferimento al concetto generale di *ambiente* (differenziato poi in ambito biologico con il termine "ecosistema" o in ambito finanziario) inteso come spazio fisico e contesto generale di riferimento e di analisi, con tutte le sue caratteristiche.

Secondo questa visione evoluzionaria dei mercati finanziari, le ipotesi di mercato efficiente sono considerate incomplete nella loro formulazione, specialmente quando, nella realtà e nell'evidenza empirica, si riscontrano imperfezioni nei mercati (ad esempio costi di transazione, tasse, regolamenti istituzionali, comportamenti non razionali degli investitori, distorsioni comportamentali, ...).

Sebbene il modello delle AMH sia caratterizzato e fornisca principalmente aspetti teorici, negli ultimi due paragrafi si mostrerà che esso si concretizza anche nell'applicazione delle teorie e pratiche finanziarie classiche di portafoglio (in particolare dell'*asset allocation*) e dell'*investment management*.

---

<sup>3</sup> Per il percorso professionale Di A. Lo si faccia riferimento alla seguente pagina: [http://mitsloan.mit.edu/faculty/detail.php?in\\_speqno=41207](http://mitsloan.mit.edu/faculty/detail.php?in_speqno=41207).

## 2.2 Controversia tra la teoria delle EMH e la finanza comportamentale

---

La teoria delle ipotesi di mercato efficiente è stata successivamente applicata in altri contesti di mercato con differenti caratteristiche e per altre tipologie di beni non commerciabili come, ad esempio, il mercato del capitale umano. Tuttavia, il quadro teorico generale delle condizioni era sempre il medesimo: i singoli investitori elaborano in modo razionale le loro aspettative, i mercati aggregano le informazioni efficientemente e l'equilibrio nei prezzi riflette tutto il set informativo disponibile.

La versione attuale delle implicazioni teoriche delle EMH può essere descritta in modo sintetico dalle cosiddette “tre P” del *Total Investment Management*: prezzi, probabilità e preferenze (o altresì propensioni). Esse hanno origine dal *principio della domanda e dell'offerta*, cioè da una delle teorie di base e fondamentali dell'economia moderna, in particolare della microeconomia. Questo principio afferma che il prezzo e la quantità scambiata di un bene qualsiasi sono determinati dall'intersezione delle curve di offerta e domanda in cui si raggiunge un equilibrio dato da una combinazione prezzo-quantità che soddisfa sia i produttori che i consumatori. Anche in questo semplice esempio si ritrovano gli elementi di base della finanza moderna: la curva di domanda rappresenta le preferenze degli investitori, soggette a vincoli di budget causati da costi o altri fattori (ad esempio reddito disponibile, costi di prestito del denaro, requisiti contrattuali, ...); la curva di offerta è l'aggregato degli output dei singoli produttori che derivano dall'ottimizzazione delle preferenze degli imprenditori, soggette anch'esse a vincoli di limitatezza di risorse e costi di produzione (ad esempio costi dei materiali, salari, ...). La probabilità influenza entrambi, consumatori e produttori, poiché essi devono pianificare la produzione e l'acquisto di beni in un determinato arco temporale e in un contesto di *incertezza*<sup>4</sup>.

Applicando questa teoria in ambito finanziario si dimostra che l'interazione fra prezzi, preferenze e probabilità, determina la solidità e credibilità delle basi delle teorie finanziarie moderne. I modelli di *pricing* di *asset* finanziari dimostrano come questi tre elementi determinino in modo simultaneo un equilibrio generale di mercato in un contesto incerto, in cui gli investitori agiscono razionalmente per ottimizzare il loro

---

<sup>4</sup> Incertezza che influenza il reddito disponibile, i costi, le risorse disponibili e le condizioni generali del mercato.

stato. Tuttavia può essere messo in discussione il fatto che prezzi, probabilità e preferenze siano fondamentali in tutte le attività decisionali.

### **2.2.1 Distorsioni comportamentali (*behavioral biases*)**

La teoria delle “tre P” apportò implicazioni teoriche e pratiche che furono testate negli anni. Ad esempio si volle verificare come i prezzi di certe attività finanziarie riflettessero pienamente le varie tipologie di informazioni; altri test esaminarono la presenza e l’influenza delle probabilità implicite nei prezzi. Ma la critica più dura verso le ipotesi di mercato efficiente, si sviluppò dagli studi condotti sulle *preferenze* (e propensioni) e sul *comportamento* degli individui.

L’approccio classico per modellizzare le preferenze degli investitori parte dal presupposto che essi ottimizzino le funzioni di utilità attesa sotto determinati parametri, ad esempio, un’avversione al rischio costante nel tempo. Tuttavia, vari psicologi ed economisti sperimentali hanno osservato molte divergenze rispetto l’ipotesi suddetta, dovute alla presenza di distorsioni comportamentali che prevalgono nell’attività decisionale umana, svolta in condizioni di incertezza. Queste decisioni portano infine, a risultati non ottimali e talvolta a “stati economici” non desiderabili dal punto di vista di un investitore. Le distorsioni comportamentali, o *behavioral biases* più comuni sono le seguenti<sup>5</sup>:

1. *overconfidence*: l’investitore risulta molto fiducioso delle sue capacità, manifesta una notevole presunzione di riuscire a battere il mercato e di averne il controllo;
2. *overreaction* (v. cap. 1): la reazione degli investitori alla diffusione di nuove informazioni nel mercato risulta essere eccessiva;
3. *loss aversion* (avversione alla perdita): meccanismo mentale per cui una perdita provoca una diminuzione dell’utilità che risulta superiore, in valore assoluto, all’aumento dell’utilità prodotto da un guadagno di pari entità;
4. *mental accounting* (contabilità mentale): le scelte economiche vengono effettuate attraverso un sistema di valutazioni mentali (che distorce la valutazione dei guadagni e delle perdite) e le modalità con le quali gli individui confrontano le varie alternative possibili rispondono all’ipotesi di *topical*

---

<sup>5</sup> La traduzione italiana di alcuni di questi termini specifici non viene proposta, perché non è utilizzata in ambito accademico.

*account* (metodologia di svolgere operazioni contabili in funzione del mercato o del bene in oggetto) e di *framing effect* (dipendenza dell'utilità dal contesto di riferimento);

5. *regret* (rimpianto): rimpianto di omissione o commissione di una determinata azione che doveva o non doveva essere svolta (il rimpianto di un'omissione provoca meno frustrazione rispetto a quello di una commissione).

Tali distorsioni osservate nei modi di agire degli investitori portano ad affermare che essi non operano ed effettuano scelte in modo razionale ma spesso manifestano comportamenti 'potenzialmente disastrosi' dal punto di vista finanziario.

Per descrivere in maniera più esaustiva le critiche mosse dagli accademici della finanza comportamentale alle teorie dell'efficienza di mercato e per comprendere meglio in che cosa consistono alcune delle behavioral biases elencate vengono di seguito forniti tre esempi riguardanti studi e test psicologici (v. Lo, 2005).

J. Russo e P. Shoemaker (1989) elaborarono e condussero uno studio in cui erano proposte 10 domande di argomenti generali a cui si doveva dare una risposta numerica, composta dai limiti inferiori e superiori in cui rientrava, con un intervallo di confidenza del 90%, la cifra corretta. Se i partecipanti quindi, compilavano in modo corretto il test, avrebbero dovuto sbagliare nel 10% dei casi, quindi dare 9 risposte corrette (9 intervalli) su 10. Per un campione di 1000 individui, meno dell'1% diede 9 risposte corrette e la maggior parte di essi sbagliò circa da 4 a 7 risposte. I due studiosi conclusero affermando che gli individui sono molto più fiduciosi della loro conoscenza di argomenti di carattere generale rispetto a ciò che effettivamente possono conoscere, quindi sono generalmente caratterizzati dalla *overconfidence*.

Un secondo esempio riguarda un altro aspetto della stima della probabilità: due psicologi, A. Tversky e D. Kahneman nel 1982, proposero un questionario in cui gli individui avevano il compito di assegnare delle probabilità a certi eventi basandosi su quanto essi fossero rappresentativi rispetto alla classe generale dei fenomeni presi in considerazione. La questione posta ad un campione di 86 individui fu la seguente:

«Linda is 31 years old, single, outspoken and very bright. She majored in philosophy. As a student, she was deeply concerned with issues of discrimination and social justice, and also participated in antinuclear demonstrations.

Please check-off the most likely alternative:



- Linda is a bank teller.
- Linda is a bank teller and is active in the feminist movement.»

Il 90% degli intervistati scelse la seconda opzione come più probabile, escludendo la cosiddetta “probabilità *a priori*” dell’intera situazione descritta, ossia il fatto *empirico* che le donne di professione banchiere sono più numerose rispetto a coloro che svolgono congiuntamente attività di banchiere e sono femministe.

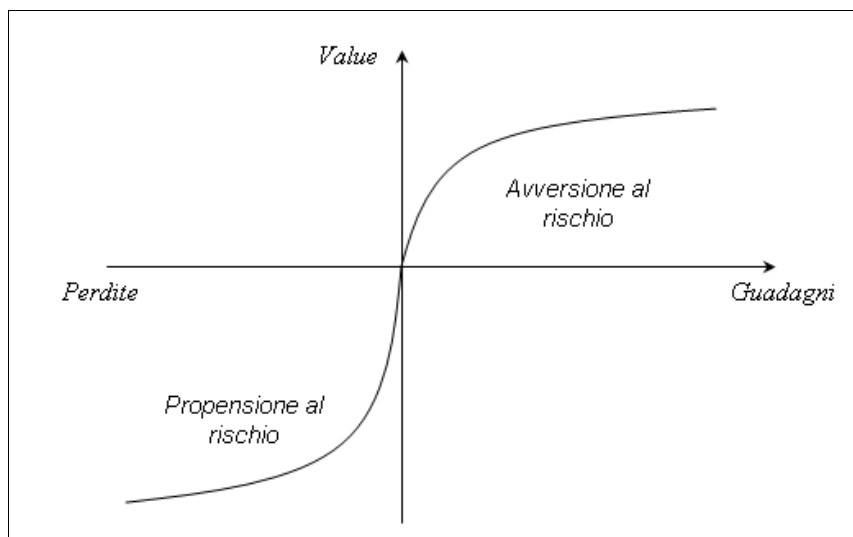
Conseguentemente a questo test i due studiosi conclusero che, se per un determinato scenario i dettagli forniti aumentano, la probabilità di corretta identificazione dello stesso (la probabilità *a priori*) diminuisce costantemente, ma la sua *rappresentatività* (cioè la probabilità soggettiva che viene attribuita dall’intervistato) aumenta. Spesso i dettagli influenzano gli individui nell’assegnare in modo più ‘corretto’ la probabilità di certi eventi, cioè non in base agli assiomi della teoria della probabilitistica (è più probabile che una persona sia banchiere o congiuntamente banchiere e femminista?, *probabilità a priori*), ma in base alla loro *rappresentatività* (le probabilità a posteriori sono distorte poiché si attribuisce maggior peso ai dettagli e si ragiona per mezzo di ‘luoghi comuni’, cioè attraverso le euristiche, meccanismi mentali automatici, v. *supra* 2.1).

Questa distorsione comportamentale viene rilevata nell’attività di analisi di scenario per la gestione del rischio, in cui spesso le performance dei portafogli vengono simulate in specifici scenari di mercato per rendere l’analisi più reale e intuitiva. Spesso l’aggiunta di dettagli e peculiarità va a compromettere le decisioni finali poiché si sovrastima la probabilità di questi scenari, sottostimando quella riguardante le caratteristiche principali e generali del contesto in cui si elabora l’analisi.

Il terzo esempio riguarda la *propensione al rischio* e trae spunto da un esperimento condotto nel 1979 dagli stessi Tversky e Kahneman. Supponiamo ci siano due opportunità di investimento *A* e *B* per le quali, a parità di investimento, *A* rende \$240.000 e *B* è un biglietto della lotteria che fa vincere 1 milione di \$ nel 25% dei casi e \$0 nel rimanente 75%. Qual è la soluzione di investimento preferibile? Ovviamente dipende dalle preferenze e propensioni al rischio individuali. La scelta per un guadagno sicuro, quindi la soluzione di investimento *A*, viene optata da un soggetto con un

comportamento caratterizzato da *avversione al rischio*<sup>6</sup>. Si considerino altre due opportunità, *C* e *D*: *C* determina una perdita sicura di \$750.000 e *D* è un biglietto della lotteria che offre \$0 nel 25% dei casi e determina una perdita di \$750.000 nel 75% dei casi. In questo caso, la maggior parte delle persone preferisce la soluzione *D*, nonostante sia la più rischiosa in termini di variabili. Quando una decisione finanziaria implica solamente perdite potenziali o certe, gli investitori attueranno comportamenti denotati dalla propensione al rischio<sup>7</sup>. La Figura 2.1 descrive la *value function* (funzione di valore, che sostituisce la funzione di utilità) cioè una funzione sulla cui base un individuo effettua delle scelte in un contesto aleatorio e per le quali si attribuiscono dei valori calcolati rispetto alla probabilità che esse si verifichino. Essa è caratterizzata dalla differenza tra avversione al rischio (concavità della curva) e propensione al rischio (convessità della curva) con riferimento relativamente a guadagni o perdite.

**Figura 2.1** *Value function* utilizzata nella teoria del prospetto



Il processo decisionale di un individuo non è così immediato, ma viene influenzato da molti aspetti esterni che influenzano i meccanismi interpretativi, non più basati solamente su valutazioni razionali. Considerando ciò, le possibilità di guadagno e perdita dipendono altresì dalle condizioni di scelta, cioè da come il contesto di selezione viene presentato all'individuo. Se questo viene presentato in modo differente, può condurre a scelte diverse, non 'convenzionali' e, conseguentemente, ad una posizione e

<sup>6</sup> Un individuo avverso al rischio preferirà una quantità di guadagno certa, seppur minore, rispetto ad una aleatoria e non certa.

<sup>7</sup> Un individuo propenso al rischio preferisce una quantità aleatoria, che non certamente si verificherà (solitamente una perdita) rispetto ad una quantità certa.

andamento diversi della value function, (si parla in questo caso di *effetto framing*<sup>8</sup>). Un aspetto ulteriore da evidenziare è la maggiore pendenza della funzione (della curva) nel dominio delle perdite: esse hanno un ‘peso’ maggiore nella mente degli investitori (come dice un detto inglese: *losses loom larger than gains*, cioè “le perdite hanno un’incombenza maggiore rispetto ai guadagni”), per cui gli effetti della propensione al rischio sulla value function sono amplificati.

Il fatto che vengano adottati comportamenti avversi e propensi al rischio in base alla possibilità e alla maggior probabilità di guadagni o perdite, può portare ad attuare scelte finanziarie non corrette. Considerando l’esempio precedente: la combinazione delle opportunità *A-D* porta ad avere un possibile guadagno di \$240.000 con probabilità del 25% e una possibile perdita di \$760.000 con probabilità del 75%; la combinazione *B-C* porta ad avere un possibile guadagno di \$250.000 con probabilità del 25% e una possibile perdita di \$750.000 con probabilità del 75%. Dal punto di vista probabilistico, le due combinazioni sono identiche, mentre dal punto di vista finanziario, la combinazione *B e C* assicura un guadagno maggiore di \$10.000 e una perdita minore di \$10.000 rispetto alla combinazione *A-D*. A parità di situazione, la soluzione *B-C* apporterebbe un profitto sicuro di \$10.000. Molti studiosi sostennero che tale esempio era mal posto poiché le differenti combinazioni erano illustrate in modo sequenziale e non simultaneo. Considerando singoli mercati finanziari, la scelta ottimale dipenderà dalle propensioni personali degli operatori, ma se le singole decisioni vengono inserite in un contesto di mercati finanziari globalmente collegati, gli effetti possono essere differenti. In questo caso esiste una risposta corretta e una sbagliata, una combinazione ottimale e una ‘scarsa’; tuttavia, l’evidenza empirica dimostra che spesso vengono fatte scelte di investimento errate.

Gli economisti comportamentali sostengono infatti che i modelli quantitativi basati sulle ipotesi di mercato efficiente (cioè modelli costruiti su scelte razionali) sono spesso sbagliati e poco realistici. Le *behavioral biases* descritte influenzano il comportamento di investitori e operatori di mercato che non sarà quindi razionale, inoltre, le strategie elaborate e le decisioni finanziarie prese sotto tali distorsioni comportamentali, possono arrecare danno all’intero sistema finanziario.

---

<sup>8</sup> In sociologia e psicologia, con il termine *framing* si fa riferimento ad un processo di influenza selettiva su come un soggetto percepisce parole e frasi. Il framing determina il contesto su cui si formula l’interpretazione di un certo fatto o situazione.

### 2.2.2 Repliche dalla finanza razionale

I sostenitori della teoria delle ipotesi di mercato efficiente replicarono a queste critiche dichiarando che il verificarsi di distorsioni comportamentali che portano a inefficienze avviene di tanto in tanto, non continuamente, ed in modo limitato, poiché vi è la presenza di ‘forze contrastanti’ che sfruttano il vantaggio derivante da queste inefficienze. Al fine di esemplificare questi limiti agli effetti provocati dalle behavioral biases si può fare riferimento al cosiddetto *Dutch Book* nel quale si dimostra che i calcoli probabilistici fatti in modo irrazionale da alcuni operatori nel mercato, assicurano un profitto certo agli arbitraggisti più attenti. Per un’esemplificazione concreta di questo concetto, si prenda in considerazione l’evento  $E$  “l’indice S&P 500 perderà il 5% o più il prossimo lunedì” e si supponga che un certo numero di investitori abbia delle convinzioni probabilistiche sbagliate, cioè che l’evento  $E$  si verificherà con una probabilità del 50% e che non si verifichi con una probabilità del 75%. Sebbene questa formulazione numerica è errata, poiché non rispetta uno degli assiomi della teoria probabilistica<sup>9</sup>, diversi studi ne hanno documentato la frequente presenza nei ragionamenti individuali di, seppur esperti, operatori finanziari.

Se si definiscono due scommesse,  $B_1$  (punta sul verificarsi dell’evento  $E$ ) e  $B_2$  (punta sul non verificarsi di  $E$ ) basate su queste opinioni si avrà:

$$B_1 = \begin{cases} \$1 & \text{se } E \text{ si verifica} \\ -\$1 & \text{se } E \text{ non si verifica} \end{cases} \quad \text{e} \quad B_2 = \begin{cases} \$1 & \text{se } E \text{ non si verifica} \\ -\$3 & \text{se } E \text{ si verifica} \end{cases}$$

Se si invertissero le due scommesse, (cioè in  $B_1$  si subisce una perdita se l’evento si verifica (e viceversa) e in  $B_2$  si subisce una perdita se l’evento non si verifica (e viceversa)), cambiandone altresì le somme di denaro coinvolte si avrà:

$$B_1 = \begin{cases} -\$50 & \text{se } E \text{ si verifica} \\ \$50 & \text{se } E \text{ non si verifica} \end{cases} \quad \text{e} \quad B_2 = \begin{cases} -\$25 & \text{se } E \text{ non si verifica} \\ \$75 & \text{se } E \text{ si verifica} \end{cases}$$

Con riferimento all’ultima coppia di scommesse, se l’evento  $E$  si verifica, la scommessa  $B_1$  farebbe perdere \$50, mentre ci sarebbe un guadagno di \$75 dalla scommessa  $B_2$  per un profitto netto di \$25; la medesima somma finale si otterrebbe anche se l’evento  $E$

---

<sup>9</sup> Dati due eventi  $A$  e  $B$ , complementari (e quindi esclusivi ed incompatibili), la somma tra probabilità che si verifichi l’evento  $A$ , definita come  $P(A)$ , e quella del suo evento complementare  $B$ , definita  $P(B)$ , è data da:  $P(A) + P(B) = P(A \cup B) = 1$ .

non si verificasse (vincita di \$50 in  $B_1$  e perdita di \$25 in  $B_2$ ). I \$25 rappresentano un *free lunch* per un arbitraggista che guadagna alle spalle di coloro che elaborano percentuali di probabilità in modo distorto. Questo termine, la cui traduzione significa “pranzo gratuito”, descrive i profitti che derivano dagli arbitraggi, ossia dalle strategie di compravendita di strumenti e titoli finanziari effettuati principalmente da *hedge fund* (fondi speculativi) e banche di investimento che sfruttano *mispricing* nel mercato (v. *supra* 1.4.2).

I sostenitori delle EMH affermano che tali disequilibri nei prezzi dei titoli finanziari sono temporanei e le opportunità di arbitraggio sono disponibili finché, riprendendo l'esempio precedente, le *convinzioni probabilistiche distorte* degli operatori di mercato (che rappresentano un caso di behavioral bias), non si riallineano con gli assiomi base della teoria della probabilità. Generalizzando, le forze di mercato sono sufficientemente forti da superare ogni effetto provocato da distorsioni comportamentali o, ugualmente, esse non sono così efficaci da riuscire ad ‘annullare’ la capacità dei più attenti arbitraggisti che sanno cogliere le opportunità di profitto non appena si manifestano nel mercato. Questo fatto non può essere dimostrato formalmente con una teoria e anche un'eventuale analisi empirica richiederebbe un'analisi dettagliatamente articolata. La letteratura accademica si è perciò limitata ad elaborare ‘semplici’ paragoni quantitativi e qualitativi tra forze economiche razionali ed effetti causati dalle distorsioni comportamentali tipiche della maggior parte degli investitori, focalizzando l'analisi soprattutto su tutta quella serie di particolari episodi di crisi, e bolle che hanno caratterizzato i mercati finanziari fin dal XVII secolo<sup>10</sup>. Questi singoli eventi dimostrano il fatto che l'irrazionalità diffusa e ‘contagiosa’ può prevalere sulla razionalità e sull'efficienza del mercato per archi temporali anche molto estesi.

### **2.2.3 Differenze fra discipline economiche e psicologiche: la *physics envy* dell'economia**

Prima di approfondire in che modo viene proposto un accordo tra i concetti della teoria delle EMH e le critiche mosse dal ramo accademico della finanza comportamentale è

---

<sup>10</sup> Ad esempio, dal 1634 al 1636 ci fu la “*tulip mania*” in Olanda, che provocò un innalzamento insensato del prezzo dei bulbi del tulipano e un successivo crollo con conseguente ‘panico’ finanziario. Altri esempi di episodi finanziari particolari sono: il crollo e la crisi della Borsa statunitense del 1929 e dell'ottobre 1987, la bolla immobiliare giapponese degli anni '90, il collasso del Long-Term Capital Management e di altri fondi speculativi a reddito fisso nel 1998, la bolla tecnologica statunitense del 2000.

necessario comprendere i motivi originari che hanno scaturito questo dibattito. Una prima spiegazione è da ricercare nelle differenze basilari molto marcate, riguardanti gli aspetti culturali e sociologici del comportamento umano dal punto di vista dell'economia da un lato e della psicologia dall'altro, delle quali si descrivono di seguito alcune diversità metodologiche. Le principali caratteristiche della psicologia (dal punto di vista di un economista) possono essere sintetizzati nel seguente elenco (v. Lo, 2004):

1. la psicologia è basata innanzitutto su osservazioni ed esperimenti;
2. i campi sperimentali sono comuni a discipline differenti (per gli studiosi);
3. l'analisi empirica può spesso condurre allo sviluppo di nuove teorie;
4. ci sono molte teorie comportamentali;
5. il comune consenso rispetto ad una teoria non è essenziale e necessario (all'interno della letteratura e in ambito accademico possono 'convivere' molte correnti di pensiero e di opinione valide, circa una teoria).

Esse contrastano nettamente con i medesimi aspetti riguardanti le scienze economiche:

1. l'economia è basata principalmente su teorie ed astrazioni;
2. il campo sperimentale non è lo stesso;
3. le teorie portano alla necessità di elaborare analisi empiriche;
4. ci sono poche teorie comportamentali;
5. il comune consenso rispetto ad una teoria ha un 'peso' rilevante in ambito accademico.

Questi punti descrivono le divergenze essenziali fra economia e psicologia. Ad esempio, sebbene siano occasionalmente proposte nuove teorie comportamentali, la maggioranza degli psicologi accademici conduce le proprie ricerche effettuando esperimenti e test; al contrario, il contesto professionale-accademico ed editoriale dell'economia e della finanza si interessa soprattutto sui nuovi studi riguardanti teorie tradizionali e relative ricerche empiriche, dando poco spazio e poca evidenza al filone della cosiddetta "economia sperimentale". Anche in ambito scolastico-universitario si è riscontrata per molti decenni, la medesima differenziazione di 'trattamento': durante i vari corsi universitari si illustravano soprattutto le teorie microeconomiche e finanziarie

classiche<sup>11</sup> che non comprendevano la disciplina dell'*economia comportamentale*. Basti pensare che fino a qualche decina di anni fa, studi e ricerche che proponevano modelli di mercati finanziari caratterizzati da opportunità di arbitraggio non sempre suscitavano particolare interesse e venivano messi in secondo piano.

Queste limitazioni formali alle teorie economiche<sup>12</sup> probabilmente derivano dagli effetti provocati dall'importanza e dalla conseguente notorietà che ebbe la tesi di dottorato di Paul Samuelson, intitolata "Foundations of Economic Analysis" (1947), divenuta successivamente la base, il punto di partenza dell'analisi economica moderna. Egli volle sviluppare un quadro teorico matematico che potesse essere applicato a diversi contesti teorici economici contraddistinti, però, dai medesimi aspetti principali. Il filo conduttore e l'argomento centrale nel lavoro di Samuelson è costituito dall'idea di applicare principi propri del *metodo scientifico*<sup>13</sup> all'analisi economica (ad esempio come nell'approccio della *fisica moderna*<sup>14</sup>). A tal proposito può essere utile riportare alcune righe scritte nella sua tesi (v. Lo, 2004):

«Perhaps most relevant of all the genesis of "Foundations", Edwin Bidwell Wilson (1879-1964) was at Harvard. [...] He was a mathematical physicist, a mathematical statistician, a mathematical economist, a policy math who had done first-class work in many fields of the natural and social sciences. I was perhaps his only disciple [...] I was vaccinated early to understand that economics and physics could share the same formal mathematical theorems (Euler's theorem on homogeneous functions, Weierstrass' theorems on constrained maxima, Jacobi determinant identities underlying Le Chatelier reactions, etc.), while still not resting on the same empirical foundations and certainties.»

A seguito del contributo di Samuelson, la letteratura economica e finanziaria impostò la ricerca accademica principalmente attraverso una *metodologia deduttiva*, cioè partendo da certi postulati e ipotesi di base (ad esempio la massimizzazione dell'utilità,

---

<sup>11</sup> Esempi di queste teorie classiche sono: la teoria dell'utilità attesa, le aspettative razionali, l'ottimizzazione di portafoglio, il CAPM, modelli di *pricing*, modelli di equilibrio generale.

<sup>12</sup> Limitazioni formali intese come il fatto che le teorie economiche classiche si basano su pochi modelli generali (modificati poi in base all'argomento trattato) e sulle stesse assunzioni.

<sup>13</sup> Con l'espressione "metodo scientifico" si fa riferimento ai singoli metodi induttivi e deduttivi di indagine scientifica. In sintesi, il metodo induttivo consiste nelle seguenti fasi: osservazione - esperimento - elaborazione dei dati e delle misure - definizione di un modello fisico - elaborazione matematica del modello - formalizzazione della teoria. Il metodo deduttivo, invece, si svolge nel seguente ordine di azioni: formulazioni di ipotesi - previsioni di eventi e conseguenti effetti - osservazione sull'accadimento di tale evento - se l'evento accade, la teoria non viene confermata. Nella trattazione si considera la tipologia deduttiva del metodo scientifico.

<sup>14</sup> Da questo nasce il concetto di "*physics envy*" dell'economia: cioè il fatto che l'economia, seppure sia una scienza sociale, quindi inesatta, ha da sempre fatto propri metodi e procedimenti logici-formali tipici di vari rami della fisica.

l'uguaglianza tra domanda e offerta, ...), applicandoli poi a specifici contesti e teorie, si derivano implicazioni ed effetti.

In riferimento alla controversia tra teoria dell'efficienza di mercato ed economia comportamentale, si vuole evidenziare il fatto che il concetto economico di "aspettative razionali" e, di conseguenza, gli innumerevoli sviluppi teorici e applicazioni successivi, sono interamente basati sul singolo principio della *massimizzazione dell'utilità attesa*. I sostenitori delle EMH affermano la superiorità delle teorie sull'utilità, sull'equilibrio generale e sul principio di non-arbitraggio; viceversa, i critici mettono in luce i risultati sperimentali che sembrano contraddire tali teorie.

Lo stesso Samuelson, tuttavia, nell'introduzione di "Foundations", manifestò l'idea che un approccio totalmente deduttivo all'analisi economica presentava dei limiti. Nell'introduzione egli dichiara, quasi sotto forma di un avvertimento (anche rispetto a ciò che è stato precedentemente riportato), che solo una piccola parte di studi e ricerche economici è stata derivata attraverso teoremi operativamente significativi<sup>15</sup>.

Anche a distanza di quasi sessant'anni, queste idee possono considerarsi tuttora valide. Le teorie economiche implicano anche interazioni fra soggetti umani, che sono molto più complessi di corpi e oggetti in natura governati dalle leggi fisiche. Un metodo esclusivamente deduttivo non è sempre appropriato per condurre un'analisi economica. Nonostante le continue considerevoli scoperte della fisica moderna, essa è basata su dei sistemi che sono, per natura, spesso più semplici rispetto a quelli economici. Inoltre i principi basilari della fisica hanno raramente una corrispondenza nella scienza economica. Perciò il metodo deduttivo utilizzato in contesti teorici basati su pochi postulati di base risulta più adeguato.

Dal momento che i comportamenti umani non sono sempre ben prevedibili, *euristici* e *adattivi*, elaborare in un modello molte interazioni tra diversi soggetti è molto più complicato rispetto a modellizzare il comportamento di un singolo individuo, anche se, talvolta, anche un singolo comportamento risulta imprevedibile e difficilmente 'modellizzabile'.

---

<sup>15</sup> Questo era causato dai preconcetti metodologici scorretti, cioè il fatto che molte leggi economiche si basano su assunzioni *a priori*, senza tenere in considerazione l'evidenza empirica di aspetti comportamentali umani.



## 2.3 Il contributo delle neuroscienze cognitive

---

Per completare il contesto generale in cui si inseriscono le distorsioni comportamentali che influiscono sulla razionalità (caratteristica fondamentale della teoria delle ipotesi di efficienza di mercato), è utile fornire una breve descrizione riguardante alcuni recenti studi delle neuroscienze cognitive.

La neuroscienza cognitiva è un ramo delle neuroscienze, sviluppatosi all'inizio degli anni Ottanta, che si occupa dell'analisi delle basi cerebrali del pensiero con lo scopo di mettere in luce i cambiamenti anatomici del cervello associati a mutamenti di matrice evolutiva<sup>16</sup>.

Le ultime scoperte delle neuroscienze cognitive hanno portato ad una generale riformulazione dei modelli psicologici e neuropsicologici dell'attività decisionale, studiando il collegamento tra comportamento di un soggetto e funzioni cerebrali.

Per condurre queste ricerche sono stati utilizzati importanti strumenti di analisi, creati grazie agli sviluppi dell'ingegneria biomedica, come la PET (*Positron Emission Tomography*, tomografia ad emissione di positroni) e la fMRI (*functional Magnetic Resonance Imaging*, risonanza magnetica per la visualizzazione funzionale)<sup>17</sup>. Attraverso questi esami vengono scattate, in tempo reale, le immagini del cervello di un individuo mentre è intento a svolgere determinati azioni o compiti richiesti, senza alcuna invasività o interferenza con le normali funzioni cerebrali. In base alla tipologia di attività svolta, si verifica come essa incida o meno sull'attivazione di specifiche zone dell'encefalo, osservando in particolare la quantità di sangue concentrata in quella zona prima, durante e dopo lo svolgimento dei compiti richiesti.

---

<sup>16</sup> La psicologia, grazie alle nuove tecnologie, ha sviluppato in sé un ramo chiamato neuroscienze: la collaborazione tra neuro-scienziati e psicologi ha dato vita alla *neuroscienza cognitiva*. La letteratura riguardante questo nuovo filone di ricerca non può essere non considerata da un qualsiasi studioso di economia e finanza comportamentale. Tra le letture consigliate in merito, Lo [2005] cita:

- A. Damasio, *Descartes' Error: Emotion, Reason, and the Human Brain*, 1994 (approfondimento di ricerche cliniche sul ruolo dell'emozione sulla razionalità, di neuro-anatomia e di neuro-psicologia);
- R. Restak (neurologo clinico), *The New Brain: How the Modern Age is Rewiring Your Mind*, 2003;
- V. Ramachandran (neuro-scienziato), *A Brief Tour of Human Consciousness*, 2004;
- M. Gazzaniga, T. Heatherton, *Psychological Science: Mind, Brain and Behavior*, 2003.

<sup>17</sup> Entrambi sono strumenti di diagnostica medica tipici della medicina nucleare; sono utilizzati per produrre bio-immagini. La PET fornisce informazioni di tipo fisiologico, mentre la MRI informazioni di carattere morfologico. Si rimanda il lettore a specifiche letture di carattere scientifico per comprendere il procedimento tecnico di tali strumenti.

Queste strumentazioni rivoluzionarono notevolmente tutta la ricerca psicologica, poiché diedero la possibilità di indagare e analizzare i connotati neuropsicologici e fisici di *processi cognitivi e schemi comportamentali*.

Riportando l'attenzione su quelli che sono gli argomenti principali, oggetto di questa tesi, è stato osservato che l'attività decisionale finanziaria è caratterizzata da un legame particolare tra il comportamento razionale e l'*emotività*. Essi erano considerati aspetti psicologici-comportamentali opposti e quindi senza alcuna connessione neuropsicologica dal con riferimento ai meccanismi di ragionamento logico, ma si dimostrò che ciò non era affatto vero<sup>18</sup>. Le emozioni rivestono un ruolo fondamentale nella razionalità umana e ne sono il complemento. A. W. Lo e D. V. Repin [2002] riscontrano, in modo sperimentale, il fatto che le variabili psicologiche associate al sistema nervoso autonomo sono strettamente correlate con singoli eventi di mercato, anche negli operatori con più esperienza nel ruolo. L'istintività e l'emotività sono fattori significativi durante l'attività di gestione di rischi finanziari e di trading; inoltre il saper controllare le proprie emozioni è una capacità molto importante per un operatore finanziario, specie durante situazioni stressanti e in particolari condizioni di mercato. Emozioni e sentimenti sono la base del meccanismo mentale di "premio-punizione" che porta ad adottare un determinato comportamento o modo di agire conveniente rispetto ad un'analisi di costi e benefici generati dalle relative azioni. L'emotività, da un punto di vista evolutivo, rappresenta una categoria psicologica fondamentale per l'apprendimento, e il successivo miglioramento, del genere umano (e anche di quello animale, in generale), dall'*ambiente* circostante e dagli eventi ed esperienze passati. Ad esempio, sentimenti come la *paura* o l'*avidità*, sono tra le principali cause dell'eliminazione temporanea della razionalità nell'attività decisionale e di pensiero; queste due emozioni possono essere viste come tratti rappresentativi delle 'forze evolucionistiche' che consentono la sopravvivenza dell'individuo (per una descrizione più dettagliata di questi aspetti v. *infra*), e si manifestano poiché, in esso, si innesca l'istinto di sopravvivenza.

---

<sup>18</sup> Nel 1994 A. Damasio (v. Lo, 2005), osservò che un paziente, al quale era stato rimosso chirurgicamente il lobo frontale del cervello a causa di un tumore, perse la facoltà di provare emozioni, ma, allo stesso tempo, non era completamente in grado di attuare scelte razionali; anche nelle semplici faccende quotidiane egli si comportava prendendo decisioni in modo irrazionale.

### 2.3.1 *Triune brain model*

La letteratura accademica neuro-scientifica elenca inoltre, altri fattori causanti l'irrazionalità umana. Innanzitutto il cervello non è solamente un insieme di terminazioni nervose e neuroni; esso è formato da molte 'parti' (aree) contraddistinte da specifiche funzioni e schemi comportamentali. Le principali aree cerebrali che formano il modello di *triune brain*<sup>19</sup> (cervello trino) raffigurate nella Figura 2.2 a, sono tre e si riferiscono rispettivamente ai cervelli dei rettili, dei mammiferi e degli ominidi (v. Figura 2.2 b):

1. tronco cerebrale (*brainstem*): situato in cima alla colonna vertebrale, ha la funzione di controllo delle più importanti funzioni corporali vitali, come la respirazione e il funzionamento dell'apparato circolatorio, esso rappresenta il cervello rettiliano;
2. sistema limbico (*limbic system*): formato da varie sotto-aree della parte centrale dell'encefalo, è responsabile delle emozioni, degli istinti e delle interazioni socio-comportamentali, esso rappresenta il cervello paleo-mammaliano;
3. corteccia cerebrale (*cerebral cortex*): la parte più esterna che 'riveste' l'encefalo, che consente lo svolgimento di attività di pensiero complesse e di elaborazione di idee astratte (ragionamento logico, apprendimento, abilità e attività linguistiche-matematiche-musicali); esso rappresenta il cervello neo-mammaliano.

Secondo il modello *triune brain* si sostiene che il cervello umano, così come rappresentato in Figura 2.2 a, sia il risultato di un *processo evuzionistico*: inizialmente esistono solo funzioni di sopravvivenza, poi emergono gli aspetti comportamentali dovuti alle interazioni sociali tra individui e, da ultime, si sono sviluppate le capacità cognitive e intellettive proprie dell'uomo.

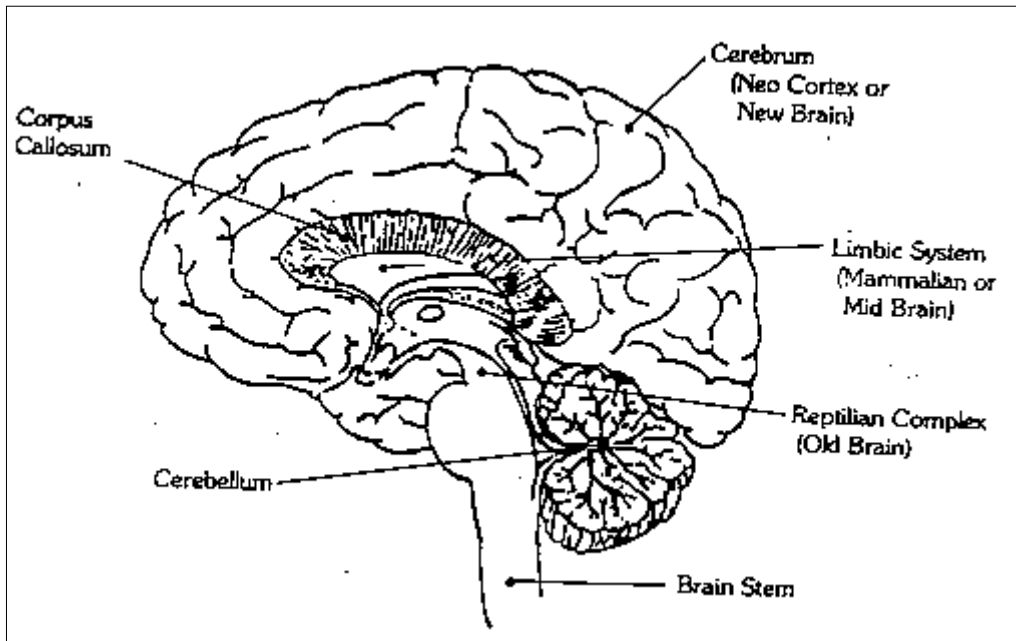
---

<sup>19</sup> Il modello *Triune Brain*, cervello trino ("tre cervelli in uno"), è stato elaborato negli anni Ottanta da P. D. MacLean, medico esperto di neuroscienze. Secondo MacLean nel cervello umano sono presenti tre diverse aree adibite a tre diverse funzioni che egli esprime per mezzo di "operatori":

- *R-complex*: in esso si svolgono le funzioni riferiti a bisogni e istinti insiti nell'uomo (alcuni degli operatori rettiliani sono: spaziale, sequenziale, temporale, sessuale, territoriale, gerarchico, ...);
- sistema limbico: in esso si svolge l'attività emotiva dell'individuo (gli operatori emozionali di quest'area sono: fobico, richiamo materno, ludico, innamoramento, ...);
- *neo-cortex*: in essa si trovano gli operatori tipici dell'essere umano (riduttivo, olistico, casuale, binario, ...).

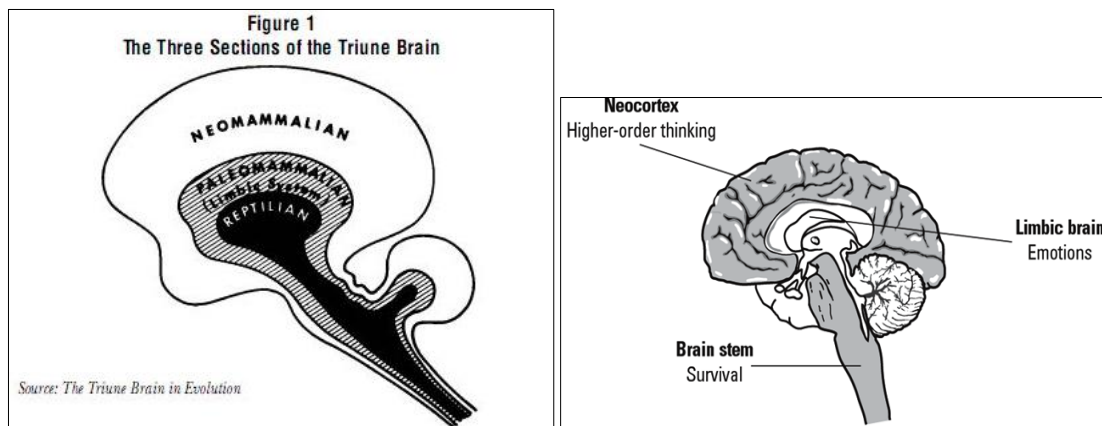
Questo modello ebbe importanti risvolti pratici nell'ambito della psichiatria.

**Figura 2.2 a** Principali aree cerebrali del modello *trune brain* elaborato da MacLean



Fonte: Lo (2005)

**Figura 2.2 b** Funzioni del modello *trune brain* elaborato da MacLean (1990)



Gli aspetti teorici del modello del *cervello trino* possono essere applicati per sviluppare una possibile interpretazione della presenza di distorsioni comportamentali durante le alcune attività finanziarie, specialmente quella decisionale. I diversi comportamenti possono infatti rappresentare le differenti funzioni svolte dalle aree cerebrali descritte in precedenza; a volte queste aree si interconnettono e interagiscono fra loro, eseguendo le proprie attività in modo collaborativo o in modo opposto, ostacolandosi vicendevolmente.

Numerosi studi della neuroscienza dimostrano che, sotto particolari condizioni, la prima risposta umana è di tipo emotivo e non razionale: elaborare ed avere delle reazioni istintive (provocate da emozioni) a certi eventi o oggetti (coinvolti nella situazione) è molto più rapido rispetto ad identificarli in modo logico attraverso un ragionamento sensato. Dal punto di vista evolutivo, quando un individuo si trova a dover fronteggiare situazioni in cui è in serio pericolo, l'istinto di sopravvivenza prevale sulle funzioni cerebrali logiche-razionali (uniche nell'uomo) finché la minaccia non viene meno, provocando delle particolari reazioni di difesa come, ad esempio, la *fight-or-flight response*<sup>20</sup>. Le caratteristiche cognitive che emergono dalla reazione *fight-or-flight*, sono principalmente negative, in particolare: si presta maggiore attenzione agli stimoli negativi; si sovrastima o sottostima la percezione del controllo in determinate situazioni e ciò provoca comportamenti di ansia o aggressività. Si attribuisce spesso una certa ostilità durante il processo di elaborazione di informazione sociale<sup>21</sup>; si crede che alcune situazioni siano rischiose anche quando in realtà non lo sono. In questo ultimo caso, specialmente se l'individuo non è in pericolo di vita e perciò la sua sopravvivenza non è minacciata, la soppressione di modi di pensare logico-razionali per far emergere comportamenti e reazioni istintive, può risultare inadatta e svantaggiosa.

### **2.3.2 Interpretazione evoluzionistica delle funzioni cerebrali**

Le diverse funzioni espletate relativamente dalle tre aree cerebrali del *triune brain model* possono essere interpretate dal punto di vista delle *teorie evoluzionistiche*<sup>22</sup>. Ogni singola componente dell'encefalo umano può essere considerata come il risultato di un lungo processo di *adattamento* evolutivo messo in atto dall'individuo (e dalla *specie*<sup>23</sup>, a cui appartiene, in generale) per sopravvivere sotto determinate situazioni. Eventi straordinari che apportano possibili modifiche nelle *condizioni ambientali*<sup>24</sup>,

---

<sup>20</sup> La *fight-or-flight response*, tradotta come "risposta di sfida o fuga", è una reazione fisiologica di tipo istintivo provocata da eventi o situazioni di pericolo e di potenziale danno o minaccia alla stessa sopravvivenza. Secondo questa reazione, gli animali reagiscono alle minacce innescando una scarica prodotta dal sistema nervoso simpatico (esso ha origine nel midollo spinale ed effettua funzioni di attuare cambiamenti fisiologici durante questa reazione *fight-or-flight*, rilasciando noradrenalina) che provoca, come conseguenza, l'attacco o la fuga.

<sup>21</sup> La teoria dell'*elaborazione dell'informazione sociale* analizza e descrive le modalità e i processi con cui gli individui, in particolar modo i bambini, stabiliscano con successo (o meno) rapporti con la società circostante.

<sup>22</sup> Per un eventuale approfondimento della teoria dell'evoluzione, in particolare di quella darwiniana, si rimanda a letture di carattere tecnico-scientifico.

<sup>23</sup> In biologia, il termine *specie* si riferisce ad un raggruppamento di animali o piante con caratteristiche comuni e da cui deriva una discendenza feconda.

<sup>24</sup> Per condizioni ambientali si intendono le diverse caratteristiche dell'ambiente, in concreto, o del contesto, in senso astratto e generale, in cui vive un individuo.

hanno un riscontro nei mutamenti adattativi delle varie componenti cerebrali. L'essere umano, allo stadio evolutivo attuale di *Homo sapiens*, è l'unico essere vivente ad avere una specifica capacità di adattamento, grazie alla facoltà di saper modificare vantaggiosamente e migliorare i processi cognitivi, decisionali e comportamentali, originati dall'attività congiunta delle diverse aree cerebrali. L'*Homo oeconomicus*, intesa come categoria sociologica, o socio-culturale dell'*Homo sapiens*, ha la facoltà di pensare in modo astratto, di comunicare e di intraprendere azioni atte al raggiungimento di obiettivi prefissati. Gli neuro-scienziati hanno assegnato queste capacità alla zona della neocorteccia cerebrale, una struttura anatomica particolare della corteccia che nell'*Homo sapiens* è particolarmente ampia e molto ricca di terminazioni nervose. Agli stadi evolutivi precedenti a quello attuale, quando non era ancora dotato dell'elaborazione astratta del pensiero, per sopravvivere in un ambiente che gli era ancora ostile e che non sapeva governare, l'uomo applicava un metodo decisionale molto primitivo, basato su azioni fisiologiche istintive (ad esempio la *fight-or-flight response*): queste reazioni, infatti, sotto certe circostanze ambientali minacciose, erano le più ottimali per sopravvivere.

Applicando queste idee nell'ambito delle scienze economiche, le preferenze degli individui (caratterizzate sia da aspetti propri della personalità del singolo individuo, sia da fattori esterni derivanti dall'ambiente e dal contesto in cui esso si inserisce) sono causate dall'attività congiunta delle aree cerebrali, delle sotto-aree e delle innumerevoli interazioni fra esse. Le preferenze individuali, infatti, non sono stabili nel tempo, ma mutano a seguito di modifiche delle condizioni ambientali: inizialmente si ha una reazione comportamentale, spesso istintiva, da parte del soggetto; con il passare del tempo invece, si assiste ad una vera modifica nelle preferenze, provocata dalle forze della *selezione naturale*<sup>25</sup> secondo cui sopravvive chi riesce ad adattarsi ai mutamenti continui.

Anche nei mercati finanziari, caratterizzati da un grado di competitività sempre maggiore, si assiste alla '*lotta alla sopravvivenza*' tra gli investitori: la selezione naturale fa sì che gli operatori dalle scarse abilità e che, spesso, non sono in grado di

---

<sup>25</sup> La selezione naturale è un processo secondo cui esseri appartenenti alla stessa specie, ma con diverse caratteristiche, ottengono un successo riproduttivo differente. Ovviamente, le caratteristiche riproduttive più vantaggiose, tenderanno a manifestarsi di generazione in generazione, *sopravvivendo*. La selezione dipende soprattutto dall'ambiente, anch'esso in continua modifica, in cui vivono anche altri esseri appartenenti a più specie.

fronteggiare situazioni di mercato particolari, sono destinati ad uscire da esso (ad essere perciò eliminati).

Questa visione dinamica dei mercati finanziari, in cui si riscontrano concetti teorici ed aspetti concreti della psicologia, delle neuroscienze cognitive e di alcune teorie scientifico-biologiche quali la competizione (intesa come ‘lotta alla sopravvivenza’), la selezione naturale e varie tipologie di comportamenti, porta allo sviluppo di una nuova corrente di pensiero, di un nuovo filone teorico, alternativo a quello dell’efficienza del mercato: le *ipotesi di mercato adattivo* o *Adaptive Markets Hypothesis (AMH)*.

## **2.4 Ipotesi di mercato adattivo (AMH)**

---

Il nuovo orientamento volto ad applicare principi della teoria dell’evoluzione per descrivere l’andamento dei mercati finanziari è stato ulteriormente influenzato dalla corrente della *psicologia dell’evoluzione*<sup>26</sup>. Si iniziò quindi ad utilizzare concetti come la competizione, la riproduzione, la selezione naturale per spiegare certi comportamenti tipici dell’uomo (ad esempio l’altruismo, l’onestà) ed altri connotati fisici (come i tratti somatici e il colore della pelle) e socio-culturali che dipendono dallo specifico contesto in cui vive un individuo (ad esempio la lingua, la religione, l’etica e la morale). Questo metodo, rientra nella disciplina della cosiddetta “sociobiologia”<sup>27</sup>, e venne creato da E. Wilson nella metà degli anni ‘70 (v. Lo, 2004). Tuttavia già Thomas Malthus, con la pubblicazione del “Saggio sul principio della popolazione e i suoi effetti sullo sviluppo futuro della società” nel 1798, fece propri dei concetti biologici per verificare che la popolazione cresce secondo un tasso geometrico, mentre le risorse secondo un tasso aritmetico. L’idea di “lotta per la sopravvivenza” (intesa come approvvigionamento di risorse non limitate e in scarsità rispetto ai fabbisogni crescenti della popolazione) che emerse dagli studi di Malthus, divenne un punto di riferimento per Charles Darwin<sup>28</sup>, fondatore della teoria dell’evoluzione. Anche la visione dei cicli economico-aziendali,

---

<sup>26</sup> Per approfondire la letteratura sull’*evolutionary psychology*, Lo [2005] rimanda alla lettura di S. Pinker, *How the Mind Works*, 1997 e di L. Barret, R. Dunbar, J. Lycett, *Human Evolutionary Psychology*, 2002.

<sup>27</sup> Questo termine si rifà al titolo dello studio di E. Wilson: un’ulteriore denominazione, più tecnica, per questo ramo della biologia è “biologia evolutivista”, ampiamente trattata in *Sociobiology*, 1975.

<sup>28</sup> C. Darwin sosteneva fermamente che la “lotta per la vita” era un aspetto chiave della teoria dell’evoluzione, in quanto era una delle cause con cui la selezione naturale agiva sulle specie viventi. L’ambiente non è la prima causa del processo di evoluzione, poiché, *in primis* sono coinvolte le mutazioni genetiche che avvengono negli esseri viventi. Il contesto ambientale si inserisce in un secondo momento, quando si determinano vantaggi e svantaggi che la mutazione concorsa ha apportato alla specie modificata (cioè la valutazione del peggiore o migliore adattamento, il cosiddetto *fitness*).

caratterizzati dalle fasi di nascita, di rapida crescita, di decadimento e di scomparsa del mercato dell'attività imprenditoriale, sviluppata da J. Schumpeter, può essere paragonata ad un processo evolutivo che porta alla selezione naturale.

Nei decenni vennero condotti molti studi da parte di biologi ed economisti sui risvolti teorici e pratici della *sociobiologia*. Si sviluppò la teoria evuzionistica dei giochi e, più in generale, l'economia evolutiva; comparirono altresì nuove autorevoli riviste di settore, il “Journal of Evolutionary Economics” e l’ “Electronic Journal of Evolutionary Modeling and Economic Dynamics”. I principi della teoria dell'evoluzione furono inoltre utilizzati in contesti finanziari: ad esempio, si analizzarono come i mercati dei *futures*<sup>29</sup> fossero governati dalle forze della selezione naturale, oppure, si verificò come la simulazione dei comportamenti di operatori di mercato, basati sulle euristiche, fosse determinata da dinamiche evuzionistiche. Ancora, V. Niederhoffer (v. Lo, 2005) paragonò il mercato finanziario ad un «ecosistema» in cui i *dealer* (operatori) corrispondevano agli “erbivori”, gli speculatori erano i “carnivori” e i trader e gli investitori indigenti rappresentavano i “decompositori”; P. Bernstein dimostrò che la gestione finanziaria attiva non era uno ‘strumento’ per il raggiungimento dell'equilibrio nel mercato (l'analisi empirica dimostrava come era poco realizzato nella realtà), bensì era facilmente rappresentabile attraverso dinamiche e processi evuzionistici.

#### **2.4.1 La nuova teoria introdotta da Andrew W. Lo**

Di seguito a tutti questi interventi e nuovi spunti teorici (originati dalle critiche nei confronti della teoria delle EMH), in ambito accademico ancora mancava una teoria puntuale alternativa all'efficienza di mercato, che raggruppasse e utilizzasse in concreto i concetti chiave dell'economia evuzionistica, della sociobiologia e della psicologia evuzionistica recentemente sviluppatasi. In aggiunta ai primi lavori alla fine degli anni '90, Andrew W. Lo, durante la particolare occasione del 30° anniversario del “The Journal of Portfolio Management”, nel 2004, propose la teoria delle *Adaptive Markets Hypothesis*.

---

<sup>29</sup> I *futures* sono una tipologia di strumento finanziario derivato: essi sono contratti a termine standard e commercializzati in un mercato regolamentato (la borsa-valori). Attraverso il future, le due controparti si vincolano rispettivamente alla consegna di una determinata quantità di bene (*attività sottostante* che può essere una commodity o un'attività finanziaria) e al pagamento di una cifra prestabilita in una data precisa di consegna. I *futures* sono utilizzati principalmente per operazione di copertura (*hedging*) per proteggere il valore dell'attività sottostante da fluttuazioni eccessive nei prezzi.



### **Il concetto di “razionalità limitata” *bounded rationality***

Per la descrizione di questo nuovo filone teorico, si partirà da una delle teorie generali di base dell'economia, riferita ai singoli individui, cioè la teoria della *massimizzazione dell'utilità* (già introdotta nel primo capitolo). Secondo la visione neoclassica, gli individui massimizzano la propria funzione di utilità attesa attraverso *aspettative razionali*; al contrario, nella teoria delle ipotesi di mercato adattivo, gli individui cercano di massimizzare la loro probabilità di sopravvivenza e la continuità delle loro caratteristiche genetiche. In questa visione, il comportamento dell'uomo non è un connotato implicito e deciso *a priori*, bensì esso è influenzato dal contesto ambientale (in senso lato) in cui vive l'individuo ed è in continua evoluzione poiché subisce cambiamenti a causa della selezione naturale. Nell'essere umano, inteso come *Homo sapiens*, non sono solo i fattori genetici e fisici e biologici ad essere modificati e, talvolta, pregiudicati dalla selezione naturale, ma anche gli aspetti psicologici, sociologici, culturali che provocano dirette ripercussioni su quelli comportamentali.

L'idea che l'individuo umano non attui, in realtà, le scelte che massimizzano la sua utilità, in discordanza con quanto sostenuto dalla teoria del consumatore appartenente al ramo della microeconomia neoclassica, è stata approfondita da H. Simon quando propose, nel 1955, il concetto di *bounded rationality* (razionalità limitata)<sup>30</sup>. La razionalità limitata è l'idea secondo cui durante il processo decisionale di un individuo comune si verificano delle limitazioni poiché: egli non ha completa informazione, vi sono 'confini' cognitivi mentali (anche soggettivi) e limiti temporali per poter effettuare determinate scelte. Proprio a causa dei costi da sostenere per procurare l'informazione e perché i limiti cognitivi determinano scarse capacità computazionali, l'individuo non ha i mezzi e le competenze necessari per poter valutare correttamente tutte le alternative possibili e, in ultima istanza, scegliere quella che massimizzerebbe la funzione di utilità. Come conseguenza, Simon afferma che la gran parte delle scelte fatte sono soddisfacenti e non ottimali: l'uomo, limitato nel suo livello di razionalità e nelle sue aspettative, rinuncia alla situazione di ottimalità (massimizzazione dell'utilità) ed effettua processi decisionali attraverso un criterio inferiore di 'accettabile soddisfazione'. In sintesi, proprio per il suo aspetto 'provocatorio' ed innovativo nei

---

<sup>30</sup> H. Simon, economista, psicologo e informatico, considerato uno dei più importanti scienziati sociali del XX secolo (i suoi lavori riguardano la psicologia cognitiva, l'informatica, l'economia, la filosofia scientifica), vinse il premio Nobel per l'economia nel 1978 proprio per la sua teoria della *bounded rationality*. Per una descrizione più completa di questa teoria e di una sua applicazione computazionale si rimanda alla lettura del capitolo 3.

confronti dei postulati basi dell'economia neoclassica e della teoria dell'efficienza di mercato (le aspettative razionali sono un'ipotesi tipica per molti consolidati modelli economici), quest'idea venne relativamente poco considerata in ambito accademico e professionale nei successivi anni immediati. Infatti alcuni studiosi la criticarono e sollevarono la questione mettendo in evidenza la mancanza di una spiegazione teorica-formale rispetto ai motivi e ai fattori che indurrebbero l'individuo a smettere di ricercare la soluzione ottimizzante per ripiegare ed accontentarsi di quella soddisfacente.

### **Gli sviluppi successivi apportati da A. Lo**

Lo [2004] formulò una spiegazione, applicando concetti della teoria evuzionistica, che potesse far fronte alle critiche mosse alla teoria di Simon. Secondo lo studioso, il punto in cui un individuo decide di non ottimizzare più la sua funzione di utilità (e il suo "stato") non può essere determinato in modo analitico, ma è soggettivo e qualitativo, dal momento dipende dai fattori che caratterizzano il processo valutativo-decisionale come ad esempio le troppe risorse da impiegare (in termini di denaro e tempo) ed eventuali commissioni di errori e, non per ultima, le forze della selezione naturale. La selezione naturale agisce per mezzo del fatto che l'uomo pondera le scelte o attraverso un semplice calcolo probabilistico su quale possa essere la soluzione ottimale, o, soprattutto, basandosi sulle esperienze e sugli accadimenti passati. A seguito della scelta, se essa apporterà dei cambiamenti positivi o negativi, sulla base di questi, l'individuo avrà la possibilità di comprendere meglio se il processo cognitivo adottato era corretto o meno e acquisirà informazioni aggiuntive, utili da sfruttare non appena una potenziale situazione lo richieda. Al contrario, se l'opzione scelta non produrrà alcuna modificazione, allora l'individuo non apprenderà nuove conoscenze e nuove informazioni.

Nel caso in cui, invece, l'ambiente subisca delle modifiche, i comportamenti e i meccanismi elementari di pensiero (euristiche) e cognitivi, adottati e consolidati con il tempo dall'essere umano, potrebbero non essere più adatti alle nuove condizioni e caratteristiche ambientali. Quello che si verifica in questa circostanza è la manifestazione di distorsioni comportamentali da parte di alcuni individui, non propriamente adeguate allo specifico contesto di riferimento. L'atteggiamento che si osserva non è definibile con il termine "irrazionale", poiché risulterebbe troppo estremo nella sua definizione. Quando le aspettative degli individui e i loro processi decisionali

non si modificano a seguito di trasformazioni ambientali-contestuali, sarà probabile che i comportamenti e le azioni messe in pratica saranno non-ottimali (come lo erano precedentemente alle variazioni dell'ambiente) e mal adattivi<sup>31</sup>.

Come esempio concreto possiamo considerare le *behavioral biases* elencate nel paragrafo 2.2 e i relativi test psicologici effettuati: in contesti economico finanziari, esse rappresentano dei processi di attività decisionale e comportamenti mal adattivi che conducono a scelte, talvolta istintive, poco vantaggiose. La competizione, la collaborazione, certi comportamenti basati sul mercato che provocano equilibri e disequilibri generali sono tutte variazioni comportamentali che avvengono negli operatori dei mercati finanziari (negli individui, generalizzando il discorso a livello economico) per “sopravvivere” in seguito a particolari eventi o modifiche avvenuti nel contesto ambientale operativo.

Applicando concetti propri della corrente evoluzionistica, Lo è riuscito a fornire un'interpretazione e una spiegazione in merito alla discordanza tra la teoria delle ipotesi di mercato efficiente e i contrastanti risultati empirici (dovuti alla presenza delle *behavioral biases* nel mercato e nel sistema economico) messi in evidenza dai sostenitori della finanza comportamentale. Lo non pecca di superiorità ma si limita a proporre una teoria che non prevalga o che annulli quella delle EMH: egli sostiene che le *Adaptive Markets Hypothesis*, ipotesi di mercato adattivo, siano una versione alternativa e ‘rivisitata’ delle ipotesi di mercato efficiente, in chiave evoluzionistica.

Le idee principali che descrivono la teoria delle AMH sono sintetizzate nel seguente elenco:

1. gli individui agiscono secondo il proprio interesse (ciò vale anche nelle EMH, che riprende un'ipotesi base della teoria del consumatore, cioè quella di massimizzare la propria utilità);
2. gli individui commettono errori (non sempre agiscono con razionalità);
3. gli individui imparano continuamente dalle singole esperienze e hanno la capacità di adattarsi (in modo più o meno adeguato e vantaggioso rispetto alla situazione venuta a crearsi);

---

<sup>31</sup> Lo [2004] utilizza il termine *maladaptive*.

4. la competizione, causata dalla ‘lotta alla sopravvivenza’ (in un contesto di mercato finanziario, la lotta alla sopravvivenza implica che gli operatori non vogliono essere eliminati dal mercato, non vogliono subire ingenti perdite, quindi ‘fanno del loro meglio’ per attuare strategie vincenti), determina l’adattamento degli individui e l’*innovazione* (v. *infra* 2.5);
5. la selezione naturale (che determina l’entrata e l’uscita degli investitori, l’offerta, la rarità o l’eliminazione di strumenti finanziari nel mercato) influenza e ‘plasma’ il contesto generale del mercato (l’ambiente) definita come *market ecology*;
6. il continuo processo evolutivo definisce le dinamiche di mercato.

I punti 2 e 3 sono discordanti o, quantomeno, conflittuali fra di loro con quanto è descritto nella teoria dell’efficienza. Nelle EMH gli individui non commettono errori, hanno aspettative razionali e il contesto è sempre stabile e in equilibrio nel tempo. La teoria delle AMH non si focalizza su ogni singolo comportamento ma su come esso si modifica in base alle condizioni contestuali. Nel modello di mercato evolucionistico gli individui non sono né completamente razionali, né completamente irrazionali: piuttosto essi sono *intelligenti*, pensano con un’ottica di lungo periodo e sono investitori competitivi, che si adattano alle modifiche ‘ambientali’. Ponendo il comportamento degli investitori come funzione del mercato finanziario in cui operano, appare evidente che le situazioni, o ipotesi, di perfetta efficienza o inefficienza sono estreme e non veritiere. L’ultimo punto, cioè che è l’intero processo evolutivo a determinare le dinamiche fra gli individui nel mercato, racchiude ed è il risultato finale di quelli precedenti:

- l’adattamento non è indipendente dalle forze del mercato, poiché esso è causato dalla competizione fra individui e *specie*<sup>32</sup> diverse;
- le relazioni e interazioni fra tutti i partecipanti al mercato sono dominate dalla selezione naturale;
- la selezione naturale modella, infine, il contesto generale di riferimento (il mercato finanziario).

---

<sup>32</sup> Con il termine “specie” si intende qui un dato insieme di operatori di mercato che appartengono alla stessa tipologia e che hanno le stesse caratteristiche. Se si applica il concetto in un mercato finanziario, esempi di specie possono essere: gli speculatori, gli investitori retail, i gestori di fondi pensioni, i gestori di *hedge-fund* o i *marketmakers*.

In quest'ottica, il grado di efficienza di un mercato finanziario si misura in base alla scarsità delle risorse e al numero di partecipanti che 'lottano' per tale risorsa. Se ci sono più tipologie di operatori (più *specie*) che competono per entrare in possesso di una risorsa scarsa in un solo mercato, esso sarà caratterizzato da un alto livello di efficienza, poiché i prezzi riflettono in maniera completa e molto rapida le nuove informazioni. Al contrario, se gli operatori interessati ad una risorsa abbondantemente presente nel mercato sono in numero ridotto, essi operano in un contesto poco efficiente proprio a causa della scarsa scambiabilità delle informazioni. I punti chiave delle AMH consentono di formulare il paragone tra un mercato finanziario e un *ecosistema biologico*. La quantità di risorse disponibili in un mercato finanziario è equivalente alle risorse naturali, non illimitate, presente in un ecosistema: man mano che esse diminuiscono o che la popolazione aumenta, la competizione tra le singole specie, o i singoli individui, si rafforza, provocando la scomparsa di alcuni di essi e il conseguente declino della popolazione. Questa successione consequenziale di cause (eventi)-effetto avviene in modo ciclico (se la popolazione diminuisce, anche la competizione e la 'lotta alla sopravvivenza' divengono meno aggressive) o può esaurirsi in soluzioni definitive che determinano la fine del processo evolutivo (ad esempio l'estinzione di una specie, lo sfruttamento intero delle risorse disponibili, modifiche o shock ambientali accentuati). I fattori che determinano la continuità ciclica del processo o la convergenza verso uno stato di equilibrio sono la combinazione di risorse (profitti finanziari) e di individui (operatori del mercato) che sopravvivono o meno in base alle prime, soprattutto grazie alla capacità di adattamento e all'innovazione. Secondo la teoria delle ipotesi di mercato adattivo non c'è quasi mai una convergenza del mercato, e del processo evolutivo che lo caratterizza, verso un punto di equilibrio o stabilità.

La valutazione del grado di efficienza di un mercato finanziario, tuttavia, non si esaurisce in questa suddetta 'semplice' analisi, ma dipende molto anche dalle singole situazioni (ad esempio dai singoli giorni di contrattazione finanziaria) e anche dalle dinamiche che si sviluppano attorno alle più 'sottili' interazioni comportamentali (socio-psicologiche) fra soggetti.

Le innumerevoli strategie di investimento, sotto le AMH, dipendono da moltissimi fattori come, tra i più importanti, l'andamento del mercato, le condizioni aziendali e

contrattuali in continuo cambiamento, il numero di investitori (comprese le loro caratteristiche comportamentali e preferenze) che ‘entrano ed escono’ dal mercato e il valore dei profitti potenziali e reali disponibili; ovviamente, più il mercato è ampio ed eterogeneo, più le dinamiche che influenzano e modificano i fattori sopra citati, saranno numerose e complesse da analizzare.

Per ampliare il collegamento analitico-qualitativo tra mercati finanziari e AMH, nel paragrafo successivo saranno descritte alcune tra le principali implicazioni pratiche finanziarie ed interpretazioni di analisi empiriche attraverso questo nuovo filone teorico.

## **2.5 Applicazioni della teoria delle AMH: implicazioni pratiche ed evidenze empiriche**

---

La nuova corrente di pensiero, di matrice evolucionistica, della teoria delle ipotesi di mercato adattivo ha l’obiettivo di superare e di proporre una visione teorica alternativa alle critiche sulle ipotesi di mercato efficiente mosse dalla finanza comportamentale. Tuttavia questo nuovo *framework* concettuale non si esaurisce in un utilizzo analitico-descrittivo e qualitativo dei mercati e dei sistemi economici, bensì da esso sono state elaborate anche implicazioni di tipo empirico, soprattutto per quanto riguarda l’attività dell’*investment management* nei mercati finanziari.

Data la formalità logica, accurata e di immediata applicazione delle EMH (che, in ogni caso, non sono derivate da leggi fisiche come, ad esempio, la legge di gravità), esse sono state utilizzate come approssimazione e semplificazione delle caratteristiche dei mercati finanziari, nella realtà molto più complessi. Il concetto dell’efficienza dei mercati finanziari, essendo una condizione e una delle ipotesi per molti modelli quantitativi di *asset-pricing* e *asset allocation*<sup>33</sup> (v. *infra*), ha avuto un’applicazione

---

<sup>33</sup> L’*asset allocation* è una delle fasi, dell’intero processo di investimento, in cui si decide come investire risorse finanziarie, “distribuendole” in varie tipologie (*class*) di strumenti e attività finanziarie (*assets*) che compongono un cosiddetto “portafoglio”. In base all’arco temporale su cui si determina la combinazione del portafoglio, si differenziano tre tipologie di *asset allocation*:

- *strategica*: la scelta d’investimento è effettuata secondo una logica temporale di medio-lungo periodo, si determinano le quote di portafoglio analizzando la performance di equilibrio di lungo periodo di ciascuna *asset class* (si determina l’*asset mix* ottimale);
- *tattica*: l’allocazione in questo caso, viene fatta sulla base delle condizioni generali di mercato in atto al momento della valutazione con lo scopo, soprattutto, di sfruttare particolari trend (*market-timing*), variando i pesi delle categorie di asset in modo sistematico;
- *dinamica*: l’allocazione è dinamica e l’*asset mix* varia in archi temporali molto brevi, anche infra-giornalieri e può subire variazioni improvvise dipendentemente da ciò che accade nei mercati.

Le fasi principali del processo di *asset allocation* che deve compiere un investitore (o un qualsiasi operatore di mercato) sono:

- stabilire degli obiettivi (rischio/rendimento) e l’arco temporale dell’investimento;

concreta e diretta sulle numerose attività svolte nei mercati finanziari, tant'è che solo recentemente la modellistica comportamentale ha iniziato ad essere considerata interessante e ad avere una certa considerazione anche nei contesti accademici più conservatori, effetto 'scia' degli sviluppi teorici della finanza comportamentale.

L'approccio metodologico per derivare delle implicazioni pratiche dell'economia comportamentale e delle ipotesi di mercato adattivo è una combinazione di inferenza sia deduttiva che induttiva, in particolare analizzando:

1. in modo teorico: le dinamiche evolutive;
2. in modo empirico: le forze evoluzionistiche;
3. in modo sperimentale: l'attività decisionale dei singoli investitori e delle categorie all'interno dei mercati finanziari.

Sebbene queste analisi siano ancora poco approfondite, alcuni studiosi, in modo particolare Lo, hanno sviluppato e teorizzato delle applicazioni delle AMH al processo di investimento e in ambito dell'investment management.

### **2.5.1 Preferenze e propensioni degli investitori**

La più intuitiva applicazione della teoria delle *Adaptive Markets Hypothesis* è quella in merito alle *preferenze* e *propensioni* degli investitori, individuali e a carattere istituzionale. Come precedentemente detto, le euristiche, che possono causare distorsioni comportamentali, portano spesso a compiere delle decisioni non corrette e controproducenti rispetto al conseguimento della continua stabilità e redditività finanziaria, se applicate in contesti diversi dai quali si sono generate. Molteplici sono le discipline che studiano e sviluppano metodologie per la misurazione quantitativa delle preferenze individuali, evidenziandone aspetti diversi dell'attività decisionale. La psicologia, ad esempio, attraverso la somministrazione di specifici test e questionari, indaga sull'impatto delle caratteristiche della personalità; gli economisti (comportamentali) analizzano le propensioni al rischio facendo esperimenti sulle scelte con ipotetici biglietti della lotteria; il marketing, invece, studia gli effetti che alcune caratteristiche del prodotto hanno sul consumatore. Congiungendo questi procedimenti,

- 
- stima di rischi/rendimenti delle varie asset class;
  - definizione dell'allocazione in modo da massimizzare il rendimento o minimizzare il rischio (sotto eventuali vincoli) dell'obiettivo precedentemente deciso;
  - decisione della frequenza temporale di ribilanciamento dei pesi (quote) degli asset prescelti nel portafoglio.

con le implicazioni derivanti dalle scoperte teoriche sulle interazioni fra le componenti cerebrali (sviluppate dalla neuroscienza), è possibile migliorare la tecnica di misura delle preferenze.

L'attività decisionale del processo di investimento è influenzata dai molti obiettivi che il singolo individuo ha in mente ed è compito del consulente finanziario rendere l'investitore più consapevole rispetto i suoi obiettivi, comprendendoli e pianificandoli egli stesso, per elaborare una soluzione di investimento adeguata a tali richieste. I questionari sulle propensioni al rischio che società di brokeraggio e consulenti propongono ai loro clienti non sempre rivelano in che modo, nella realtà, un individuo ragiona ed agisce, poiché entrano in gioco altre emozioni che alterano un'ipotetica 'standardizzazione comportamentale' nell'attività decisionale finanziaria<sup>34</sup>. Per ovviare all'alterazione dei risultati di questi test e per elaborare dei modelli decisionali-comportamentali degli investitori più esaustivi, sono stati realizzati strumenti di analisi più completi, non solo riguardanti le propensioni al rischio ma anche la personalità, il carattere e gli stati emozionali dell'investitore. Un'altra caratteristica cognitiva-comportamentale da tenere in considerazione è quello relativa alla *percezione del rischio*. Applicando il "*Peltzman effect*"<sup>35</sup> ai mercati finanziari, se un titolo è caratterizzato da una volatilità in diminuzione, ma il suo rendimento atteso rimane inalterato, tutti gli operatori investiranno in esso, secondo le regole base della classica *portfolio theory*. Tuttavia, se le percezioni non sono corrette o sono disconnesse con la realtà, quindi vi è una disuguaglianza tra *risk perception* e *risk reality*, la natura adattativa del comportamento degli investitori fatta su aspettative e valutazioni non effettive, può causare eventi negativi nei mercati finanziari.

Anche se meno esaminato dagli accademici e dai professionisti, un altro aspetto, ulteriore alla misurazione, delle preferenze e propensioni degli individui, è il modo in cui esse vengono gestite, coordinate e governate. Gli economisti tendono ad accettare le preferenze degli individui come fossero degli "*a priori*", senza approfondire la questione facendo, ad esempio, dei paragoni fra le preferenze, le propensioni e le aspettative di differenti individui, ma si limitano allo studio analitico delle singole

---

<sup>34</sup> Se, ad esempio, si somministra il medesimo questionario sulla propensione al rischio allo stesso individuo, prima e dopo un evento tragico che lo ha personalmente colpito, i risultati saranno sicuramente diversi.

<sup>35</sup> S. Peltzman, economista che condusse un'analisi empirica sull'impatto che i nuovi regolamenti stradali del governo statunitense ebbero sui comportamenti degli automobilisti, mostrò che se i veicoli sono dotati di dispositivi di sicurezza avanzati e affidabili, gli automobilisti sono *more confident* (più sicuri di sé, certi) nella guida, si sentono più sicuri e tendono ad aumentare la velocità e, nello stesso tempo, a diminuire l'attenzione.



funzioni di utilità. Questa assunzione ‘conservatrice’ delle preferenze prese come tali e, perciò, immutabili, non tiene conto degli aspetti neuro-cognitivi, soprattutto del fatto che le preferenze e le propensioni degli individui, così come le distorsioni comportamentali, sono spesso il risultato delle interconnessioni fra le attività di ciascuna componente cerebrale. Per un’analisi più corretta e completa, occorre studiare la derivazione cerebrale (ad esempio dal sistema limbico o dalla corteccia cerebrale) per ciascuna preferenza o propensione dell’individuo, in maniera tale da capirne la cause, studiarne gli effetti ed infine, eventualmente, farne una suddivisione sulla base di queste particolarità. Attraverso questa complessa analisi si possiede qualche informazione in più per poter comprendere in che modo le preferenze possano essere ‘governate’ allo scopo finale di agire più vantaggiosamente ed attuare decisioni di investimento migliori o, come riporta Lo [2005] «*more desirable*» (più desiderabili)<sup>36</sup>. Lo utilizza questo termine in riferimento al contesto dell’investment management, distinguendolo perciò da quello che è il significato dell’ottimizzazione della funzione di utilità (in un contesto economico generale).

### **2.5.2 Applicazione delle AMH all’*asset allocation***

Sicuramente interessante da un punto di vista operativo e di possibilità di sviluppo professionale è l’applicazione della teoria delle ipotesi di mercato adattivo nell’*asset allocation*, fase fondamentale dell’intero processo di investimento.

#### **Relazione rischio-rendimento**

Una prima conseguenza dell’applicazione delle AMH all’*asset allocation* è che la *relazione tra rischio e rendimento* non è più stabile nel tempo (come accadeva sotto le ipotesi di mercato efficiente), ma si modifica continuamente. La relazione rischio-rendimento è influenzata dalla grandezza e profondità del mercato, dalle preferenze dei singoli operatori o delle singole *specie* (v. *supra* 2.4.1) di investitori e anche da aspetti fiscali e giuridico-regolatori propri delle istituzioni (e enti) che operano e che controllano il corretto funzionamento del mercato. Appare evidente che se anche solo uno di questi fattori si modifica, la relazione rischio-rendimento varia. Dal momento che

---

<sup>36</sup> Certi tipi di preferenze o propensioni se si massimizzano obiettivi prefissati, portano a risultati poco vantaggiosi. Supponendo, ad esempio, di avere un individuo che abbia l’obiettivo di ottenere un livello minimo di ricchezza in età pensionabile, un’ipotetica sua avversione alle perdite porterà una ricchezza minore in rispetto a quella prodotta massimizzando una funzione di utilità logaritmica (v. Figura 2.1 sulla value function).

questa influenza non è stabile, si può dedurre come conseguenza operativa che il premio al rischio azionario varia nel tempo ed è dipendente dal trend del corso del titolo.

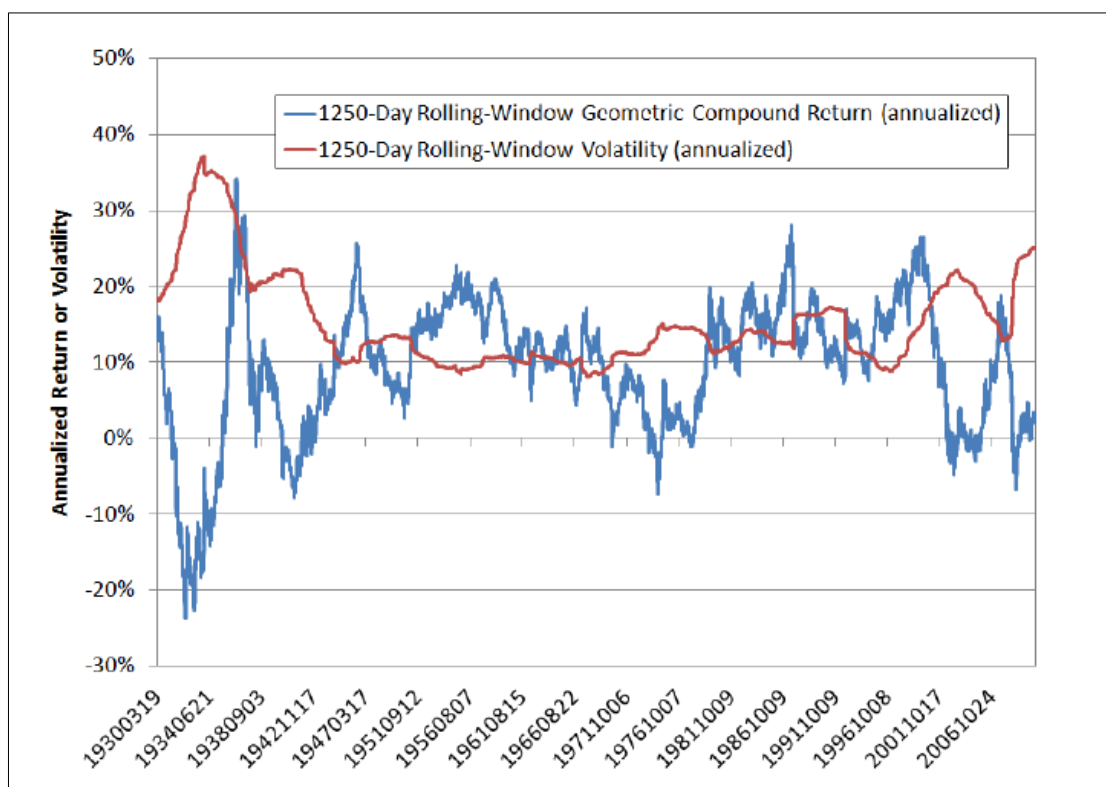
Il principio secondo cui un alto rendimento è accompagnato da un investimento altamente rischioso, e viceversa, viene meno quando si assiste al fenomeno della cosiddetta *market dislocation*. Quando gli investitori percepiscono un'elevata tensione nei mercati finanziari, essi reagiscono attraverso atto distorsioni comportamentali come l'avidità e la paura, attuando azioni di tipo “*flight to safety*”. Secondo la visione delle AMH, l'aumento improvviso della volatilità dei titoli azionari ha come conseguenza il fatto che un certo numero di operatori riduca la loro quota di investimenti rischiosi (uscita dal mercato azionario) per detenere un maggior numero di asset più sicuri. Questo disinvestimento diffuso<sup>37</sup> fa diminuire velocemente il prezzo delle azioni e aumenta quello degli strumenti meno rischiosi, causando una violazione temporanea della relazione positiva tra rischio e rendimento (v. Grafico 2.1).

Prendendo come riferimento lo schema delle “tre P” del *Total Investment Management* (prezzi, probabilità e preferenze/propensioni), le preferenze ne sono la componente fondamentale ma anche la meno compresa. L'idea che se le preferenze cambiano, anche il premio al rischio cambia, esiste pure nei modelli in cui si ipotizzano aspettative razionali degli investitori (secondo la teoria delle EMH), ma nell'ottica delle AMH le preferenze e propensioni cambiano in modo continuo, non puntuale, essendo ‘plasmate’ dalle forze della selezione naturale che agiscono costantemente attraverso le interazioni fra gli investitori. Nel tempo, questa selezione determina chi opera nel mercato e chi, al contrario è destinato ad uscirne poiché non riesce a ‘sopravvivere’. Una conseguenza diretta della selezione naturale è che l'andamento dei rendimenti e dei prezzi azionari passati influenza le propensioni al rischio attuali, indipendentemente dal fatto che i prezzi incorporino completamente tutte le informazioni disponibili, cioè indipendentemente da quanto un mercato è efficiente.

---

<sup>37</sup> F. Black (v. Lo 2012) propose, nel 1976, una spiegazione alternativa all'aumento improvviso della volatilità azionaria, collegandolo al *leverage effect*: quando i prezzi azionari diminuiscono, generando rendimenti talvolta negativi, la loro rischiosità aumenta poiché le società emittenti tali titoli, subendo una diminuzione del valore dell'*equity* (capitale azionario emesso), avranno come conseguenza una struttura finanziaria più rischiosa (si incrementerà il rapporto debito/equity).

**Grafico 2.1** Rendimenti annuali e deviazioni standard del *CRSP<sup>38</sup> Value-Weighted Stock Market Return Index* (1930 - 2010)



I rendimenti giornalieri sono calcolati per il periodo che va dal 19/03/1930 al 31/12/2010, utilizzando delle *rolling windows* di 1250 giorni. Sebbene vengano utilizzate finestre temporali di quasi 5 anni, l'andamento delle due curve descrive una relazione non positiva tra le due serie storiche giornaliere, smentendo l'assioma della relazione positiva tra rischio e rendimento.

Fonte: Lo (2012)

## Opportunità di arbitraggi

Secondo la visione proposta dalle ipotesi di mercato adattivo, con una certa frequenza, nei mercati finanziari si verificano delle opportunità di *arbitraggio*, situazioni che non sono previste dalla teoria dell'efficienza (ipotesi di assenza di opportunità di arbitraggio). Infatti, se non si verificassero questi vantaggi, non ci sarebbe alcun motivo di diffondere le informazioni di volta in volta e le interazioni basate sullo scambio di notizie cesserebbero di esistere. Se un mercato è "liquido"<sup>39</sup> spesso sono presenti opportunità di profitto che, non appena vengono sfruttate dagli arbitraggisti più attenti (che si *adattano* a questa 'novità'), non risultano più accessibili. Il processo evolutivo

<sup>38</sup> L'acronimo *CRSP* sta per *Center for Research in Security Prices*, il primo database mondiale di serie storiche dei prezzi e informazioni sui rendimenti azionari.

<sup>39</sup> In un mercato finanziario "liquido" i titoli e le altre attività finanziarie quotati in esso sono facilmente scambiabili: è sempre presente un potenziale acquirente o venditore. Uno strumento finanziario è liquido se è «prontamente ed economicamente vendibile» (v. Biffis, 2011).

che caratterizza un mercato finanziario fa sì che ci siano continuamente specie di investitori o singoli individui che escono (sono eliminati) o entrano in esso, oppure che cambino alcune caratteristiche (v. *supra*): questa continua modifica favorisce la creazione di *mispricing* e, di conseguenza, di opportunità di arbitraggio.

Oltre alla presenza di arbitraggi, le AMH prevedono dinamiche di mercato più complesse che si riscontrano concretamente nella realtà e che danno origine ad eventi finanziari particolari; specifici eventi e situazioni che non sono considerate in un contesto di efficienza. Esempi di queste circostanze sono: bolle, crolli, “panici”, “manie”<sup>40</sup> e altri fenomeni che accadono nell’(eco)sistema finanziario, sia esso un singolo mercato, sia un sistema complesso, definito come l’aggregazione di singoli mercati che interagiscono fra loro (nel ‘mercato finanziario globale’ i singoli mercati si condizionano vicendevolmente essendo aumentata, anche a causa della globalizzazione e del progresso tecnologico, la correlazione fra i mercati (v. *infra* 2.6.2).

### **Implicazioni nelle strategie di investimento**

Data la non stabilità delle condizioni e caratteristiche dei mercati finanziari, le strategie di investimento risultanti vantaggiose e proficue in certe situazioni, possono essere sfavorevoli e poco remunerative in altre. Le politiche di investimento devono essere formulate ed adattarsi tenendo conto che il mercato è in continuo cambiamento e le ipotesi implicite della teoria classica del *traditional investment* (v. *infra* 2.6.1) non sono sempre accettabili nella descrizione della realtà: motivo per cui, molto spesso, l’approccio alla teoria di portafoglio tradizionale risulta poco vincente quando applicato concretamente.

Un esempio inerente a questa argomentazione è quello proposto da A. Lo [2005] in cui si esaminano i *coefficienti di autocorrelazione* di primo ordine dei rendimenti mensili dell’indice statunitense S&P 500 Composite, costruiti attraverso *rolling windows*<sup>41</sup> di 5 anni per un arco temporale che va dal gennaio 1871 all’aprile 2003 (v. Grafico 2.2).

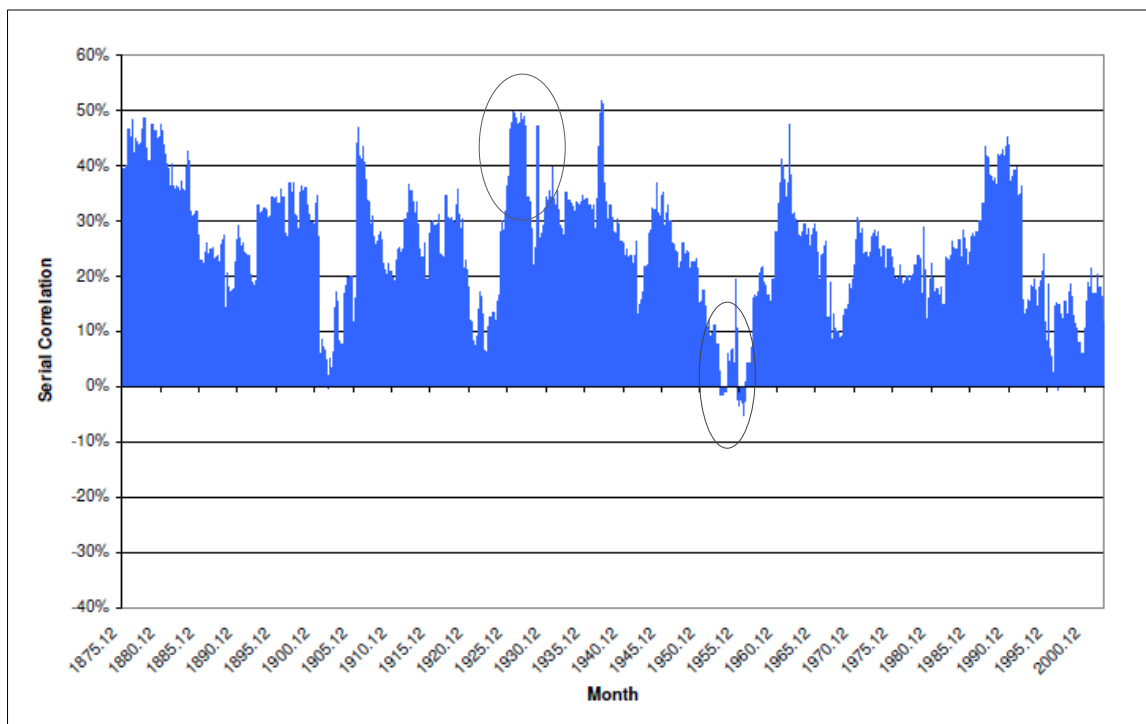
---

<sup>40</sup> Manie (in inglese *manias*) e panici (in inglese *panics*) sono degli eventi particolari che possono verificarsi in un mercato finanziario. La mania corrisponde ad un comportamento degli operatori che si focalizzano in modo ‘ossessivo’ su un determinato bene o categoria di asset: ciò provoca un’alterazione nelle dinamiche e nello specifico mercato di tale bene, che, col passare del tempo, finisce per provocare una bolla o una crisi. Il panico è una ‘figura’ che rappresenta la situazione che appare nello stato d’animo degli operatori, manifestandosi poi nei mercati, successiva allo scoppio di una bolla, o alla diffusione di una notizia non aspettata. Durante le fasi di panico, gli investitori fanno fatica a ragionare in modo razionale e logico, poiché prevale l’emotività e altri sentimenti irrazionali.

<sup>41</sup> Per verificare la stabilità di un modello di una serie temporale possono essere utilizzate le cosiddette *rolling windows*. Per procedere con questo metodo si sceglie la dimensione della finestra o dell’intervallo temporale, cioè il

In generale, se valesse l'ipotesi di efficienza di mercato, il coefficiente di correlazione  $\rho_1$  dovrebbe essere più elevato durante il primo periodo di analisi (il mercato è di nuova costituzione e non può ancora essere sufficientemente stabile per considerarlo efficiente) per poi diminuire e tendere progressivamente a zero a mano a mano che il campione osservato si allarga (cioè che passano gli anni) perché il mercato azionario si stabilizza. Questo in sintonia con le assunzioni delle EMH, secondo le quali i prezzi dei titoli seguono un processo stocastico di tipo *random walk*: ciò implica che i rendimenti siano non correlati (il dato passato non influenza quello futuro) e che il coefficiente di correlazione  $\rho_1$  sia nullo.

**Grafico 2.2** Coefficienti di autocorrelazione di primo ordine dei rendimenti mensili dello S&P Composite



I dati sono stati costruiti utilizzando una rolling window di 5 anni; il periodo temporale analizzato va dal gennaio 1871 ad aprile 2003.

Fonte: Lo (2005)

Dalla figura appare evidente che l'ipotesi di essere in presenza di un processo stocastico di tipo random walk non è completamente soddisfatta: il livello di efficienza del mercato varia in maniera tendenzialmente ciclica. È interessante osservare che negli

---

numero di osservazioni consecutive per ogni rolling window (essa dipende dalla numerosità campionaria e dalla periodicità delle osservazioni); nell'esempio osservato si è quindi calcolato il coefficiente di correlazione per ogni finestra temporale (composta da 60 osservazioni) facendola traslare ogni volta di un'osservazione e ottenendo tutti i valori da analizzare.

anni precedenti la crisi del 1929 sono stati registrati i valori più elevati del coefficiente di correlazione (mercato poco stabile) mentre durante il decennio del 1950 esso registrò valori vicini allo zero<sup>42</sup>.

Nella teoria delle ipotesi di mercato efficiente non si considerano cicli e stagionalità, ma, soprattutto per semplificare i modelli e le analisi empiriche, si ipotizza un mercato stabile e sempre in equilibrio.

In termini di strategie di investimento, la contrapposizione fra *Random Walk Hypothesis* (EMH e mercato in equilibrio) e l'evidenza empirica che non conferma un livello costante di efficienza nel mercato, ma piuttosto una ciclicità, un *continuum*<sup>43</sup>, ha una certa corrispondenza con due tipologie di *asset allocation*: quella strategica (piuttosto stabile, obiettivo di lungo periodo) e quella tattica (dipendente dai movimenti del mercato).

### **Crescita e valore come fattori di rischio**

Mentre nella struttura teorica delle EMH è chiaro quali siano o meno i *fattori di rischio* di un mercato finanziario<sup>44</sup>, nel nuovo contesto delle AMH non ci sono vincoli o distinzioni su cosa possa essere considerato un fattore di rischio. Secondo il *framework* delle teorie adattive, dipende dalla natura degli investitori e dalle condizioni del mercato in un certo momento, se una determinata caratteristica è considerata rischiosa e viene riflessa ('prezzata') nel premio al rischio di un titolo azionario<sup>45</sup>. Per comprendere quali caratteristiche sono incorporate non è stato ancora elaborato un metodo analitico-formale, tuttavia le AMH propongono dei criteri qualitativi: l'elemento che più determina quali siano i fattori di rischio sono le preferenze degli individui e in che modo essi si comportano tra loro, rispetto alle risorse dell'«ecosistema» finanziario.

---

<sup>42</sup> Una possibile spiegazione della stabilità del mercato azionario in questi anni può essere la fine della Seconda Guerra Mondiale e il periodo della *Great Modulation* (v. *infra*).

<sup>43</sup> Nella teoria delle AMH il grado di efficienza di un mercato finanziario non è una condizione *a priori*, ma dipende da come i partecipanti si adattano alle diverse condizioni continuamente in evoluzione.

<sup>44</sup> In un mercato finanziario il rischio principale è quello di ottenere dei rendimenti diversi, minori, rispetto a quelli attesi. Il rischio rappresenta una perdita di una posizione o nel portafoglio investito in un determinato arco temporale a causa di modificazioni di alcune variabili, per le quali si distinguono diverse tipologie di rischio, ad esempio:

- rischio di tasso di interesse: deriva dalle variazioni del tasso di interesse;
- rischio di tasso di cambio: deriva dalle variazioni del tasso di cambio;
- rischio azionario: deriva da andamenti negativi di titoli o indici;
- rischio commodity: deriva dall'andamento delle materie prime che fungono da sottostante per molti titoli derivati.

<sup>45</sup> Le AMH propongono infatti una natura ciclica dei fattori di rischio: ciclicità legata a quella del processo evolutivo di modifica che avviene nei mercati finanziari.

Elencando poi tutti i possibili fattori di rischio<sup>46</sup> ne si analizzano, qualitativamente, le potenziali conseguenze per varie ipotetiche o reali e attuali condizioni di mercato. Un tale procedimento di analisi non è così frequente nelle scienze economiche e tantomeno nel ramo della finanza, ma, d'altro canto, la teoria delle ipotesi di mercato adattivo trae le sue origini da vari concetti derivanti da discipline descrittive e qualitative, ed è perciò un valido complemento inter-disciplinare al rigoroso approccio empirico-computazionale tipico dell'economia e della finanza.

Un'*asset allocation* attiva non sempre può essere appropriata per certi investitori e in certe condizioni di mercato; dati i continui cambiamenti (negli investitori, nell'ambiente e nelle dinamiche) appare infatti complicato sviluppare un portafoglio attivo che possa essere sempre in linea con gli obiettivi dell'investitore. Analizzare e valutare tutti gli elementi precedentemente descritti non è affatto semplice ed immediato, al contrario, la scarsità di dati riguardanti le preferenze degli individui, la numerosità e le parecchie e complesse interazioni fra essi, rende molto complicata la procedura di analisi qualitativa.

### **2.5.3 Dinamiche di mercato ed innovazione tecnologica**

L'ultima applicazione della teoria delle AMH all'attività di gestione degli investimenti è il fatto che l'*innovazione* sia la soluzione 'essenziale' per la *sopravvivenza*. Se si analizza un mercato finanziario con l'ottica delle ipotesi adattive, il fine ultimo di ciascun individuo che vi opera è la sopravvivenza, cioè la non-eliminazione, la non-uscita dall'ecosistema. La massimizzazione del profitto e dell'utilità sono singoli aspetti, mentre l'obiettivo principale che determina le dinamiche e, quindi, anche il processo evolutivo è *sopravvivere*.

I gestori di investimenti, o *investment managers*, devono ampliare il più possibile il loro bagaglio conoscitivo e le loro capacità e competenze, per far fronte alla 'lotta alla sopravvivenza' e per 'adattarsi', in modo più adeguato, alla vasta varietà di situazioni di mercato, continuamente in evoluzione. I manager devono avere la capacità di innovare e

---

<sup>46</sup> Ad esempio: preferenze e propensioni degli investitori, grandezza della popolazione (numerosità degli operatori nel mercato), caratteristiche del mercato (risorse, controlli istituzionali, vincoli giuridici, regimi fiscali) ed eventuale presenza ed importanza di competizione, innovazione e selezione naturale.

sapersi innovare costantemente: l'innovazione<sup>47</sup> e l'adattabilità (come la flessibilità) sono i fattori guida per la sopravvivenza all'interno di un mercato finanziario.

## **2.6 Il cambiamento nel paradigma classico di investimento: il concetto di New World Order elaborato da Lo**

---

### **2.6.1 Principi generali del modello tradizionale di investimento**

Il modello classico del processo di investimento è basato congiuntamente su cinque principi che influenzano, a loro volta, tutto il settore dell'*investment management*, dagli strumenti e prodotti/servizi finanziari offerti nel mercato. Come tutte le teorie, questi postulati sono approssimazioni e semplificazioni di una realtà molto più complessa:

1. la relazione rischio-rendimento è positiva;
2. nel modello CAPM (v. *supra* cap. 1) il premio al rischio di un titolo azionario è misurato dal coefficiente  $\beta$ , mentre  $\alpha$  misura il rendimento in eccesso medio rispetto al portafoglio *benchmark*;
3. un investimento vantaggioso è, nella maggior parte dei casi, quello ottenuto attraverso un portafoglio azionario diversificato rispetto al mercato (attraverso la diversificazione si riduce l'impatto del *rischio idiosincratico* o *specifico* dell'asset finanziario);
4. l'*asset allocation* strategica è la decisione più importante che un investitore compie, sia tenendo conto della sua propensione al rischio, sia dei suoi obiettivi;
5. gli investitori detengono azioni per un periodo medio-lungo.

Il primo principio, quello della relazione tra rischio e rendimento, include in sé, altri requisiti che vengono implicitamente accettati nello schema generale di riferimento del modello di investimento:

- I. la relazione rischio-rendimento è lineare;
- II. la relazione è stabile nel tempo e in tutte le situazioni;
- III. i parametri possono essere stimati;
- IV. gli investitori hanno aspettative razionali;
- V. i rendimenti sono stazionari (la loro distribuzione congiunta non varia nel tempo);

---

<sup>47</sup> A. Lo [2005] sostiene che la teoria delle EMH, la teoria di portafoglio e il CAPM, intesi come schemi decisionali, non sono caratterizzate da innovazione e, perciò, non consentirebbero la sopravvivenza a coloro che li applicano concretamente nelle strategie e nella gestione degli investimenti (e, anche più in generale, nel mercato).

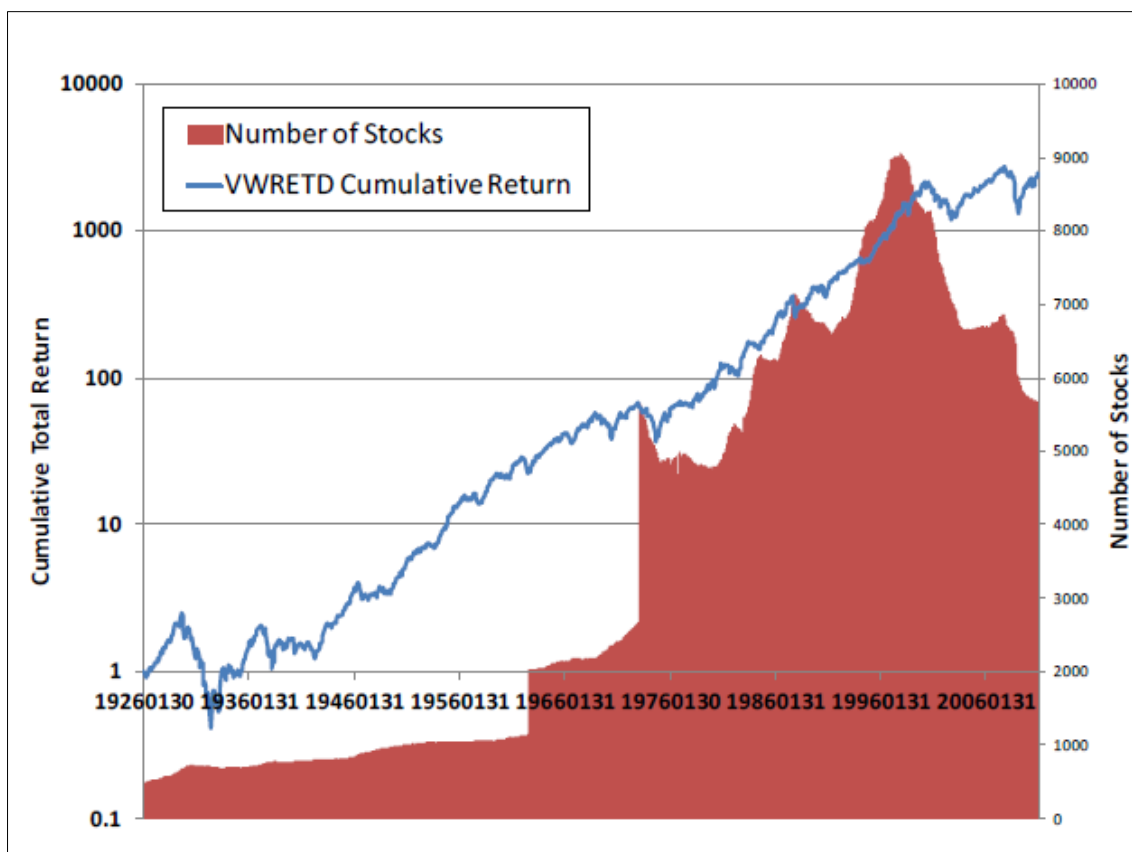


VI. i mercati sono efficienti.

Tutte queste assunzioni possono essere analizzate dal punto di vista teorico ed empirico, ma, già in partenza si è consapevoli del fatto che le teorie sono astrazioni finalizzate a descrivere una realtà concreta, le quali comportano condizioni ed ipotesi semplificatrici di essa. Piuttosto di indagare sulla veridicità di questi sei presupposti è più utile studiarne gli errori che causano e indagare se questi siano abbastanza limitati da poter essere trascurati.

In un suo recente studio, A. Lo [2012] analizza il mercato azionario statunitense per verificare le ipotesi sopra elencate ne costituissero un'approssimazione sufficientemente veritiera ed accettabile. Nel Grafico 2.3 è raffigurato l'andamento dei rendimenti cumulati del *CRSP Value-Weighted Stock Market Index* da gennaio 1926 a dicembre 2010.

**Grafico 2.3** Rendimenti cumulati del *CRSP Value-Weighted Stock Market Return Index* (1926-2010)



L'andamento dei rendimenti cumulati è fatto su una scala semi-logaritmica (ciò significa che una stessa distanza verticale corrisponde alla medesima percentuale di rendimento), mentre il numero delle azioni si basa su una scala numerica semplice. Il periodo di riferimento è 30/01/1926 – 31/01/2006.

Fonte: Lo (2012)

Dal grafico si denota che dagli anni Quaranta ai primi anni del nuovo millennio, il mercato azionario statunitense era una ‘fonte’ affidabile di guadagno. Infatti i rendimenti cumulati sono descritti da una curva logaritmica quasi lineare e crescente. Questi sei decenni, seguenti al periodo della *Great Depression* (la “Grande epressione” causata dal crollo finanziario del 1929), sono denominati il periodo della *Great Modulation* (la “Grande modulazione” o “aggiustamento”) perché il mercato finanziario era molto stabile ed era molto profittevole e sicuro investire in un portafoglio ben diversificato in titoli azionari, anche con un’ottica di lungo periodo.

In un contesto così caratterizzato, i requisiti impliciti prima elencati (I – VI) erano un’approssimazione più che accettabile del mercato azionario di quei decenni. Ed è interessante notare che è proprio durante questi anni che si sono sviluppate le più importanti teorie di portafoglio, il modello CAPM, l’asset allocation 60/40 (60% investito in azioni, 40% investito in obbligazioni), la relazione lineare rischio-rendimento. Lo vuole comunque porre l’attenzione sull’ultimo decennio analizzato: il mercato, e il sistema finanziario in generale, ha subito (e sta subendo tuttora) un’anomalia temporanea oppure ci sono degli indizi empirici sul fatto che questi anni rappresentino l’inizio di un cambiamento, che egli chiama «*New World Order*»?

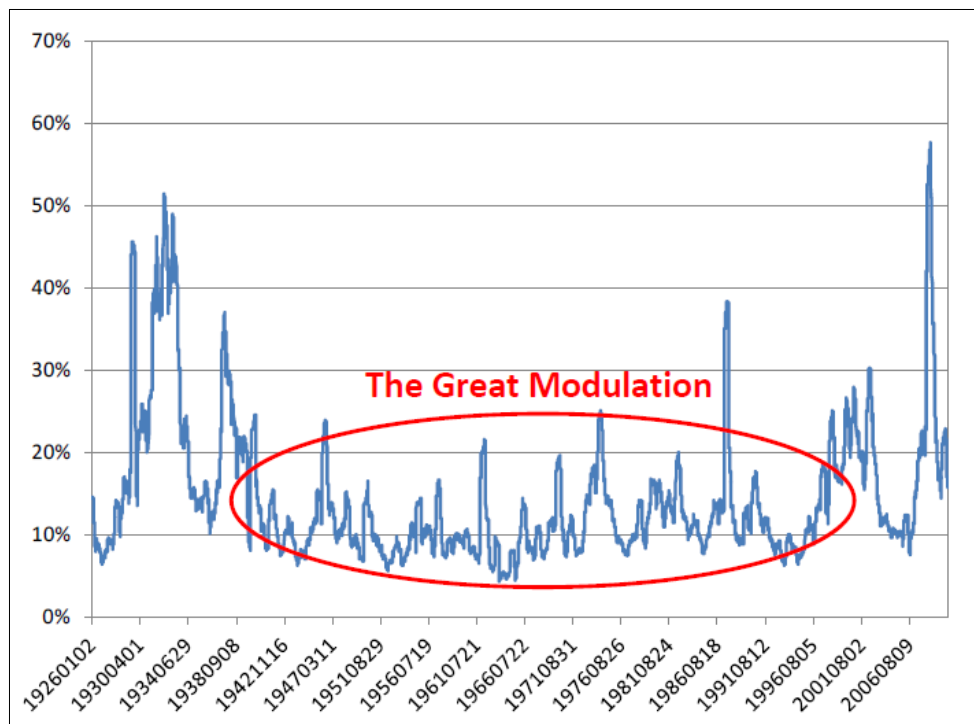
### **2.6.2 Il *New World Order***

Per introdurre l’analisi delle diversità tra i decenni del XX secolo e i primi anni del XXI secolo del mercato azionario americano si considera il parametro della *volatilità*, intesa come misura della rischiosità, raffigurato nel Grafico 2.4. Paragonato al grafico precedente, si possono trarre le medesime conclusioni: durante il periodo della *Great Modulation*, la volatilità registrata è molto contenuta, soprattutto se paragonata a quella degli anni post-crisi del ’29 e dell’ultimo decennio. Il picco finale corrisponde al periodo successivo al crack finanziario della società bancaria Lehman Brothers, evento che causò e segnò ‘convenzionalmente’ l’inizio della recente crisi finanziaria ed economica mondiale.

Altre caratteristiche e parametri di un qualsiasi mercato finanziario attuale (come ad esempio il volume di scambi nel trading, il valore di capitalizzazione, i tempi di esecuzione della compravendita finanziaria, il numero di attività disponibili nei mercati e degli investitori che operano in essi) conducono alla seguente conclusione: i mercati finanziari odierni sono, in sintesi, molto più vasti, molto più dinamici (nelle operazioni

intese in modo generale) e, sostanzialmente, profondamente differenti da quelli di qualche decennio fa.

**Grafico 2.4** Volatilità dei rendimenti del CRSP: *Value-Weighted Stock Market Index*



Per la costruzione del grafico sono state calcolate le volatilità giornaliere attraverso una *trailing window* di 125 giorni (periodo di riferimento 02/01/1923 – 31/12/2010)

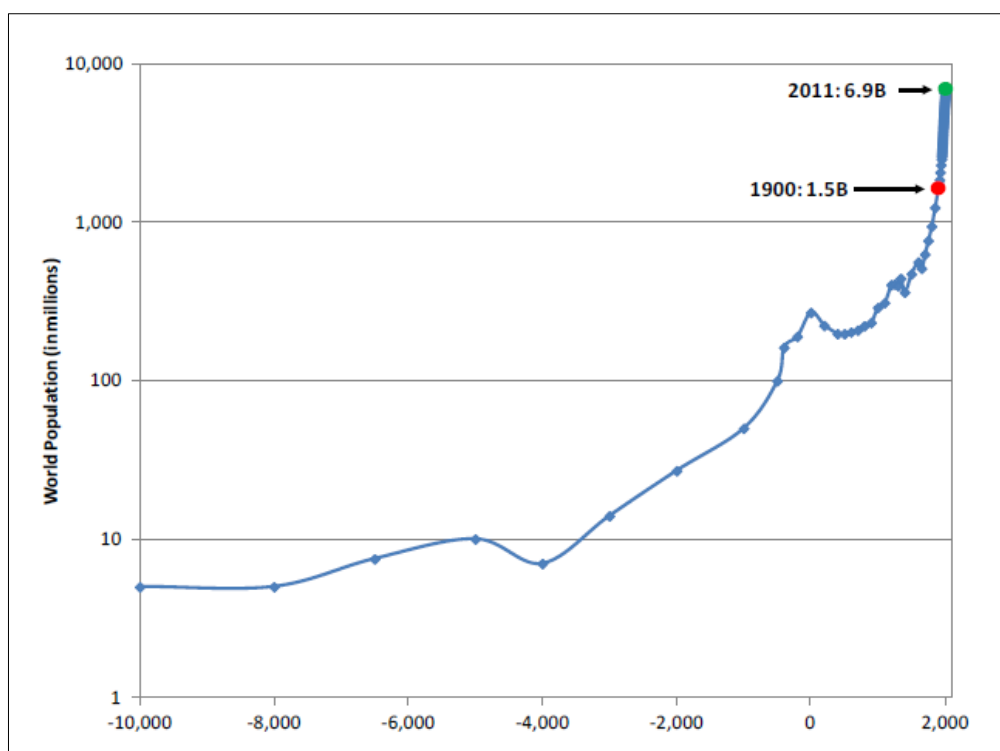
Fonte: Lo (2012)

### **Similitudini con la crescita della popolazione**

L'andamento della crescita dei mercati finanziari ha delle similitudini con quello relativo alla crescita della popolazione umana. Anche questa serie storica, in scala logaritmica, è descritta da una curva crescente ed esponenziale. Osservando la Figura 2.3 si può dividere l'andamento della popolazione in tre periodi: l'età della pietra (dal 10000 al 4000 a. C.) caratterizzata da un basso tasso di crescita, l'età del bronzo (dal 4000 a. C al 1800 d. C.) caratterizzata da un tasso di crescita moderato, e, successivamente, la crescita esponenziale a partire dalla Rivoluzione industriale. Attorno al 1900 si è stimato che la popolazione mondiale fosse attorno al miliardo e mezzo di individui, mentre, attualmente, si contano circa 7 miliardi di abitanti. In un secolo, la popolazione terrestre è quadruplicata e l'aspettativa di vita (perlomeno nei Paesi avanzati e in via di sviluppo) è cresciuta: gli individui lavorano quindi per sopravvivere e manifestano, con gli anni, la necessità di investire parte dei loro risparmi

allocandoli in strumenti e attività finanziarie, che nel tempo, si sono sempre più moltiplicate, evolute e perfezionate. L'obiettivo di investire i risparmi per assicurarsi un reddito stabile per il periodo del pensionamento (quando l'individuo non percepisce più il reddito salariale) e, da questo, il crescente numero di nuovi investitori privati, hanno provocato lo sviluppo dimensionale (anche in termini monetari di capitalizzazione) dei mercati finanziari e della complessità delle interazioni che avvengono fra i diversi operatori.

**Figura 2.3** Popolazione mondiale dal 10000 a. C. ad oggi



La popolazione, in milioni, è espressa in scala logaritmica.  
Fonte: Lo (2012)

Il recente smisurato aumento della popolazione è una diretta conseguenza degli sviluppi della tecnica e dell'*innovazione tecnologica* tramite le quali l'uomo ha potuto sfruttare e manipolare le risorse naturali, anche oltre i suoi fabbisogni di sopravvivenza.

Il successo riproduttivo (v. *infra* 3.1) dell'*Homo sapiens* è dovuto al progresso tecnologico, alle continue scoperte in ambito scientifico (in generale) e al potenziamento produttivo in tutti i settori in cui opera, dall'agricoltura (settore primario), all'informatica (settore terziario). Questi sviluppi e miglioramenti sono, in gran parte, il risultato delle *forze economiche competitive* (forze della selezione

naturale), le quali, tramite l'innovazione tecnologica, fanno evolvere l'intero sistema in cui l'uomo vive e rendono velocemente obsolete anche le innovazioni più recenti.

Considerando ed ampliando l'analisi attraverso un punto di vista macroeconomico e geopolitico gli equilibri mondiali sono profondamente cambiati negli ultimi decenni. Per gran parte del XX secolo, gli USA erano senza dubbio la prima forza economica e industriale, motore trainante dell'economia mondiale e dell'innovazione tecnologica. Negli ultimi anni, gli Stati Uniti sono stati affiancati in questo ruolo di leader economico e messi in competizione da Paesi come il Giappone, l'Europa, la Cina e l'India. Il boom delle economie di questi Paesi, congiuntamente agli effetti provocati dalla globalizzazione, ha fortemente influenzato tutte le variabili (ad esempio offerta e domanda di lavoro, offerta e domanda di beni e servizi, costi di produzione e distribuzione, salari relativi, tassi di cambio, ...) e gli equilibri macroeconomici mondiali che erano stati raggiunti durante il periodo della *Great Modulation*.

Tutte queste trasformazioni del sistema economico globale si riflettono in ultima istanza, attraverso l'economia reale, sugli andamenti delle quotazioni degli *asset* finanziari e sulle dinamiche ambigue e complesse che generano un'instabilità nei mercati finanziari sempre più frequente e 'contagiosa'.

Nel contesto economico mondiale odierno, risultato delle dinamiche descritte in precedenza e tuttora in continua evoluzione, le assunzioni riguardanti la relazione fra rendimento e rischio (v. *supra* 2.6.1) non sono molto plausibili per elaborare modelli veritieri e strategie di investimento affidabili. L'innovazione tecnologia applicata ai mercati finanziari comporta duplici risvolti: da un lato le opportunità di investimento sono numerosissime e a livello mondiale, dall'altro, queste interconnessioni facilitano l'espansione di eventuali crisi o, 'semplicemente' di eventi singoli particolari come crisi, bolle, crolli, *mania*, *panics* che possono esaurirsi in breve tempo o comportare effetti concatenati ancora più gravosi, come quelli a cui stiamo tuttora assistendo.

## **2.7 Conclusioni**

---

Se i mercati finanziari fossero stabili e gli investitori operassero sempre in modo razionale, la teoria delle EMH risulterebbe esauriente nell'analisi descrittiva e una buona approssimazione della realtà empirica utile nell'elaborazione di applicazioni pratiche e di processi di investimento. Gli investitori, come dimostratosi da molti studi,

manifestano spesso attività decisionali basate su euristiche, le quali provocano *distorsioni comportamentali* che si riflettono, in ultima istanza, nelle azioni operative e nelle interazioni fra altri operatori di mercato. In contesti così complessi e poco stabili, le ipotesi di efficienza diventano poco attendibili e incapaci di considerare le ‘imperfezioni’ più o meno importanti che si verificano nei mercati finanziari.

Ispirato dalle recenti ricerche nel campo delle *neuroscienze cognitive*, che hanno saputo coniugare aspetti psicologici e di finanza comportale, Andrew W. Lo ha elaborato la teoria delle *Adaptive Markets Hypothesis*. Questo nuovo filone teorico, che non vuole contraddire ma porsi come alternativa o completamento delle ipotesi di mercato efficiente, si rifà ai concetti basilari delle *teorie evoluzionistiche* e della *sociobiologia* per applicarli nell’analisi e nella spiegazione delle dinamiche che si verificano nei mercati finanziari. In essi si può assistere ad un *processo evolutivo* in cui, attraverso azioni competitive volte alla sopravvivenza e all’*adattamento* (grazie all’innovazione e alla tecnologia), i singoli operatori e le diverse *specie* di investitori vincono le forze della *selezione naturale*, modificano e ‘modellano’ l’intero «ecosistema» finanziario.

Le principali implicazioni derivanti dalle ipotesi di mercato adattivo riguardano: il premio al rischio azionario (che non risulta più costante nel tempo, ma varia in base all’andamento del titolo e agli investitori coinvolti negli scambi), l’*asset allocation* (essa può essere più remunerativa se si considera la dipendenza del mercato all’adattamento sistematico comportamentale degli operatori), le attività finanziarie (che tendono a manifestare una ciclicità nelle performance dei rendimenti), l’efficienza del mercato (essa non è uno ‘stato’ immutabile, ma in continua variazione), le preferenze e le propensioni degli operatori e delle istituzioni dei mercati finanziari (esse variano e si modificano all’interno del processo evolutivo).

Nonostante le AMH facciano parte di un *framework* qualitativo ancora poco conosciuto e contestualizzato, esse possono essere applicate concretamente soprattutto nell’ambito dell’*asset allocation*, della gestione del rischio e della consulenza finanziaria. In particolare, i consulenti della gestione degli investimenti rivestono un ruolo centrale nell’*asset allocation* (e, in generale, nell’intera attività dell’*investment management*); la finanza comportamentale e le nuove teorie finanziari evoluzionistiche hanno ampliato le competenze e i servizi svolti da questa professione. Questi professionisti devono

considerare e dare la giusta ponderazione alle preferenze e alle propensioni degli individui in maniera tale da:

1. essere in grado di educare gli investitori spiegare loro tutte le potenziali distorsioni comportamentali che possono verificarsi;
2. assistere i clienti nel gestire le distorsioni comportamentali eventualmente modificando le propensioni al rischio per renderle più adeguate agli obiettivi personali e alle specifiche condizioni attuali dei mercati;
3. ricercare o elaborare un potenziale processo di investimento che sia in linea con le propensioni al rischio dell'investitore modificate.

È chiaro che questi nuove competenze e servizi siano molto più complicati rispetto a come sono qualitativamente descritti. Il consulente, per ricercare e comprendere in maniera più completa e corretta gli obiettivi e le preferenze del suo cliente deve, innanzitutto, operare con l'obiettivo di massimizzare l'utilità e il benessere dell'assistito (il cosiddetto "fare l'interesse del cliente") e instaurare delle relazioni di lungo termine basate sulla fiducia.

Inoltre egli deve dimostrare di avere una certa competenza in ambito dei mercati finanziari e saper coglierne le dinamiche e le variazioni. Il consulente avrà più conoscenze, paragonato ai suoi clienti, sui modelli dinamici e i loro aspetti analitici, sulle diverse tipologie di asset finanziari, sui cicli di mercato e sulle condizioni di business vigenti. Per svolgere al meglio queste attività, il consulente finanziario dovrà rendersi consapevole ed educarsi in merito alle ultime scoperte della neuroscienza e della finanza comportamentale, includendo inoltre, nozioni basilari di psicologia applicata agli investitori per comprendere meglio gli obiettivi, le propensioni, le aspettative e i limiti cognitivi-razionali del cliente, con lo scopo finale di proporre l'investimento finanziario più adeguato.

Per quanto riguarda l'*asset allocation*, un ulteriore applicazione pratica delle AMH rispetto a quelle già elencate nel paragrafo 2.5.2 è la seguente: poiché gli investitori sono più consapevoli del rischio e del rendimento che il loro portafoglio apporta, rispetto alle singole quote in cui il patrimonio in esso contenuto è diviso in titoli o strumenti finanziari (detto in altro modo, rispetto ai singoli 'pesi' degli asset), rappresentare l'asset allocation in unità di rischio (*risk units*) sarebbe più utile e intuibile, specialmente durante i periodi in cui nei mercati non si presentano le

condizioni di efficienza e stabilità (specificare l'asset allocation in termini di rischio porterebbe dei benefici durante i periodi di elevata volatilità: l'esposizione in asset rischiosi sarebbe diminuita per mantenere la rischiosità stabilità). Se i premi al rischio non si modificassero e fossero costanti nel tempo (come stabilito nelle EMH), i pesi del portafoglio sarebbero sempre corretti, ma se, come attesta l'evidenza empirica, si modificano continuamente, in base alle condizioni di mercato, sarebbe auspicabile e più vantaggiosa un'*asset allocation adattativa* caratterizzata dai pesi di portafoglio denominati in base alla rischiosità («*risk denominated portfolio weights*», Lo [2012]). Un approccio più integrato sarebbe l'elaborazione e l'utilizzo di *operatori di stima statistica adattativi* per misurare le varie caratteristiche decisionali-comportamentali degli investitori in base a determinate condizioni di mercato con lo scopo di sviluppare strategie di investimento e di asset allocation che tengano conto del maggior numero di variazioni contestuali e operative.

Le implementazioni applicative delle AMH possono presentare innumerevoli risvolti e differenziazioni. Esse sono molto più complesse rispetto alla 'mera considerazione' qualitativa delle euristiche negli schemi comportamentali degli investitori nel modello di processo di investimento. L'applicazione della tecnologia all'operatività dei mercati finanziari (ad esempio l'esecuzione automatica di algoritmi durante le operazioni di trading, misure statistiche molto perfezionate, database online diffusamente fruibili, ...) ha risolto molte problematiche relative all'adeguatezza, all'operatività e alla redditività nei processi di investment management e asset allocation. Tuttavia il contesto finanziario di mercati globalmente interrelati è in continua evoluzione e ciò comporta un continuo 'adattarsi' da parte di operatori ed accademici del settore: una maggiore consapevolezza di questa situazione e una maggiore considerazione della teoria delle Adaptive Markets Hypothesis diventa, quindi, quasi 'imprescindibile'.



## 3. APPLICAZIONE DELLE AMH: MODELLO EVOLUZIONISTICO

---

### 3.1 Introduzione

---

In quasi tutte le teorie economiche si assume che l'individuo, in quanto *Homo oeconomicus*, sia pienamente razionale nelle aspettative e nei processi cognitivi e agisca per massimizzare la sua funzione di utilità attesa e il suo benessere. A tale visione, utilizzata anche nell'elaborazione di politiche economiche e monetarie, si contrappone la teoria della *bounded rationality*, elaborata da H. Simon, secondo cui l'uomo non è completamente razionale, ma condizionato da limiti cognitivi, conoscitivi e temporali. L'evidenza empirica dimostra che l'uomo non agisce sempre razionalmente, ma attua spesso decisioni in modo casuale e distorto, che risultano non ottimali per il singolo. Tali distorsioni comportamentali emergono a seguito del processo evolutivo e delle forze di selezione naturale che modificano le caratteristiche dell'individuo e della specie. È per questo motivo che molte teorie descrittive, appartenenti a discipline come la sociobiologia e la psicologia dell'evoluzione, hanno sviluppato 'schemi' evolucionistici basati su criteri di indagine e analisi più ampi, che considerano e valutano gli effetti delle forze della selezione naturale sulle caratteristiche fisiche e socio-culturali e dell'uomo.

Sulla base di tali ricerche e applicando alcuni concetti basilari della teoria dell'evoluzione (v. cap 2), gli studiosi Thomas J. Brennan<sup>1</sup> e A. W. Lo hanno elaborato un modello evolucionistico a scelta binaria che definiscono «Evolutionary Model of Bounded Rationality and Intelligence». Lo scopo di questo modello è quello di simulare ed analizzare i processi decisionali e le tipologie comportamentali manifestate dagli individui appartenenti ad una popolazione, attraverso una scelta fra solo due alternative, in un *framework* statistico-matematico molto semplificato rappresentante il contesto ambientale (l'ecosistema) di riferimento. Anche se molto semplice nelle ipotesi e nei risultati finali, attraverso il modello si mette quantitativamente e qualitativamente in evidenza come gli individui di una specie modificano le proprie caratteristiche

---

<sup>1</sup> Thomas J. Brennan (v. <http://today.law.harvard.edu/thomas-j-brennan-01-join-harvard-law-faculty/>) è attualmente docente di *tax e finance* alla Harvard Law School; sebbene sia docente ed esperto di finanza pubblica Brennan possiede inoltre competenze matematiche e di portfolio management.

comportamentali facendone emergere alcune distorsioni in base al contesto e alle forze della selezione naturale, e intraprendono talvolta processi decisionali poco vantaggiosi non in modo perfettamente razionale, come invece ipotizzato nella teoria economica classica. Il singolo mette in pratica un modo di pensare e di agire “intelligente”, cioè un comportamento non razionalmente assoluto ma caratterizzato da capacità e competenze cognitive proprie ed influenzate dall’ambiente circostanze e dal processo evolutivo. Le specificità dell’ecosistema, differenziate sulla base degli effetti sulla popolazione in rischi idiosincratici e sistematici, hanno un ruolo fondamentale nel comportamento, nel successo riproduttivo<sup>2</sup> e nella sopravvivenza. Come descritto negli ultimi paragrafi, dall’interpretazione della simulazione computazionale Lo [Brennan-Lo, 2012] propone una definizione particolare di forma di *intelligenza*, cioè essa è la correlazione positiva fra azione-comportamento e successo riproduttivo. Qualora questa correlazione non sia già esistente il singolo deve sostenere dei costi affinché il suo comportamento renda possibile la sopravvivenza della specie(v. *infra*); essi rappresentano delle limitazioni all’intelligenza (concetto simile a quello della teoria della *bounded rationality*) causate dalle forze della selezione naturale e dalle modifiche che esse apportano nelle dinamiche all’interno di una popolazione.

Prima di illustrare il modello sia qualitativamente che analiticamente e i risultati ai quali esso conduce, di seguito viene brevemente descritta la teoria della razionalità limitata, da cui prende nome il modello stesso.

### **3.2 Il concetto e la teoria della *bounded rationality***

---

La teoria della *bounded rationality* o razionalità limitata è stata sviluppata da Herbert A. Simon<sup>3</sup>. Egli è un “pensatore innovativo eclettico” che ha contribuito alla ricerca in diversi ambiti accademici: psicologico, economico, manageriale, informatico e filosofico-scientifico. Gli studi sulla razionalità e sui processi decisionali sono stati di fondamentale importanza per il successivo sviluppo di concetti scientifici (applicati poi in ambito tecnico) come l’intelligenza artificiale, l’elaborazione delle informazioni, la

---

<sup>2</sup> Il *successo riproduttivo*, dal punto di vista biologico, è il concetto che esprime la ‘vincita’ di un singolo individuo o di un’intera popolazione (o specie) contro le forze della selezione naturale, dal momento che esso sopravvive e si riproduce attraverso la sua prole, facendo aumentare il numero di individui appartenenti alla stessa specie.

<sup>3</sup> Nel suo primo studio del 1955 che si intitola “A Behavioral Model of Rational Choice”, Simon elaborò un modello comportamentale che potesse descrivere le scelte razionali, o, come sviluppò in seguito, limitatamente razionali.

strategia dell'organizzazione, il *problem solving*, i sistemi complessi e le simulazioni al computer.

### **3.2.1 Modelli di razionalità assoluta e limitata**

Nelle scienze economiche, in particolare nel ramo della microeconomia, la razionalità dell'individuo è implicita nelle sue aspettative e nell'obiettivo di massimizzare la sua funzione di utilità e il suo benessere. La singola persona è posta all'interno di gruppi, di istituti, di collettività, cioè in varie *società umane*: le scelte economiche, di conseguenza, non sono proprie del singolo in senso stretto, ma del singolo in quanto parte di una data società. Tuttavia, per formalizzare i postulati di molti teoremi e teorie economiche, si considera il singolo che è detto *Homo oeconomicus* poiché, utilizzando questo aggettivo, si sottintende che egli sia anche "razionale". Nel modello di *razionalità assoluta*, l'individuo che deve prendere una decisione è inserito in un contesto con le seguenti caratteristiche:

1. il problema di ottimizzazione e l'obiettivo sono perfettamente comprensibili;
2. le informazioni relative a tutte le alternative sono disponibili gratuitamente ed istantaneamente;
3. tutti i possibili "stati" futuri sono conosciuti;
4. le alternative si possono confrontare fra loro senza alcun problema;
5. il decisore è solo ed isolato, non è influenzato da niente e nessuno;
6. ognuno sceglierà sempre l'alternativa migliore.

Queste condizioni, come si può bene immaginare, sono molto 'estreme' e raramente si verificano nella realtà. L'evidenza empirica riscontra infatti che il problema non è mai completamente definito in tutte le sue varianti e l'obiettivo da massimizzare non è unico. Ancora, le informazioni non sono immediatamente e totalmente disponibili, ma, anzi, il loro reperimento comporta dei costi; il singolo individuo è influenzato dalla società, dalle preferenze insite in essa e dalla circostanza in cui vive. Tuttavia, l'interpretazione 'ristretta' della persona completamente razionale (*Homo oeconomicus*) consente di elaborare teorie rigorose applicate all'analisi di molti fenomeni economici; così facendo, però, si ignorano alcuni aspetti sociali-comportamentali che hanno rilevanza nella realtà concreta, manifestandosi in particolare sulle dinamiche dei mercati e del sistema economico in generale.

Elaborata da Simon nel 1955, perfezionata negli anni e successivamente applicata in svariate discipline, la teoria della razionalità limitata fu inizialmente proposta come una base alternativa per la formalizzazione matematica dell'attività cognitiva e decisionale utilizzata per descrivere azioni e comportamenti umani che rappresentano condizioni, ipotesi o effetti nella maggior parte dei modelli economici e per lo sviluppo di teorie del comportamento di un individuo o di un gruppo di individui che prendono decisioni in un contesto organizzato. Secondo la teoria della *bounded rationality* il processo decisionale dell'individuo umano non è completamente razionale, bensì condizionato da limiti cognitivi, conoscitivi e temporali entro i quali deve valutare l'insieme delle alternative e fare una scelta. Inoltre, come anticipato nel capitolo precedente, a causa di una razionalità limitata, gli individui non possiedono le capacità, le risorse, i mezzi computazionali adatti e tutte le informazioni disponibili per poter essere nelle condizioni di effettuare la scelta ottimale migliore, e semplificheranno il processo decisionale nelle sue scelte 'accontentandosi' dell'alternativa più soddisfacente<sup>4</sup> (criterio dello "satisficing"). Questo aspetto viene riscontrato nella realtà dal momento che decisioni perfettamente razionali e ottimali sono spesso non realizzabili.

Simon propone un modello di rappresentazione del processo decisionale dell'uomo in cui le decisioni avvengono per mezzo di «processi iterativi e sequenziali» (v. Airoidi *et al.*, 2005) articolati nelle seguenti fasi:

1. il decisore parte da un insieme di aspettative iniziali;
2. una prima ricerca e reperimento di informazioni porta ad individuare possibili soluzioni;
3. l'individuo esamina e valuta una prima possibile scelta (essa può avere caratteristiche superiori o inferiori alle aspettative); si assiste perciò ad una modificazione e ad un adattamento delle attese (in base al ventaglio delle possibili soluzioni);
4. si prosegue nella valutazione di altre possibili soluzioni in modo sequenziale;
5. il decisore attua la scelta, quando: il tempo disponibile e le risorse sono ormai terminati, i costi di valutazioni sono troppo elevati, una soluzione risulta compatibile con le aspettative.

---

<sup>4</sup> Secondo questa visione, gli individui economici quindi sono degli "satisficer".

In questo schema non sono presenti le ipotesi elencate nel modello della razionalità assoluta. Ciò non significa che il processo decisionale e la scelta siano non razionali o irrazionali: essi sono *limitatamente* razionali. I singoli sperimentano limitazioni cognitive-razionali soprattutto quando devono formalizzare e risolvere problemi complessi o realizzare l'intero processo di un'informazione (o di una notizia) in tutte le tue fasi (ricezione, memorizzazione, elaborazione, comunicazione). Lo stesso Simon, nel suo lavoro "A Behavioral Model of Rational Choice" del 1955, sostiene che gli individui di un contesto economico applichino le *euristiche* (v. *supra* cap. 2) per ragionare e compiere delle decisioni di ottimizzazione, piuttosto che implementare processi più complessi. Questo perché le situazioni di scelta sono molto spesso complesse e calcolare l'utilità attesa per ogni singola alternativa richiederebbe molte capacità e molte risorse da impiegare in termini di costi di reperimento di tutte le informazioni necessarie e di tempo.

In aggiunta a quanto sopra, bisogna anche tenere in considerazione che gli individui, nella vita reale, prendono le decisioni mentre operano e vivono in ambienti organizzati e *gruppi sociali*. Nel prossimo paragrafo verrà illustrato il modello delle scelte a più attori in contesti organizzati sempre basato sulla razionalità limitata.

### **3.2.2 Gruppi sociali e contesti organizzati**

Per il perseguimento degli obiettivi, le persone interagiscono fra loro sia in modo occasionale, sia in situazioni stabili e organizzate; ogni scelta e azione del singolo ha degli effetti individuali e collettivi, perciò la valutazione ed attuazione di esse è fortemente influenzata dall'appartenenza del singolo a una determinata *società* (gruppo) od *organizzazione*. Nella realtà sono presenti molteplici tipologie di società umane<sup>5</sup> rappresentabili (e qui descritte) come "gruppi" sociali. Quando una persona appartiene ad un gruppo, il suo comportamento dipende molto dal sistema delle attese di comportamento che gli altri individui hanno su di lui: ciò provoca la formazione del *ruolo*. Questo è un concetto basilare per comprendere le interazioni comportamentali e le dinamiche che si osservano in un gruppo poiché esso rappresenta tutte le attese che gli altri hanno su una persona (che a sua volta ha aspettative sugli altri) in base alla posizione che ricopre nel gruppo. Se i ruoli sono coerenti e si completano

---

<sup>5</sup> Sono considerate società umane da varie discipline (dalla sociologia all'economia): le famiglie, i gruppi di amici, le imprese, le associazioni culturali, la popolazione di un paese o di uno stato, i partiti politici, ... .

vicendevolmente il gruppo sarà in equilibrio, altrimenti in esso nasceranno disaccordi e conflitti di ruolo che ne compromettono la stabilità<sup>6</sup>.

Dato che tipicamente i processi decisionali si svolgono all'interno di gruppi sociali composti da molti individui che generano ragionamenti intersecanti fra essi, ai limiti della razionalità del singolo si deve aggiungere la complessità, la casualità e l'ambiguità dei processi complessivi che avvengono all'interno delle società. In questo *framework* più allargato si inserisce un'ulteriore applicazione della teoria di Simon che si riscontra nei modelli di organizzazione aziendale. Essa si basa sul fatto che le decisioni gestionali riguardanti un completo business aziendale, suddiviso nelle singole unità operative (differenziate in base alle attività svolte in esse e agli obiettivi perseguiti), non sono conformi alle teorie neoclassiche che implicano la razionalità assoluta. Secondo la teoria di Simon, si sostiene che una società, un'organizzazione acquisisce il 'sapere' in due modi: o attraverso il singolo apprendimento dei suoi membri componenti o inserendo nuovi individui che apportano conoscenze che non si possedevano in precedenza. Inoltre, specifiche situazioni che riguardano l'apprendimento e il processo razionale per identificare la soluzione a problemi complessi, in un contesto organizzativo, possono essere analizzate ed interpretate utilizzando idee proprie delle neuroscienze cognitive (v. *supra* 2.3). Infatti, a causa della molteplicità di individui che compongono il tessuto organizzativo di un gruppo, le decisioni non sono sempre coerenti e largamente condivise fra tutti, ma frequentemente si incorre nella problematica della *concorrenza* tra le decisioni (tra diverse scelte) e della concorrenza fra soluzioni «presentate in modo compiuto e convincente» (le soluzioni risolvono il problema, percepito come rilevante e urgente, ma gli schemi mentali che le hanno sviluppate e gli interessi sottostanti sono diversi, v. Airoidi *et al.*, 2005). Inoltre, all'interno di un gruppo organizzato, le dinamiche e logiche comportamentali sono governate da regole organizzative, procedure e routine assodate; mentre le decisioni sono il prodotto della combinazione fra valori individuali e collettivi, schemi mentali, e strutture di ruoli.

---

<sup>6</sup> È evidente che se una stessa persona fa parte di diversi gruppi, le dinamiche saranno più complesse perché il suo comportamento sarà influenzato da più sistemi di aspettative che potrebbero essere tra loro incoerenti o incompatibili e far scaturire, quindi, delle tensioni rispetto al ruolo di quella persona.

### 3.2.3 Cooperazione, fiducia, altruismo

Qui di seguito, si descriveranno alcuni comportamenti e modi di agire, talvolta opposti nei loro obiettivi finali, che emergono in un gruppo a causa della struttura dei ruoli, basata dalle caratteristiche individuali e dalle aspettative reciproche. L'obiettivo di questa descrizione è fornire aspetti qualitativi utili a comprendere le dinamiche inter-individuali che si sviluppano all'interno di un determinato contesto di collettività, per poi utilizzarle nell'interpretazione e applicarle in un contesto biologico di *ecosistema*, in cui la collettività sarà rappresentata da una popolazione (o *specie*)

La cooperazione fra le persone che fanno parte di una società è una condizione necessaria per il loro funzionamento, poiché grazie ad essa, si raggiungono degli obiettivi non raggiungibili individualmente e, in tal modo, si produce una rendita. Teoricamente, ogni individuo dovrebbe ottenere una ricompensa in base al contributo che egli dà nella collaborazione all'interno del gruppo; tuttavia i singoli apporti e i risultati complessivi non si possono calcolare e conoscere con esattezza. Questo limite provoca comportamenti opportunistici ed egoistici da parte di alcune persone che, senza apportare alcun contributo, godono comunque della ricompensa complessiva. Questa tipologia di comportamenti sono causa ed effetto di una sfiducia diffusa e generale all'interno di un gruppo: le interazioni basate su un rapporto di fiducia sono collaborative, meno complesse e, in ultima istanza, più efficienti, se la fiducia viene meno si scaturiscono opportunismi da entrambi le parti e ciò provoca più difficoltà, più costi e quindi inefficienza nelle dinamiche interpersonali e collettive. Tali comportamenti si riscontrano in individui o che sottovalutano gli effetti negativi futuri come un'inutilità e un'inefficienza o che hanno tanto potere da non subirne tali conseguenze.

Oltre all'opportunismo nei gruppi si manifestano anche comportamenti altruistici che danno vantaggi e benefici ad un individuo per mezzo di un'azione o di un impiego di risorse fatti da un altro. In questo senso, l'altruismo non coincide con i comportamenti economici che hanno lo scopo di massimizzare il benessere individuale. Considerando le azioni altruistiche in un ambiente sociale organizzato, esse possono essere funzionali alla massimizzazione del benessere di ognuno poiché contribuiscono ad instaurare relazioni basate sulla fiducia e sulla collaborazione che, con il tempo, renderanno meno costosi e più efficienti le interazioni sociali.

Il contesto sociale, economico, giuridico e culturale (in un solo termine: l'*ambiente*) che caratterizza un gruppo o una società, incide notevolmente sui comportamenti, sulle azioni degli individui e sulle relazioni interpersonali. Il concetto di ambiente viene utilizzato anche da Simon per costruire un'analogia in cui la razionalità umana può essere rappresentata da un paio di forbici in cui una lama è una limitazione cognitiva, mentre l'altra è la struttura dell'ambiente e le limitazioni che provengono da questo.

La *bounded rationality theory* pone evidenza sul fatto che scelte razionali sono difficilmente attuabili in concreto a causa delle limitazioni cognitive e in termini di risorse che l'uomo subisce. Traendo spunto da questo, nel modello che viene presentato, gli individui sono paragonabili ad esseri che operano in modo istintivo e condizionato da altri fattori, a differenza di molti modelli e teorie economiche che ipotizzano una razionalità perfetta degli individui manifestata anche attraverso le preferenze e le aspettative razionali.

Questa breve sintesi sulla razionalità limitata e su alcune dinamiche sociali è utile ad introdurre e comprendere meglio lo schema di riferimento in cui si inserisce un modello computazionale di tipo evuzionistico elaborato da Brennan e Lo, che verrà descritto nei paragrafi successivi, in cui gli individui saranno fortemente condizionati, nel loro processo decisionale, sia dalla singola e collettiva razionalità limitata, sia dall'ambiente con tutte le sue caratteristiche e implicazioni.

### **3.3 Premessa teorica e *framework* di riferimento al modello**

Come accennato più volte nelle sezioni precedenti, in quasi tutte le teorie economiche e le formalizzazioni che ne derivano<sup>7</sup>, si assume che l'individuo sia pienamente razionale e sviluppi processi decisionali volti a massimizzare il suo benessere. In termini tecnici, il singolo individuo è un *Homo oeconomicus* con aspettative razionali tramite le quali riesce a massimizzare la sua funzione di utilità attesa. Sebbene siano state proposte visioni alternative e meno 'estreme', quali i processi cognitivo-decisionali euristici, la teoria della *bounded rationality* e gli studi dell'economia comportamentale, la visione dell'individuo razionale e le sue relative implicazioni vanno oltre l'ambito accademico e sono applicate concretamente nell'elaborazione e nello sviluppo delle politiche

---

<sup>7</sup> Un riferimento particolare va dato alla teoria dell'utilità attesa, della razionalità delle aspettative e delle ipotesi di mercato efficienza.



macroeconomiche e monetarie, così come delle regolamentazioni e dell'insieme di regole e pratiche che rappresentano la base necessaria per un corretto funzionamento dei mercati finanziari. L'evidenza empirica, specialmente per quanto riguarda i dati degli ultimi anni, dà prova del fatto che l'uomo non agisce sempre razionalmente, prendendo decisioni talvolta in modo casuale, senza un'adeguata ponderazione e, di fatto, non ottimali per il suo benessere e non solo. Le principali caratteristiche che rappresentano gli aspetti negativi e sub-ottimali di un processo decisionale (non razionale in modo assoluto) possono essere sintetizzate in due termini: il *rischio* e la *probabilità*. Essi causano forti distorsioni comportamentali in particolar modo la *probability matching* e la *loss aversion* (avversione alle perdite). La prima fa riferimento alla tendenza di scegliere in modo casuale tra due alternative possibili, a seguito dell'evento *E*, che dovrebbero avere la medesima probabilità ed escludenti l'un l'altra, quando, in realtà è presente un vizio nella "randomizzazione" dell'evento, perché esso si verifica non in modo casuale, ma distorto<sup>8</sup>. Si ha la distorsione comportamentale dell'avversione alle perdite (v. *supra* 2.2.1) quando si percepisce un rischio maggiore quando si considerano perdite potenziali rispetto a quando si prospettano delle possibilità di guadagni o profitti. Queste distorsioni, osservate in diversi contesti geografici e culturali e per vari periodi temporali, portano a scelte e comportamenti non ottimali per il singolo individuo e, di conseguenza, per l'intera società<sup>9</sup>, ma fanno presupporre la loro remota origine e il ruolo chiave che hanno rivestito nell'evoluzione del pensiero e nelle facoltà decisionali-cognitive dell'essere umano. Come esposto nel paragrafo anteriore, l'uomo rivela da sempre, specialmente in contesti sociali di gruppi organizzati, atteggiamenti e dinamiche comportamentali che, in prima analisi, possono sembrare poco coerenti e contro-intuitivi rispetto allo scopo individualistico della massimizzazione del benessere: fra questi si ritrovano la collaborazione, l'altruismo, da una parte, ma anche azioni come l'illusione e l'inganno. Molte teorie comportamentali appartenenti a discipline come la sociobiologia e la psicologia evoluzionistica, hanno sviluppato modelli evoluzionistici

---

<sup>8</sup> Per descrivere la distorsione dalla *probability matching*, Lo [Brennan-Lo, 2012] utilizza a titolo esemplificativo una sequenza di lanci di una moneta "truccata": l'individuo, pensando che vi sia la stessa probabilità che esca testa o croce in una serie di lanci indipendenti tra loro, sceglierà il risultato in modo casuale; tuttavia la sequenza di lanci non è fatta in modo casuale ma dipende da che modo è stata "manomessa" la moneta.

<sup>9</sup> Queste tipologie di distorsioni comportamentali sono state curiosamente osservate anche nelle dinamiche biologiche di varie specie animali, ad esempio le formiche, le api, i pesci e i primati (v. References in Brennan-Lo, 2012).

basati su criteri di indagine e analisi più ampi, che considerano e valutano gli effetti anche di caratteristiche non fisiche, ma socio-culturali e dell'uomo<sup>10</sup>.

Sebbene non vi sia più l'accettazione incondizionata riguardo la razionalità assoluta dell'*Homo oeconomicus*, vi sono ancora molte questioni irrisolte e di difficile interpretazione: fra tutte, i fattori e le situazioni che provocano l'innescarsi di queste distorsioni negli atteggiamenti e nelle dinamiche degli individui, e, altresì, quali siano le parti fisiche e le funzioni cerebrali coinvolte in modo diretto o indiretto in questi complessi meccanismi decisionali e comportamentali.

Il modello che verrà illustrato nel prossimo paragrafo, si inserisce in una parte della letteratura accademica delle scienze economiche che presenta già dei modelli di tipo evolucionistico, anche se molto sofisticati e talvolta di difficile applicazione e analisi, (come, ad esempio, il processo selettivo che porta un individuo a scegliere quali funzioni di utilità ottimizzare, lo sviluppo di strategie complesse di trading, l'analisi su cambiamenti e sull'evoluzione nelle funzioni di domanda e offerta<sup>11</sup>, ..., modelli che presuppongono implicitamente un certo livello di razionalità e di orientamento agli obiettivi). Di seguito si considera un *modello a scelta binaria*, che descrive l'evoluzione di una specie di cui gli individui hanno la possibilità di attuare la loro scelta su dove costruire la propria abitazione solamente fra due alternative (a valle o sull'altopiano: tale decisione risulterà poi vantaggiosa o svantaggiosa per la sopravvivenza della popolazione relativamente al tempo meteorologico che si verificherà), è semplificato nelle ipotesi, nelle condizioni generali e nelle computazioni applicative. Tuttavia già in questo schema estremamente ridotto, si può osservare il fatto che le forze della *selezione naturale* siano in grado di mettere in evidenza particolari distorsioni comportamentali e processi decisionali poco vantaggiosi per gli individui di una *specie*. Inoltre, la

---

<sup>10</sup> Tali caratteristiche possono rappresentare ad esempio la lingua, la religione, il contesto culturale, sociologico e geo-politico, ...

<sup>11</sup> Per alcuni riferimenti bibliografici in merito, Brennan e Lo [2012] riportano in References circa 24 paper e libri, fra cui:

- I. Hansson, C. Stuart, *Malthusian Selection of Preferences*, American Economic Review, no. 80, pagg. 529-544, 1990;
- A. J. Robson, L. Samuelson, *The Evolutionary Foundations of Preferences*, 2010;
- G.Y. Luo, *Evolution and Market Competition*, Journal of Economic Theory no. 67, pp. 223-250, 1995;
- B. Lebaron, *Heterogeneous Gain Learning in the Dynamics of Asset Price*, Journal of Economic Behavior and Organization, no. 83, 2012;
- W. A. Brock, C. H. Hommes, F. O. Wager, *Evolutionary Dynamics in Markets with Many Trader Types*, Journal of Mathematical Economics, no. 41, pp. 7-42.

selezione naturale fa sviluppare, all'interno del gruppo di individui ciò che si può considerare un modo di pensare ed agire "intelligente" (*intelligent behavior*, v. Brennan-Lo, 2012): esso non è denotato in termini di razionalità assoluta, ma deriva da un'intelligenza e un processo cognitivo che vengono influenzati direttamente e in modo continuo dal contesto ambientale e dalle caratteristiche fisiche della specie cui appartengono i singoli. Se il contesto ambientale ha un ruolo fondamentale nel comportamento dell'individuo e nella sua *sopravvivenza* (che si manifesta attraverso il *successo riproduttivo*), non bisogna sottovalutare e non prendere in considerazione le diversità che si riscontrano tra il rischio idiosincratico e quello sistematico e gli effetti che essi provocano nelle dinamiche evolutive (v. *infra* 3.4.4). In modo analogo alla differenziazione in ambito economico-finanziario, in particolare a ciò che si riferisce alla tecnica degli investimenti e di portafoglio, il *rischio idiosincratico* rappresenta la componente di rischio *specifico* di una certa attività finanziaria; poiché esso dipende dalle caratteristiche dell'asset, diversificando un portafoglio ed ha una bassa correlazione con altri fattori di rischio, si presuppone che il rischio idiosincratico possa essere eliminato o, perlomeno, ridotto. Il *rischio sistematico*, invece, costituisce i fattori di rischio che derivano dal mercato finanziario e dall'intero sistema in cui si opera (da cui il sinonimo rischio sistematico); tale componente di rischio non è eliminabile e deve essere sempre tenuta in considerazione nell'intera analisi per evitare gravi errori di valutazione.

Nel modello evuzionistico presentato, la differenziazione tra rischio specifico e rischio sistematico viene concretizzata attraverso la componente decisionale-comportamentale degli individui e il loro successo riproduttivo (v. *supra* 3.1). Ad esempio, considerando un contesto biologico, rappresentato da un ecosistema, si supponga che gli individui appartenenti ad una popolazione agiscano in modo identico e adottino tutti incondizionatamente, in modo deterministico, l'alternativa che porta al successo riproduttivo maggiore e sicuro. Questo processo decisionale meccanico e non razionalmente ponderato, che si manifesta in un comportamento 'consueto' e omologato tra gli individui all'interno di una specie, porterà all'estinzione totale di tutti i membri di questa se il successo riproduttivo (o, equivalentemente, l'incertezza riproduttiva) è perfettamente correlato tra gli individui che appartengono alla generazione

considerata<sup>12</sup>, cioè se l'esito di una riproduzione (o al contrario, l'estinzione) dell'individuo  $i$ -esimo risulta, è il medesimo per gli  $n$  individui dell'intera popolazione. In ambienti e contesti che non sono continuamente e certamente stabili, ma presentano la possibilità che si verifichino eventi caratterizzati da incertezza e casualità, attuare un comportamento randomizzato<sup>13</sup> (che rappresenti la simulazione di un comportamento casuale) può risultare più vantaggioso, in termini di riproduttività generazionale, rispetto a decisioni ed azioni di tipo deterministico<sup>14</sup>. Infatti una scelta apparentemente irrazionale e inadeguata secondo l'opinione del singolo, può essere vantaggiosa per la popolazione intera, la quale prevale 'biologicamente' in un ecosistema rispetto al singolo membro in quanto l'*outcome* di un processo di selezione naturale è l'intera generazione di una specie nella sua totalità e non il singolo individuo.

Tuttavia, se si ipotizza che il successo riproduttivo sia non perfettamente correlato, ma statisticamente indipendente fra tutti gli individui<sup>15</sup>, le considerazioni appena fatte non valgono. In questo caso, per una data generazione, la selezione naturale favorisce e privilegia un comportamento individualista e deterministico (l'individuo conduce il suo processo decisionale e le sue azioni con lo scopo di massimizzare il proprio benessere), quindi i singoli che agiscono secondo questa modalità sopravvivono e si riproducono.

Prendendo spunto dalle considerazioni e dai concetti esposti precedentemente, gli autori [Brennan-Lo, 2012] propongono una definizione "naturale" e "biologica" di *intelligenza*, cioè: la correlazione positiva fra qualunque azione e comportamento con il successo riproduttivo è una forma di intelligenza. Qualora questa correlazione non sia già esistente e stabile, il singolo deve sostenere dei costi 'biologici' (la raccolta di informazioni, la pianificazione, la memoria e molte altre abilità cognitive). Similarmente alla teoria della *bounded rationality* (v. supra) questi costi rappresentano

---

<sup>12</sup> Esempi concreti volti a spiegare questo concetto possono essere degli animali che decidono di vivere in uno stesso nido, in una stessa tana: se si verifica un evento negativo, l'intera popolazione di quella generazione corrente, sarà estinta. In aggiunta, se la fonte di nutrimento selezionata da tutti è la medesima, nel momento in cui le risorse si esauriranno, la popolazione non avrà altre soluzioni e si estinguerà.

<sup>13</sup> Con riferimento ad un comportamento randomizzato, Lo [Brennan-Lo, 2012] richiama la legge di *matching* che R. J. Herrnstein (studioso dell'apprendimento negli animali e fondatore dell'analisi comportamentale quantitativa), elaborò nel 1961 a seguito di vari esperimenti effettuati sui piccioni. In maniera molto sintetica, secondo questa teoria, in caso di scelta fra due alternative, una delle quali genera un premio che vale il doppio, si osserva che la frequenza con cui gli individuo optano per l'alternativa più remunerativa è doppia rispetto a quella relativa all'altra scelta (v. *infra* 3.4).

<sup>14</sup> I comportamenti *deterministici* sono opposti ai comportamenti casuali o randomizzati, poiché essi si manifestano per alcune necessità e con un preciso scopo, ad esempio la sopravvivenza, la massimizzazione dell'utilità, la massimizzazione numerica dell'*outcome* del processo riproduttivo, ....

<sup>15</sup> Da un punto di vista esemplificativo, in questo secondo caso, ciascun animale vive nel suo proprio nido, nella sua propria tana e si nutre da una fonte che è diversa da quelle altrui.

delle limitazioni all'intelligenza causate dalle forze della selezione naturale e dalle modifiche che esse apportano nelle dinamiche comportamentali e nei processi cognitivi-decisionali.

Dalla struttura teorica descritta in questo paragrafo, gli autori hanno elaborato un modello comportamentale basato sulle euristiche con l'obiettivo di interpretare la teoria della razionalità limitata in chiave evoluzionistica (sviluppando il concetto di *intelligenza naturale*) e, soprattutto, di analizzare e proporre dei risultati che possano dare una possibile spiegazione sull'incoerenza tra modelli economici puramente razionali e distorsioni comportamentali.

### **3.4 Modello evoluzionistico basato sulla razionalità limitata e sull'intelligenza**

---

#### **3.4.1 Presentazione**

La seguente descrizione, successivamente riportata ed ampliata nella sezione dedicata alla trattazione della simulazione del modello di Brennan e Lo, permette al lettore di inquadrare fin da subito l'esperimento computazionale condotto dai due esperti e di assimilarne meglio la generalizzazione qualitativa e quantitativa.

Per condurre l'esperimento evoluzionistico gli autori ipotizzano un ecosistema in cui i giorni caratterizzati da un meteo soleggiato si verificano con una probabilità  $p$  pari al 75%, mentre nel rimanente 25% dei giorni si verifica un tempo piovoso. Gli individui di una popolazione  $t = 1$  devono effettuare una decisione rispettivamente al luogo in cui costruire la propria abitazione, nella valle (scelta  $a$ ) o sull'altopiano (scelta  $b$ ). Il tempo meteorologico dell'ecosistema influenza direttamente la sopravvivenza e il successo riproduttivo dei singoli in base alla scelta effettuata: durante i giorni di sole, coloro che hanno costruito nella valle sono protetti dall'ombra e procurano le risorse idriche dai ruscelli, infatti la *numerosità* attesa della *prole*<sup>16</sup>  $x_a$  (relativa alla scelta  $a$ ) per ciascun individuo è pari a  $E[x_a] = 3$ ; sull'altopiano, dove l'acqua scarseggia, gli individui sono destinati a scomparire e a non riprodursi, infatti il valore atteso della prole  $x_b$  (relativa alla scelta  $b$ ) è  $E[x_b] = 0$ . Viceversa, nei giorni di pioggia si verifica la situazione

---

<sup>16</sup> La numerosità della prole di ciascun individuo indica il numero di individui che un singolo è in grado di generare se si riproduce. La numerosità totale della prole invece, indica il numero totale di individui che sono stati dall'intera popolazione e che costituiscono la generazione successiva.

opposta: gli individui che costruiscono la loro abitazione nella valle subiscono inondazioni che ne provocano la scomparsa e la mancanza di una generazione successiva  $E[x_a] = 0$ ; coloro che abitano sull'altopiano invece, essendo sopraelevati sopravvivono e si riproducono ciascuno con un valore atteso pari a  $E[x_b] = 3$ . Dati questi parametri gli autori effettuano delle computazioni per 25 generazioni ( $t = 25$ ), partendo da una popolazione composta da 10 individui e variando<sup>17</sup> il parametro che rappresenta la probabilità che venga effettuata la scelta di costruire a valle (scelta  $a$ ), ossia la probabilità  $f$ . Il valore che apporterà al numero di individui più elevato alla generazione finale  $t = 25$ , sarà definito come  $f$  ottimale, contraddistinto dalla notazione  $f^*$ , o, qualitativamente, *fenotipo comportamentale ottimale*.

Il modello evoluzionistico si basa sulla descrizione di un processo decisionale a scelta binaria, il cosiddetto *binary-choice model*: le alternative totali, su cui l'individuo deve effettuare e ponderare la propria decisione, quindi sono solamente due. Attraverso la descrizione di un processo evoluzionistico si mette in luce sia gli effetti generati dalle scelte intraprese, sia dal ruolo dell'*intelligenza*, intesa come insieme di metodi e modalità orientate al successo riproduttivo genetico di una specie o del singolo. Oltre a questi due aspetti (scelta e intelligenza) è necessario fare un'aggiuntiva distinzione della situazione analizzata, in termini di *rischio* dal momento che, in base alla correlazione e la dipendenza dei rischi riproduttivi, che minacciano la sopravvivenza, tra i singoli si avranno conseguenze diverse (v. *infra* 3.4.4).

Considerando e combinando assieme gli elementi precedentemente nominati, si possono realizzare diverse situazioni e ottenere risultati interessanti da interpretare (che sono rappresentati dai 4 casi di seguito trattati). Ipotizzando che l'intelligenza non è presente e il rischio<sup>18</sup> fra gli individui è perfettamente indipendente (cioè la scelta di ciascun individuo non provoca effetti agli altri e viceversa), i risultati ottenuti documentano che la collettività adotta comportamenti e processi decisionali neutrali al rischio; ciò è in linea con le ipotesi classiche della letteratura accademica (quali la massimizzazione dell'utilità attesa e del benessere individuale), anche se, è opportuno sottolineare che in

---

<sup>17</sup> I cinque diversi valori attribuiti alla probabilità  $f$  sono: 0.20, 0.50, 0.75, 0.90 e 1.

<sup>18</sup> Per "rischio", in questa descrizione, si intende il potenziale pericolo per un singolo, che ci siano conseguenze o effetti negativi (ad esempio la mancata riproduzione o, nel caso estremo, la stessa estinzione) che si verificano a causa delle caratteristiche biologiche ambientali o provocati dalla scelta di un altro individuo.

essa si presuppone un individuo dotato di razionalità assoluta. Nel caso contrario, in cui rischio fra gli individui di una data generazione è positivamente correlato (cioè la scelta di ciascun individuo provoca effetti agli altri e viceversa), nell'ambiente oggetto di analisi si presentano distorsioni comportamentali come l'avversione al rischio, l'avversione alle perdite e la *probability matching* (v. *supra*). Supponendo invece una popolazione dotata di intelligenza, anche in questo caso si devono considerare i diversi effetti provocati dalle caratteristiche del rischio. Se esso è indipendente tra gli individui all'interno di una generazione, cioè non correlato, si manifestano o comportamenti connotati dalla neutralità al rischio o, inaspettatamente, alcune distorsioni comportamentali, come ad esempio la *probability matching*. La presenza di tali distorsioni è dovuta al fatto che l'intelligenza, in termini di azioni che portano al successo riproduttivo, comporta dei costi da sostenere e l'utilizzo di alcune risorse che provocano processi decisionali e meccanismi comportamentali non ottimizzanti dal punto di vista del singolo individuo razionale. Se invece è presente una certa correlazione tra i rischi, le forze della selezione naturale fanno emergere e sopravvivere solo quegli individui che sanno adattarsi adeguatamente grazie a specifici connotati razionali ed intellettivi. La molteplicità dei tratti intellettivi presenti in una popolazione determina la coesistenza di vari livelli e tipologie di intelligenza, differenziati anche sulla base di limitazioni razionali causate dai continui cambiamenti delle condizioni e del contesto ambientale (composto sia da caratteristiche ambientali che dalle dinamiche interpersonali)

### **3.4.2 Formalizzazione analitica**

Di seguito viene presentato il modello in modo analitico. La sua apparente semplicità verrà messa in discussione quando se ne coglieranno le complessità e le complicazioni derivanti dall'applicazione concreta delle formule, in modo particolare nella simulazione dei dati. In base ad una diversificazione nelle ipotesi iniziali e nelle variabili e caratteristiche contestuali considerate, verranno illustrati 4 diversi casi:

1. I caso: descrive l'evoluzione generazionale in cui gli individui irrazionali, operano in maniera dipendente all'interno di una stessa generazione;
2. II caso: in cui gli individui operano in modo indipendente, eliminando il rischio riproduttivo specifico;
3. III caso: in cui si introduce il concetto di intelligenza evolutivistica;

4. IV caso: al concetto di intelligenza si aggiunge la presenza dei costi che essa determina.

Si consideri una popolazione composta da vari individui (non è necessario siano esseri umani) raggruppati in differenti generazioni (riferite al tempo) indicizzate mediante la lettera  $t$ . Ciascuno di essi, per ogni periodo temporale, deve scegliere tra l'azione  $a$  e l'azione  $b$ , le quali generano una diversa numerosità della prole (che, in sostanza, determina la generazione successiva) rispettivamente  $x_{at}$  ed  $x_{bt}$ . Esse sono rappresentate da due variabili casuali caratterizzate dalla funzione di distribuzione congiunta<sup>19</sup>  $\Phi(x_{at}, x_{bt})$ . Data la natura del *binary-choice model*, si ipotizza che il processo decisionale di un individuo  $i$  venga descritto da una variabile Bernoulliana<sup>20</sup>  $I_{it}^f$  che assume valore 1 quando viene presa la scelta  $a$  con una probabilità pari a  $f$  e il valore 0 se viene prediletta l'alternativa  $b$ , con una probabilità complementare data dal valore  $1 - f$ . Analiticamente, il comportamento dell'individuo  $i$ -esimo può essere sinteticamente espresso dalla seguente espressione:

$$I_{it}^f = \begin{cases} 1 & \text{con probabilità } f \\ 0 & \text{con probabilità } 1 - f. \end{cases} \quad (1)$$

Contrariamente a quanto stabilito nella teoria delle ipotesi di mercato efficiente, supponiamo che l'individuo non sia pienamente razionale: in questo caso il suo processo decisionale è statisticamente indipendente da tutte le altre variabili che caratterizzano il contesto ambientale, includendo in esse anche le scelte e azioni degli altri individui e la popolazione della generazione successiva descritta dalle variabili  $x_{at}$  e  $x_{bt}$ . L'indipendenza impedisce inoltre, che vi siano ipotetiche dinamiche e relazioni strategiche inter-individuali, dal momento che il comportamento dell'individuo  $i$ -esimo di una data generazione non influisce sul successo e risultato riproduttivo dell'individuo  $j$ -esimo della medesima generazione. Sotto l'ulteriore

<sup>19</sup> Nella teoria di probabilità, date delle variabili casuali discrete  $x$  e  $y$ , definite in uno stesso spazio di probabilità, la *funzione di distribuzione congiunta* è la distribuzione di probabilità associata al vettore  $(x, y)$  ossia, nel caso sopra descritto, misura la probabilità che la variabile  $x_a$  assuma il valore  $x_{at}$ , *congiuntamente* al fatto che  $x_b$  valga  $x_{bt}$ .

<sup>20</sup> Dato uno spazio campionario dicotomizzato (di proporzione  $1 - p$  e  $p$ , la variabile casuale  $x$  che valuta l'estrazione di un elemento, assume valori 0 o 1. Una variabile casuale  $x$  ha una distribuzione di Bernoulli (ed è considerata una variabile bernoulliana) se la sua funzione di probabilità è:

$$f(x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} & \text{per } x = 0, 1 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$



condizione che la probabilità  $f$ , intesa astrattamente come “tipologia” o *fenotipo* comportamentale (v. Brennan-Lo, 2012), assuma sempre il medesimo valore in ogni generazione, lo scopo del modello è quello di individuare qual è il valore ottimale  $f^*$  per cui si ottiene il tasso di crescita geometrico maggiore per la popolazione. Attraverso il processo evolutivo condotto principalmente dalle forze della selezione naturale, gli individui denotati dal fenotipo comportamentale  $f^*$  saranno quelli dominanti<sup>21</sup> all’interno della specie ed aumenteranno ad un tasso di crescita che diventerà, di generazione in generazione, esponenziale. Per mettere in evidenza questo fatto gli autori [Brennan-Lo, 2012] utilizzano il termine “*growth-optimal*” *behavior* (comportamento della crescita ottimale) per indicare  $f^*$ . Il risultato descritto è in linea con i concetti fondamentali della teoria delle *Adaptive Markets Hypothesis*, secondo cui le forze della selezione naturale e l’adattamento rivestono un ruolo principale nel processo evolutivo del mercato finanziario e degli operatori. Infatti il parametro  $f^*$  dipende dalla funzione di distribuzione congiunta  $\Phi(x_{at}, x_{bt})$  che rappresenta l’insieme delle caratteristiche fisico-biologiche della specie cui appartengono gli individui, il contesto ambientali in cui essa è inserita e il grado di incertezza e rischio associato alle conseguenze comportamentali sulla fecondità. Sebbene il modello sia semplice nelle ipotesi<sup>22</sup>, tramite esso si riesce a verificare e comprendere il fatto che la selezione naturale influenza i comportamenti individuali e di gruppo. Tuttavia, tali ipotesi si possono modificare e rendere più realistiche da un punto di vista biologico, attraverso la connotazione di alcune proprietà (per mezzo dell’imposizione di vincoli) alla funzione di distribuzione congiunta e di particolari relazioni tra i valori del parametro  $f$  per le varie generazioni; queste variazioni comporterebbero un aumento della complessità del modello, a danno della semplicità analitica che lo contraddistingue.

### **Origine evuzionistica comportamentale (I caso)**

Si supponga che le variabili casuali  $x_{at}$  e  $x_{bt}$  siano:

1. identicamente e indipendentemente distribuite (IID) da una generazione all’altra;
2. identicamente distribuite tra gli individui appartenenti alla stessa generazione  $t$ ;

---

<sup>21</sup> Le forze della selezione naturale fanno emergere e sopravvivere gli individui che sanno adattarsi in modo più adeguato e che raggiungono il successo riproduttivo. Nel caso in analisi, il maggior successo riproduttivo è rappresentato dalla probabilità ottimale, o fenotipo comportamentale,  $f^*$ .

<sup>22</sup> Tali semplificazioni sono, ad esempio, la durata fissa uni-periodale di un individuo e di tutta la generazione a cui appartiene, l’unicità della riproduzione degli individui per ogni generazione, la trasmissione ereditaria perfetta del parametro  $f$ .

3. indipendenti dalle altre variabili casuali per ogni  $f$  (probabilità della scelta) e  $i$  (individuo  $i$ -esimo) (si considerano infatti anche la variabili bernoulliane caratterizzate dalla distribuzione di probabilità  $I_{it}^f$ ).

Si ricorda inoltre che il processo decisionale di un individuo  $i$  viene descritto da una variabile Bernoulliana di distribuzione  $I_{it}^f$  che assume valore 1 quando viene presa la scelta  $a$  con una probabilità pari a  $f$  e il valore 0 se viene prediletta l'alternativa  $b$ , con una probabilità complementare data dal valore  $1 - f$  (v. *supra*).

Queste ipotesi consentono di caratterizzare probabilisticamente ogni generazione temporale della popolazione  $i$ -esima, caratterizzata dal fenotipo comportamentale  $f$ . Definendo  $n_t(f)$  come il numero di individui della popolazione di tipo  $f$  della generazione  $t$ , è possibile calcolarne il valore attraverso la seguente espressione ricorsiva, in cui il pedice  $i$  è un contatore associato agli individui della generazione precedente  $t - 1$ :

$$n_t(f) = \sum_{i=1}^{n_{t-1}(f)} [I_{it}^f x_{at} + (1 - I_{it}^f) x_{bt}] \quad (2)$$

L'identica distribuzione della funzione  $\Phi(x_{at}, x_{bt})$  tra gli individui di una stessa generazione, implica che essi appartengano e vivano allo stesso *ecosistema*, e che producano la stessa entità numerica della prole pari a  $x_{at}$  o  $x_{bt}$  in base alla scelta e all'azione che viene effettuata ( $a$  o  $b$ ), inoltre,  $x_{at}$  e  $x_{bt}$  saranno uguali per ogni generazione  $t$ . L'espressione (2) può essere così riscritta:

$$n_t(f) = x_{at} \sum_{i=1}^{n_{t-1}(f)} I_{it}^f + x_{bt} \sum_{i=1}^{n_{t-1}(f)} (1 - I_{it}^f) \quad (3)$$

Aumentando le generazioni, cioè il valore  $t$ , si può applicare la *legge dei grandi numeri* all'espressione (3) si può dimostrare che la variabile  $\alpha(f)$ , rappresentante il tasso di crescita geometrico<sup>23</sup> per ogni popolazione  $f$  converge, in probabilità, al seguente limite:

---

<sup>23</sup> Il tasso di crescita geometrico di una popolazione nel periodo temporale  $[0; t]$  è solitamente definito come:

$$\text{plim}_{t \rightarrow \infty} \log \left[ \frac{n_t(f)}{t} \right] = \alpha(f) = E[\log(fx_a + (1-f)x_b)] \quad (4)$$

Secondo la legge dei grandi numeri, dato un campione che tende ad una numerosità infinita ( $t \rightarrow \infty$ ), se le variabili casuali sono indipendenti ed hanno la stessa distribuzione di probabilità, allora la media empirica della distribuzione (definita dal rapporto  $\frac{n_t(f)}{t}$ ) è vicina al valore atteso reale.

L'obiettivo del modello è comprendere in modo analitico quale sia il valore del fenotipo comportamentale che denota l'insieme delle caratteristiche del processo decisionale e delle azioni svolte dagli individui di una popolazione, che:

- riescono a sopravvivere alle forze della selezione naturale;
- non si estinguono;
- aumentano la propria numerosità di generazione in generazione.

Ogni popolazione ha come ultimo fine il fatto che le generazioni successive si riproducano in maggior numero possibile facendo accrescere la quantità totale degli individui della specie; tale fine è sinteticamente descrivibile attraverso il parametro del tasso di crescita massimo.

Per ottenere il valore di  $f$  ottimale, cioè  $f^*$ , si procede con la massimizzazione della funzione del tasso di crescita della specie,  $\alpha(f)$  descritta in (4) rispetto al parametro  $f$ , differenziando tre diverse condizioni, in base ai rapporti attesi tra le numerosità delle proli ( $E[x_a/x_b]$  e  $E[x_b/x_a]$ ) che determinano il successo o l'insuccesso riproduttivo della scelta  $a$  rispettivamente a quello relativo alla scelta  $b$  (e viceversa), e si ottengono i seguenti valori:

$$f^* = \begin{cases} 1 \\ 0 < f^* < 1 \\ 0 \end{cases} \quad \text{rispettivamente se} \quad \begin{cases} E[x_a/x_b] > 1 \text{ e } E[x_b/x_a] < 1 \\ E[x_a/x_b] \geq 1 \text{ e } E[x_b/x_a] \geq 1 \\ E[x_a/x_b] < 1 \text{ e } E[x_b/x_a] > 1 \end{cases} \quad (5)$$

Il parametro  $f^*$  rappresenta il connotato comportamentale/decisionale (in riferimento alla probabilità che l'individuo scelga l'alternativa  $a$ ) che conduce alla massimizzazione

---


$$\alpha(t) = \sqrt[t]{\frac{\text{popolazione}_t}{\text{popolazione}_{t_0}}} - 1.$$

del tasso di crescita della popolazione attraverso il susseguirsi di varie generazioni  $t = 1, 2, 3, \dots, n$ . La soluzione alla massimizzazione del parametro  $\alpha(f)$  (descritta in (5)) si articola in tre parti:

1. se  $f^* = 1$  allora il tasso riproduttivo ottenuto attraverso la scelta dell'alternativa  $a$  è indubbiamente maggiore rispetto a quello conseguito optando per la possibilità  $b$ , dato che il rapporto atteso tra le numerosità delle proli  $x_a$  e  $x_b$  è maggiore di 1, mentre il rapporto atteso tra  $x_b$  e  $x_a$  è minore di 1;
2. al contrario, se  $f^* = 0$ , il tasso riproduttivo ottenuto attraverso la scelta dell'alternativa  $a$  è minore rispetto a quello conseguito optando per la possibilità  $b$  dato che il rapporto atteso tra le numerosità delle proli  $x_b$  e  $x_a$  è maggiore di 1, mentre il rapporto atteso tra  $x_a$  e  $x_b$  è minore di 1;
3. se invece il valore atteso di entrambi i rapporti fra  $x_a$  e  $x_b$  e il suo reciproco sono maggiori o uguali a 1, (seconda condizione nella (5)) allora  $f^*$  è pari ad un valore compreso fra lo 0 e l'1 e si ottiene attraverso la risoluzione della seguente equazione:

$$E \left[ \frac{x_a - x_b}{f^* x_a + (1 - f^*) x_b} \right] = 0. \quad (6)$$

In questo caso, poiché nessuna scelta fra le due alternative  $a$  e  $b$  porta ad un successo riproduttivo che è dominante sull'altro (infatti la numerosità delle proli derivanti dalle due scelte è uguale:  $x_{at} = x_{bt}$ ), il comportamento ottimale che massimizza il tasso di crescita è caratterizzato da processi decisionali casuali, effettuati con una probabilità pari a  $f^*$ , cioè un valore che uguaglia il rapporto atteso delle numerosità delle proli ( $x_{at}$  e  $x_{bt}$ ) di ciascuna scelta  $a$  o  $b$  al valore atteso (la media) della numerosità delle proli rispettive alle scelte  $a$  e  $b$ . Come si illustrerà in seguito, nella parte riguardante la simulazione del modello, il parametro  $f^*$  dipenderà fortemente dalle caratteristiche del contesto (ecosistema) considerato.

Questo ultimo risultato è in contraddizione con la teoria dell'utilità attesa che implica un comportamento di tipo deterministico (cioè la manifestazione di un fenotipo comportamentale  $f^*$  pari a 0 o 1 in base ai valori attesi di  $x_a$ ,  $x_b$ ) e con il concetto economico classico della massimizzazione del benessere dell'individuo. Ad esempio, se  $E[x_a] > E[x_b]$  e  $Var[a] = Var[b]$ , a parità di rischio, si può infatti affermare che gli

individui sceglieranno sempre l'alternativa  $a$  poiché l'entità numerica della prole è più elevata e, perciò si otterrà un valore di  $f^*$  pari a 1. Tuttavia qualsiasi individuo che operi in modo razionale, verrà successivamente 'sopraffatto e dominato' dalla massa, caratterizzata da irrazionalità e assenza di intelligenza nei processi decisionali e comportamentali, che si riprodurrà in maniera più veloce e preponderante massimizzando il suo tasso di crescita attraverso un valore ottimale  $f^*$  diverso da 1.

Dal punto di vista della teoria delle AMH questo parametro ottimale, rappresenta il fenotipo comportamentale dominante che emerge all'interno della popolazione (o, equivalentemente, della specie) attraverso le forze della selezione naturale che fanno sopravvivere e, in questo caso, riprodurre ad un tasso di crescita geometrico più elevato gli individui che selezionano l'alternativa  $a$ . Inoltre, i singoli che si adattano al valore  $f^*$  avranno la possibilità di rimanere in vita e di riprodursi, altrimenti verranno eliminati qualora si verifichi un cambiamento improvviso del contesto ambientale, tale per cui valori estremi di  $f$  risulteranno 'fatali' alla sopravvivenza (v. *supra* 2.4.1).

Il fenotipo comportamentale ottimale  $f^*$  può essere interpretato come una semplice 'sintesi' analitica che rappresenta la distorsione comportamentale dell'*altruismo* (v. *supra* 3.2.3) poiché un'azione che è non-ottimale per il singolo individuo risulta in realtà ottimale per la collettività e l'intera specie, assicurandone la sopravvivenza e la continuità generazionale.

Di seguito viene descritta un'applicazione concreta del modello a scelta binaria appena presentato: si tratta di una simulazione di dati sperimentale effettuata dagli autori Brennan e Lo con lo scopo di indagare sui risultati ottenuti, di confrontarli con eventuali distorsioni comportamentali note nella letteratura accademica economico-finanziaria e di elaborare una definizione più completa dei concetti di intelligenza e razionalità.

### **3.4.3 Simulazione del modello**

Per introdurre la simulazione del modello *binary-choice* è opportuno trattare le ipotesi iniziali, i parametri e le variabili coinvolte, tenendo come riferimento la descrizione analitica precedentemente esposta. Si ipotizzi un ambiente di cui si conosce la caratteristica del tempo meteorologico e se ne voglia analizzare l'impatto sui processi decisionali/comportamentali degli individui (si può presupporre che essi siano degli esseri umani) che appartengono ad una singola specie e che sono inseriti in questo

contesto. I giorni caratterizzati da un meteo soleggiato si verificano con una probabilità pari al 75%, mentre nel rimanente 25% dei giorni ci sarà pioggia. Gli individui devono effettuare una scelta rispettivamente al luogo in cui costruire la propria abitazione, nella valle (opzione  $a$ ) o sull'altopiano (opzione  $b$ )<sup>24</sup>. Il tempo meteorologico influenza direttamente la sopravvivenza e il successo riproduttivo dei singoli, poiché in base alla scelta effettuata, si possono determinare quattro possibili situazioni e quattro diversi *outcome*. Durante i giorni di sole, coloro che hanno costruito nella valle sono protetti dall'ombra e procurano le risorse idriche dai ruscelli, infatti la numerosità attesa della prole per ciascun individuo è pari a  $E[x_a] = 3$ ; sull'altopiano, dove il calore è maggiore e vi è carenza di acqua, gli individui sono destinati a scomparire e a non riprodursi, infatti il valore atteso della prole è  $E[x_b] = 0$ . Viceversa, nei giorni di pioggia si verifica la situazione opposta: gli individui che costruiscono la loro abitazione nella valle subiscono inondazioni che ne provocano la scomparsa e la mancanza di una generazione successiva  $E[x_a] = 0$ ; coloro che abitano sull'altopiano invece, essendo sopraelevati sopravvivono e si riproducono ciascuno con un valore atteso pari a  $E[x_b] = 3$ .

Il contesto di riferimento può essere sintetizzato dalle seguenti implicazioni e relazioni:

$$\begin{cases} \text{sole } (p = 0.75) & \rightarrow E[x_a] = 3 \text{ e } E[x_b] = 0 \\ \text{pioggia } (1 - p = 0.25) & \rightarrow E[x_a] = 0 \text{ e } E[x_b] = 3 \end{cases} \quad (7)$$

tenendo altresì in considerazione la probabilità di scelta per ciascuna alternativa:

$$\begin{cases} \text{scelta di } a \text{ (valle)} = f \\ \text{scelta di } b \text{ (altopiano)} = 1 - f \end{cases}$$

In queste condizioni il comportamento che massimizza la sopravvivenza della specie e il successo riproduttivo consiste nella scelta di costruire sempre nella valle (scelta  $a$ ) quindi con un valore di  $f = 1$ , dal momento che la probabilità che ci sia un tempo soleggiato è alquanto elevata rispetto alla probabilità di pioggia. Tuttavia, se tutti gli individui decidessero per l'alternativa  $a$ , qualora si verificasse un giorno caratterizzato da un tempo piovoso<sup>25</sup>, l'intera collettività non sarebbe in grado di sopravvivere e si

<sup>24</sup> In Brennan-Lo (2012) si utilizzano i termini inglesi *valley* (valle) e *plateau* (altopiano).

<sup>25</sup> Si ricorda che i giorni di pioggia hanno una probabilità del 25%, che, seppur minore alla probabilità di sole, non è assolutamente approssimabile allo 0%.

estinguerebbe: questa considerazione conduce ad affermare che, in tale contesto ecologico, il fenotipo comportamentale ottimale  $f^*$  non è pari 1.

Con lo scopo di fornire un'applicazione e una successiva interpretazione concreta del modello, gli autori [Brennan e Lo, 2012] hanno condotto una simulazione di dati, riportati nella Tabella 3.1.

**Tabella 3.1** *Data set outcome* della simulazione della numerosità generazionale nel modello *binary-choice* evolutivo

**Table 1.** Simulated population sizes for binary-choice model with five subpopulations in which individuals choose *a* with probability  $f$  and *b* with probability  $1 - f$ , where  $f = 0.20, 0.5, 0.75, 0.9, 1$ , and the initial population is 10 for each  $f$ .

| Generation | $f = .20$ | $f = .50$ | $f^* = .75$ | $f = .90$ | $f = 1$    |
|------------|-----------|-----------|-------------|-----------|------------|
| 1          | 21        | 6         | 12          | 24        | 30         |
| 2          | 12        | 6         | 6           | 57        | 90         |
| 3          | 6         | 12        | 12          | 144       | 270        |
| 4          | 18        | 9         | 24          | 387       | 810        |
| 5          | 45        | 18        | 48          | 1,020     | 2,430      |
| 6          | 96        | 21        | 108         | 2,766     | 7,290      |
| 7          | 60        | 42        | 240         | 834       | 21,870     |
| 8          | 45        | 54        | 528         | 2,292     | 65,610     |
| 9          | 18        | 87        | 1,233       | 690       | 196,830    |
| 10         | 9         | 138       | 2,712       | 204       | 590,490    |
| 11         | 12        | 204       | 6,123       | 555       | 1,771,470  |
| 12         | 36        | 294       | 13,824      | 159       | 5,314,410  |
| 13         | 87        | 462       | 31,149      | 435       | 15,943,230 |
| 14         | 42        | 768       | 69,954      | 1,155     | 0          |
| 15         | 27        | 1,161     | 157,122     | 3,114     | 0          |
| 16         | 15        | 1,668     | 353,712     | 8,448     | 0          |
| 17         | 3         | 2,451     | 795,171     | 22,860    | 0          |
| 18         | 3         | 3,648     | 1,787,613   | 61,734    | 0          |
| 19         | 9         | 5,469     | 4,020,045   | 166,878   | 0          |
| 20         | 21        | 8,022     | 9,047,583   | 450,672   | 0          |
| 21         | 6         | 12,213    | 6,786,657   | 1,215,723 | 0          |
| 22         | 0         | 18,306    | 15,272,328  | 366,051   | 0          |
| 23         | 0         | 27,429    | 34,366,023  | 987,813   | 0          |
| 24         | 0         | 41,019    | 77,323,623  | 2,667,984 | 0          |
| 25         | 0         | 61,131    | 173,996,290 | 7,203,495 | 0          |

Reproductive uncertainty is systematic and also binary, with  $Prob(\mu_a = 3, \mu_b = 0) = 0.75$  and  $Prob(\mu_a = 0, \mu_b = 3) = 0.25$ . In this setting, probability matching  $f^* = 0.75$  is the growth-optimal behavior.  
doi:10.1371/journal.pone.0050310.t001

Fonte: Brennan-Lo (2012)

Per eseguire la computazione, oltre agli elementi numerici e probabilistici riferiti al contesto ecologico<sup>26</sup>, supposti e descritti in questa sezione, e l'applicazione dell'espressione matematica (3) descritta in precedenza, è stata ipotizzata una popolazione iniziale composta da 10 individui e le generazioni totali calcolate sono 25. I valori attribuiti al parametro  $f$  (probabilità di effettuare la scelta  $a$ , cioè costruire l'abitazione nella valle) sono cinque: 0.20, 0.50, 0.75, 0.90 e 1.

Analizzando il *data set* risultato dalla simulazione del modello evuzionistico si può comprendere lo sviluppo generazionale, in termini di unità di individui, associato ai diversi valori di  $f$  predefiniti. Il risultato di maggiore interesse, cioè il parametro che porta alla numerosità finale (dopo 25 generazioni) più elevata e, di conseguenza, al più alto tasso di crescita della popolazione e al miglior successo riproduttivo della specie, è quello associato al fenotipo comportamentale ottimale  $f^* = 0.75$ . Questo valore coincide, non per caso, con la probabilità che nel contesto ambientale di riferimento vi siano delle condizioni meteorologiche soleggiate,  $p = 0.75$ <sup>27</sup>. Data tale conformità tra le due probabilità, si evince che in questo modello il comportamento evuzionistico ottimale è quello della *probability matching* (v. *supra* 3.3), concetto derivato dalla *Matching Law* di R.J. Herrnstein. Come accennato nelle pagine precedenti, secondo questa teoria esiste una correlazione fra il comportamento degli individui e l'ambiente in cui essi vivono. La legge di corrispondenza fu formulata da Herrnstein a seguito di un esperimento condotto sui dei piccioni riposti in una scatola di Skinner<sup>28</sup> in cui erano posizionati due pulsanti al cui tocco veniva distribuita una diversa quantità di cibo. Dopo numerose osservazioni, lo studioso verificò che i piccioni tendevano ad azionare il pulsante che dava una dose maggiore di cibo più spesso rispetto all'altro pulsante, con

<sup>26</sup> I dati da tenere in considerazione sono:

- la probabilità di sole ( $p = 0.75$ );
- la probabilità di pioggia ( $1 - p = 0.25$ );
- il successo riproduttivo in caso di sole, associato alle due scelte  $E[x_a] = 3$  e  $E[x_b] = 0$ ;
- il successo riproduttivo in caso di pioggia, associato alle due scelte  $E[x_a] = 0$  e  $E[x_b] = 3$ .

<sup>27</sup> Nel capitolo successivo, in cui verrà condotta una simulazione dello stesso modello, verranno messe in luce ed interpretate le diversità tra i due *data set* ottenuti.

<sup>28</sup> La scatola di Skinner (creata dall'omonimo psicologo americano, studioso dell'apprendimento nell'uomo e negli animali) è costituita da: una gabbietta con pavimento elettrificato in cui avvengono alcuni stimoli sonori o visivi e, infine, una levetta o pulsante manipolabile dall'animale. Un rotolo di carta con penna automatica registra il numero di pressioni sul pulsante o sulla leva. Tramite ripetute sessioni di apprendimento l'animale comprende che l'utilizzo del pulsante serve per ottenere piccole porzioni di cibo (il cosiddetto *rinforzo*). Tramite la scatola di Skinner, è possibile studiare l'effetto di diversi ritmi e frequenze di somministrazione del rinforzo, sul ritmo di pressione della leva, cioè come l'animale si comporta dopo aver appreso la conseguenza derivante dall'azionamento della leva. Per ulteriori approfondimenti si rimanda ad una bibliografia specifica del settore, che tratti studi ed esperimenti condotti dal dott. Skinner.



una frequenza simile al rapporto tra le due differenti quantità di cibo. La legge di corrispondenza è importante dal punto di vista teorico poiché offre un *framework* interpretativo per analizzare e qualificare determinati comportamenti che si manifestano in certi contesti e per poter elaborare delle previsioni sulle scelte comportamentali che saranno intraprese, essendo esse condizionate dal contesto ambientale e dalle azioni degli altri individui.

Quando l'ecosistema è caratterizzato dalla casualità e questa può provocare conseguenze estreme a seguito di alcune scelte e azioni, un comportamento deterministico del tipo  $f^* = 1$  condurrebbe all'estinzione dell'intera specie qualora si verificasse la situazione svantaggiosa rispetto all'alternativa decisa. Attraverso l'adattamento e l'esperienza passata, gli individui sono consapevoli che l'unica possibilità di sopravvivere ed ottimizzare il successo riproduttivo è quella di "randomizzare", cioè simulare il comportamento rispetto alla medesima casualità dell'ambiente ( $f^* = p$ ).

Generalizzando il modello tramite l'introduzione di altri parametri attraverso trasformazioni analitiche, gli autori hanno potuto condurre lo studio ad ulteriori considerazioni e risultati. Ad esempio, esprimendo la quantità numerica della prole  $x_a$ ,  $x_b$  in termini generici  $c_{b1}$ ,  $c_{b2}$  si ottiene:

$$\begin{aligned} \text{Probabilità } (x_a = c_{a1}, x_b = c_{b1}) &= p \in [0, 1] \\ \text{Probabilità } (x_a = c_{a2}, x_b = c_{b2}) &= 1 - p \equiv q \end{aligned} \quad (8)$$

in cui  $\forall j = 1, 2$  (possibili stati dell'ambiente, pioggia e sole) si assume che  $c_{aj}$  e  $c_{bj} \geq 0$  e  $c_{aj} + c_{bj} \neq 0$ . Qualora quest'ultima condizione non fosse assunta, se entrambe le numerosità della progenie,  $c_{aj}, c_{bj}$ , fossero uguali a 0, il modello a scelta binaria degenererebbe poiché per qualsiasi alternativa scelta non sarebbe possibile la riproduzione fra gli individui e la popolazione si estinguerebbe. Definite queste due nuove variabili, il tasso di fecondità relativo<sup>29</sup> è dato dal rapporto fra le quantità della progenie apportate dall'azione  $a$  e  $b$  (per due situazioni ambientali:  $j = 1, 2$ ) cioè:

---

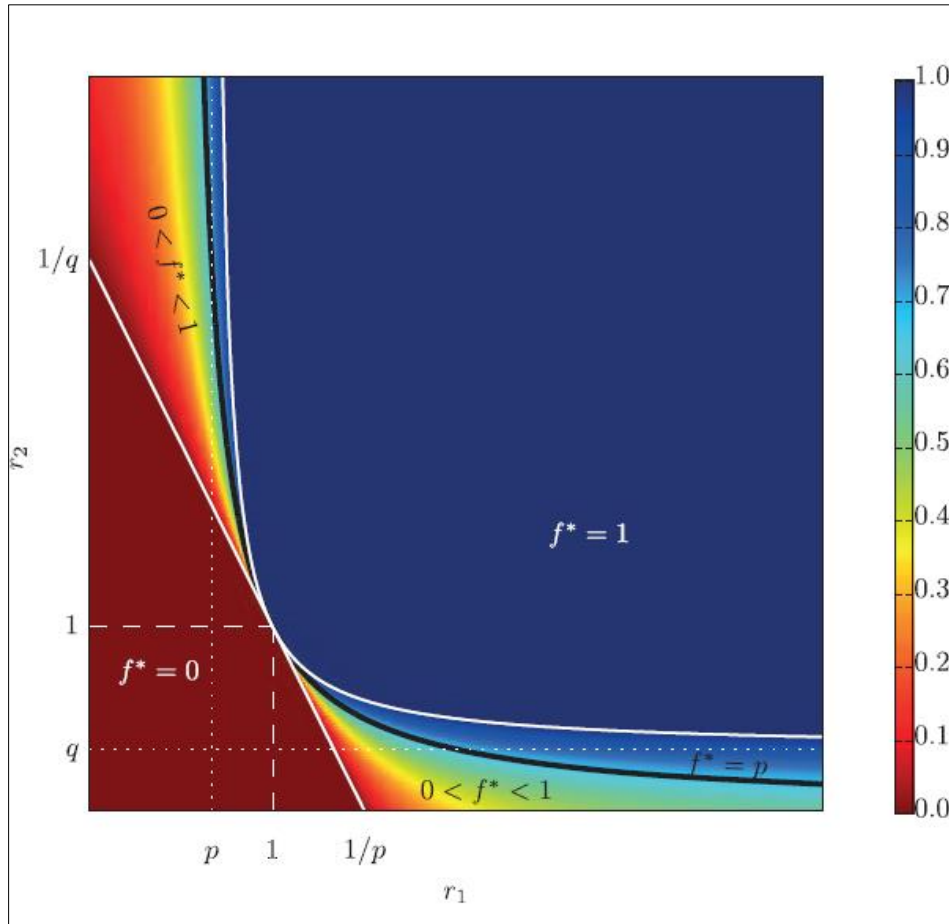
<sup>29</sup> Il tasso di fecondità relativo è già stato presentato in precedenza quando nell'espressione (5) sono stati considerati i valori attesi del rapporto fra le numerosità delle proli relative alle scelte  $a$  e  $b$ , cioè  $E[x_a/x_b]$  e  $E[x_b/x_a]$ . In questo caso non si considera l'operatore del valore atteso, bensì il tasso di crescita relativo è coincidente con il rapporto della produttività delle due opzioni:  $r_j = x_{aj}/x_{bj}$  in base al tempo meteorologico  $j$ -esimo che si verifica.

$r_j \equiv c_{aj}/c_{bj}$ . Applicando l'espressione in (5) sotto le condizioni in (8) si ottengono i seguenti valori per il fenotipo comportamentale ottimale  $f^*$ <sup>30</sup>:

$$f^* = \begin{cases} 1 \\ \frac{p}{1-r_2} + \frac{q}{1-r_1} \\ 0 \end{cases} \quad \text{se} \begin{cases} r_2 \in [q + \frac{pq}{r_1-p}, \infty) \text{ e } r_1 > p \\ r_2 \in (\frac{1}{q} - \frac{p}{q}r_1, q + \frac{pq}{r_1-p}) \text{ e } r_1 > p; r_2 \in (\frac{1}{q} - \frac{p}{q}r_1, \infty) \text{ e } r_1 \leq p \\ r_2 \in [0, \frac{1}{q} - \frac{p}{q}r_1] \end{cases} \quad (9)$$

La condizione sopra determinata  $c_{aj} + c_{bj} \neq 0$  evita che nel calcolo di  $f^*$  si presenti un rapporto  $r_j \equiv c_{aj}/c_{bj}$  pari a  $r_j = 0/0$ .

**Figura 3.1** Rappresentazione cromatica del valore di  $f^*$  per valori di  $r_1$  e  $r_2$



Nel piano  $r_1 - r_2$  (in cui  $r_j \equiv c_{aj}/c_{bj}$ ) si rappresenta la fecondità relativa dell'azione  $a$  rispetto all'azione  $b$  per una situazione ambientale  $j$ ) sono rappresentate le regioni in cui  $f^*$  assume valori pari a 0, 1 o compresi tra i due numeri.

Fonte: Brennan-Lo, 2012

<sup>30</sup> Per il procedimento completo da cui si ottiene l'espressione in (9) si rimanda all'Appendice A.

Nel piano cartesiano  $(r_1; r_2)$  raffigurato nella Figura 3.1 si mettono in evidenza, per mezzo di una scala cromatica, le diverse tipologie di comportamenti ottimali deterministici, per  $f^*$  che varia da 0 a 1 estremi inclusi. Gli asintoti che delimitano la zona colorata in blu scuro, delimitata dalla linea curva bianca simile ad un ramo di iperbole equilatera, sono dati dalle rette parallele agli assi, rispettivamente  $r_1 = p$  (0.75) per l'asintoto verticale e  $r_2 = q$  (0.25)<sup>31</sup>.

I valori di  $r_1$  e  $r_2$  che soddisfano la seguente equazione:

$$p \frac{r_2}{1 - r_2} + q \frac{1}{1 - r_1} = 0 \quad (10)$$

determinano analiticamente la curva nera, rappresentante tutte le coppie di valori  $(r_1; r_2)$ , per cui il fenotipo comportamentale  $f^*$ , caratterizzato dalla *probability matching*, risulta ottimale in termini di successo riproduttivo generazionale e numerosità della popolazione. Infatti dalla Tabella 3.1 il parametro che porta alla numerosità finale più elevata è  $f^* = 0.75$  che coincide con la probabilità (da cui il termine *probability matching*, tradotto letteralmente come “corrispondenza in probabilità”) che nell'ecosistema ci sia sole,  $p = 0.75$ . Tutti gli altri punti non appartenenti a tale curva, ma comunque rientranti nello spazio di piano cartesiano in cui  $0 < f^* < 1$ , descrivono azioni comportamentali randomizzate che, tuttavia, non essendo esattamente equiparabili alla *probability matching*, possono risultare utili e interessanti da analizzare con lo scopo di interpretare comportamenti complessi non deterministici osservati in diverse specie animali (in modo particolare azioni rivolte all'approvvigionamento di cibo, v. Brennan-Lo, 2012).

I risultati ottenuti da un'applicazione originale del medesimo modello, ma sviluppata con qualche semplice estensione, sono in linea con quest'ultima considerazione e verranno successivamente descritti interpretati nel capitolo 4.

### 3.4.4 Ulteriori variazioni e risultati

In questa sezione verranno proposte delle varianti elaborate dagli autori al modello descritto in precedenza per introdurre e descrivere concetti aggiuntivi, come il rischio

---

<sup>31</sup> L'asimmetria tra  $r_1$  e  $r_2$  è dovuta semplicemente al fatto che  $f^* = p$  e  $p \neq \frac{1}{2}$ .

idiosincratice, la razionalità limitata, l'intelligenza e i costi che essa implica, propri della teoria delle ipotesi di mercato adattivo e dei mercati finanziari.

### **Rischio riproduttivo idiosincratice (II caso)**

Si supponga che le variabili casuali  $x_{at}$  e  $x_{bt}$  siano:

1. identicamente e indipendentemente distribuite (IID) da una generazione all'altra;
2. identicamente ed indipendentemente distribuite (IID) tra gli individui appartenenti alla stessa generazione  $t$ ;
3. indipendenti dalle altre variabili casuali per ogni  $f$  e  $i$  (incluso anche la variabile bernoulliana  $I_{it}^f$ ).

Diversamente da quanto ipotizzato nel I caso (v. *supra* 3.4.4), la seconda condizione implica che ogni singolo individuo decide dove costruire la propria abitazione, *indipendentemente* dalla scelta di tutti gli altri ma in modo identicamente distribuito. Ciascuna scelta individuale è rappresentata dalle variabili casuali IID  $x_{iat}$  e  $x_{ibt}$ , differenziare in base all'alternativa ( $a$  o  $b$ ), per ogni individuo  $i$  e generazione  $t$ . Secondo la legge dei grandi numeri, la funzione del tasso di crescita della popolazione è determinata dalla seguente espressione:

$$\alpha(f) = \log[f\mu_a + (1 - f)\mu_b] \quad (11)$$

in cui  $\mu_a \equiv E[x_a]$  e  $\mu_b \equiv E[x_b]$ . Queste due coincidenze permettono che la funzione in (11) sia massimizzata, applicando l'espressione (5), per i seguenti valori estremi della probabilità  $f$ : se la numerosità della prole è maggiore scegliendo l'alternativa  $b$ , allora nessun individuo costruirà la sua abitazione nella valle ( $f = 0$ ); al contrario, se l'opzione  $a$  comporta una prole più numerosa, gli individui costruiranno la propria abitazione nella valle ( $f = 1$ ). Analiticamente si ottiene:

$$f^* = \begin{cases} 0 & \text{se } \mu_a < \mu_b \\ 1 & \text{se } \mu_a > \mu_b \end{cases}$$

Il risultato ottenuto è paragonabile, dal punto di vista interpretativo, all'eliminazione del rischio idiosincratice che viene spesso messa in pratica dalle strategie di investimento e di gestione di portafogli finanziari. Dal momento che gli individui sono già

sufficientemente diversificati nel processo decisionale e manifestano azioni comportamentali statisticamente indipendenti, essi possono optare per la stessa alternativa senza mettere a rischio la sopravvivenza della specie. Infatti se nell'ecosistema si verificano eventi specifici che si ripercuotono solo su alcuni individui, se, come ipotizzato in questo II caso, i processi decisionali sono IID, un comportamento di tipo deterministico risulta ottimale grazie all'adattamento degli individui che subiscono precedentemente esperienze negative date da scelte risultate inadeguate e svantaggiose. Diversamente, qualora nel contesto ambientale accadano degli episodi e shock sistematici che provocano effetti negativi uguali fra l'intera popolazione, un fenotipo comportamentale randomizzato e casuale risulta migliore e preferibile rispetto a quello deterministico, poiché la probabilità della sopravvivenza della specie aumenta. La distinzione fra eventi sistematici ed eventi idiosincrici in un ecosistema, permette di comprendere le manifestazioni di irrazionalità da parte dell'*Homo oeconomicus*. L'uomo infatti, tende a ragionare irrazionalmente e ad adottare comportamenti istintivi soprattutto nel dover fronteggiare eventi sistematici che mettono fortemente a rischio la sopravvivenza; mentre, a seguito di eventi idiosincrici, emerge l'aspetto cognitivo e comportamentale più razionale dell'individuo, classicamente ipotizzato nella letteratura economica. Ciò che emerge da queste considerazioni è un aspetto che si ritrova nella teoria delle AMH: la tipologia di rischio ambientale che incide sulla fecondità di una specie, perciò, in ultima istanza, sulla sua sopravvivenza, determina la modifica e l'adattamento, possibili grazie all'*intelligenza naturale* e alla *razionalità*, degli individui ad attuare scelte e azioni in linea con il fenotipo comportamentale più adeguato (alle caratteristiche dell'ecosistema) e vantaggioso (in termini di riproduzione).

### **Correlazione ed intelligenza evoluzionistica (III caso)**

Per descrivere il concetto di intelligenza, è necessario che gli individui non attuino scelte in modo 'meccanico', cioè indipendentemente dalle altre variabili casuali che descrivono l'ecosistema. Per concretizzare ed applicare analiticamente questo aspetto, delle tre ipotesi descritte nei casi I e II, gli autori [Brennan e Lo, 2012] ne modificano l'ultima, supponendo che le variabili casuali  $x_{at}$  e  $x_{bt}$  siano dipendenti dalle altre variabili casuali (per ogni  $f$  e  $i$ ) in particolar modo dalla variabile bernoulliana di

distribuzione  $I_{it}^f$  e viene introdotto un nuovo parametro: il coefficiente di correlazione  $\rho = \text{Corr}[I_{it}^f, (x_{iat} - x_{ibt})]$ , fissato per ogni generazione  $t$ , tra la numerosità della generazione successiva (il successo riproduttivo) e le scelte effettuate. In seguito si illustrerà che tale coefficiente di correlazione possa essere considerato una misura dell'intelligenza.

Per definire il tasso di crescita della popolazione si considera anche in questo caso la legge dei grandi numeri, inserendo tuttavia il coefficiente di correlazione  $\rho$  e la deviazione standard tra  $x_{at}$  e  $x_{bt}$  definita dal termine  $\sigma$ . L'equazione (11) viene modificata come segue:

$$\alpha(f, \rho) = \log \left[ f\mu_a + (1 - f)\mu_b + \rho\sigma\sqrt{f(1 - f)} \right] \quad (12)$$

Il termine aggiuntivo  $\rho\sigma\sqrt{f(1 - f)}$ , riflette in che modo la correlazione incide quantitativamente tra la scelta e la numerosità della prole conseguente ad essa.

Gli individui caratterizzati da un coefficiente di correlazione  $\rho$  minore di 0 si riproducono con un basso tasso di crescita e, perciò, hanno una bassa probabilità di sopravvivenza nel lungo periodo, poiché le decisioni prese risultano inadeguate, svantaggiose e portano a risultati inferiori alla media della popolazione<sup>32</sup>. Le sottopopolazioni denotati da un coefficiente di correlazione maggiore di 0 generano delle proli più numerose e coloro con il coefficiente maggiore,  $\rho^*$ , quindi dotati di intelligenza, saranno la sotto-popolazione con caratteri dominanti all'interno della specie. Massimizzando la funzione del tasso di crescita  $\alpha$  rispetto ai due parametri  $f$  e  $\rho$  si ottengono i valori, sia del fenotipo comportamentale ottimale, sia del livello maggiore di intelligenza, ideali per generare la maggiore quantità di individui ed assicurare così la sopravvivenza della specie.

#### **Costi e razionalità limitata (IV caso)**

Una correlazione positiva non è una caratteristica disponibile a tutti gli individui, poiché il suo possesso determina il sostenimento di costi. Un determinato comportamento risultante ottimale in certe condizioni ambientali può aumentare la numerosità attesa

---

<sup>32</sup> Ad esempio, possono considerarsi decisioni svantaggiose quelle in cui:

- si sceglie  $a$  quando  $x_a - x_b$  porta ad una numerosità generazionale inferiore alla media;
- si sceglie  $b$  quando  $x_a - x_b$  porta ad una numerosità generazionale superiore alla media.

della progenie, ma tale effetto può essere ridotto poiché l'adattamento e la modifica di tratti fisiologici e cognitivo-comportamentali implica il sostenimento di costi (in ambito biologico con il concetto di “costi” si intendono le risorse ‘fisiologiche’ da utilizzare, che possono essere paragonate a risorse in termini di costi di reperimento di informazioni e di innovazione tecnologica qualora si applichi il modello evuzionistico in ambito economico-finanziario).

Introducendo la funzione di costo  $c(\rho)$  (definita nel dominio dai valori della correlazione  $\rho$ ), gli autori modificano l'espressione analitica della funzione del tasso di crescita della specie (13) nel seguente modo:

$$\alpha(f, \rho) = \log \left[ f\mu_a + (1 - f)\mu_b + [\rho - c(\rho)]\sigma\sqrt{f(1 - f)} \right] \quad (14)$$

in cui il termine  $[\rho - c(\rho)]$  descrive l'effetto, al netto dei costi, della correlazione sul tasso di crescita. La successiva massimizzazione della funzione  $\alpha(f, \rho)$  determina un'unica soluzione, rappresentata dalla coppia di valori  $(f^*, \rho^*)$ . Poiché  $\rho$  è caratterizzato da vincoli non lineari (descritti attraverso il tipo di funzione dei costi  $c(\rho)$ ) che dipendono da  $f$ , le espressioni che definiscono i valori ottimali  $f^*, \rho^*$  non sono analiticamente rappresentabili come quelle ricavate nel I caso in cui si era ipotizzato che gli individui non avessero intelligenza e si comportassero in modo ‘irrazionalmente meccanico’. Ciò nonostante l'insieme delle soluzioni per  $f^*$  può essere espresso, considerando gli effetti dei costi della correlazione, attraverso la seguente partizione:

$$f^* = \begin{cases} 0 \\ Prob(x_a > x_b) \end{cases}$$

Il fenotipo ottimale  $f^*$  sarà: pari a 0 quando l'ottenimento della correlazione risulta troppo costoso per gli individui della popolazione e coincidente alla *probability matching*, cioè la probabilità che  $x_a$  sia maggiore di  $x_b$ , quando gli individui sono dotati di intelligenza. Un tasso di crescita della specie sarà tanto più elevato, tanto maggiore sarà il livello di intelligenza, definito da un alto valore del parametro  $\rho^*$ , ottenibile sostenendo un alto costo  $c(\rho^*)$ . La tipologia comportamentale  $f^*$  perciò, non

sarà quella ottimale ( $f^* = 1$ ), ma quella preferibile<sup>33</sup> e “soddisfacente” in termini di trade-off tra intelligenza e costi. Dal punto di vista interpretativo la funzione dei costi rappresenta i limiti alla completa intelligenza nell’individuo e il tasso di crescita ottimale della popolazione (contenuto nell’espressione (14)) è una formalizzazione analitica della *bounded rationality*: l’individuo ha la possibilità e le capacità di sopravvivere e riprodursi unicamente per mezzo dell’impiego e dell’utilizzo di risorse. Completando la descrizione del IV caso, si può ulteriormente dedurre che se il costo dell’intelligenza dipendesse da altri fattori, come ad esempio variabili e caratteristiche ambientali definite dall’insieme  $z = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ , la funzione di costo  $c(\rho)$  sarebbe caratterizzata da altrettante variabili e l’obiettivo analitico del modello, cioè la massimizzazione del tasso di crescita della popolazione, risulterebbe più complesso e condurrebbe a molteplici soluzioni, rappresentanti la presenza simultanea di più fenotipi comportamentali e livelli di intelligenza ottimali<sup>34</sup>, data la maggiore quantità di variabili ambientali considerate. Quest’ultimo presupposto esprime una delle idee fondamentali della sociobiologia-psicologia dell’evoluzione e del nuovo filone teorico delle AMH, cioè il fatto che il contesto e le caratteristiche ambientali influenzano il comportamento e il processo decisionale degli individui. Nel modello di mercato evoluzionistico, teorizzato dalle ipotesi di mercato adattivo, gli individui non sono né completamente razionali, né completamente irrazionali. Essi sono *intelligenti*, cioè modificano le proprie caratteristiche in base alle condizioni contestuali, ragionano con un’ottica di lungo periodo e attuano decisioni e strategie competitive, che si adattano alle modifiche ‘ambientali’, con lo scopo di sopravvivere e vincere le forze della selezione naturale

### 3.5 Conclusioni

---

L’evidenza empirica dimostra che, piuttosto della razionalità assoluta, ci sono molteplici comportamenti possibili che si manifestano quando il contesto è contraddistinto dalle *forze della selezione naturale* che dominano le dinamiche dell’intero ecosistema, condizionando anche la sopravvivenza e l’evoluzione dell’insieme di individui. Di conseguenza per comprendere il comportamento ottimale di una determinata specie è

---

<sup>33</sup> Il fenotipo comportamentale preferibile e ‘soddisfacente’  $f^*$  sarà quello tendente al valore massimo del tasso di crescita  $\alpha(f^*, \rho^*)^*$ .

<sup>34</sup> L’insieme dei fenotipi comportamentali  $f^*(z)$  e intelligenze ottimali  $\rho^*(z)$  risultanti dalla popolazione sono funzione di  $z$ , variabile che determina in modo indiretto il tasso di crescita ottimale  $\alpha(f^*, \rho^*)^*$ .



utile capire come esso influisca sul successo riproduttivo generazionale di essa. Formalizzando tali concetti applicati al *binary-choice model*, Brennan e Lo dimostrano che l'*intelligenza* è il modello comportamentale che massimizza il successo riproduttivo e i limiti razionali sono rappresentati dalle caratteristiche ambientali che vincolano l'individuo nelle sue scelte e azioni. Il processo evolutivo inoltre, può determinare atteggiamenti distorsivi molto più sofisticati (ad esempio l'*overconfidence*, l'altruismo, l'illusione, ...) e meccanismi comportamentali strategici (Lo [Brennan-Lo, 2012] nomina come esempio il *Hawk-Dove game*<sup>35</sup>). Infatti se la scelta fra *a* e *b* dell'individuo *i* influenza direttamente o indirettamente la medesima scelta per l'individuo *j*, un comportamento strategico risulta più adeguato e vantaggioso rispetto alle distorsioni comportamentali della *probability matching* o dell'avversione alle perdite. Analogamente, se le risorse ambientali sono limitate tra la popolazione si manifestano comportamenti (ad esempio l'altruismo e la collaborazione) e dinamiche inter-individuali vantaggiosi per l'intero gruppo.

Sebbene il modello sia semplice nelle ipotesi<sup>36</sup> e nei risultati finali, il concetto principale emerso da questo studio, coerentemente in linea con la teoria delle Adaptive Markets Hypothesis, è che i connotati determinanti il fenotipo comportamentale ottimale sono generati dall'interazione tra le caratteristiche proprie degli individui della specie e quelle ambientali<sup>37</sup>. Dal momento che sono le forze della selezione naturale a modificare i processi decisionali e cognitivi degli individui, per comprendere l'origine

<sup>35</sup> L'*Hawk-Dove Game*, cioè il "gioco falco-colomba" è un concetto appartenente alla letteratura sulla teoria dei giochi (v. Besanko-Braeutigam, 2009). Esso descrive una strategia di combattimento in cui si scontrano un falco (F) con una colomba (C) (predatore vs preda) oppure entrambi i singoli appartenenti alla stessa specie (falco vs falco e colomba vs colomba). L'output che deriva dalle quattro differenti tipologie di combattimento è riassunto nella seguente tabella, in cui *V* rappresenta il valore della vincita e *C* il costo sostenuto per combattere:

|   | F   | C                                       |
|---|---|---|
| F | $\left(\frac{V-C}{2}; \frac{V-C}{2}\right)$ | $(V; 0)$                                |
| C | $(0; V)$                                    | $\left(\frac{V}{2}; \frac{V}{2}\right)$ |

Ovviamente quando vi è lo scontro falco/colomba e colomba/falco, il predatore vince e guadagna l'intero importo di *V*; se si scontrano due predatori, non ci sarà un vincitore e il premio *V* sarà diviso in due, al netto dei costi *C*, dovuti alle risorse impiegate nel duro combattimento; se si scontrano due prede, invece, la vincita sarà perfettamente divisa tra le due, senza la deduzione di alcun costo. Questa strategia descrive l'importanza e l'influenza dell'appartenenza ad una specie, cui fanno riferimento gli individui coinvolti nella competizione.

<sup>36</sup> Nelle ipotesi e nelle descrizioni del modello non si considerano in modo approfondito e analitico le limitazioni ambientali e i processi decisionali strategici.

<sup>37</sup> Ad esempio Simon (v. References in Brennan-Lo, 2012) dà prova al fatto che la complessità osservata nel cammino delle formiche è dovuta alla tipologia di terreno attraversato più che al complesso algoritmo che descrive il loro percorso.

delle limitazioni razionali e dell'intelligenza è più corretto porre attenzione ed analizzare i contesti ambientali passati e il loro cambiamento nel tempo piuttosto che l'evoluzione degli individui. Il modello a scelta binaria può essere ulteriormente perfezionato se si considerano alcune estensioni nelle ipotesi come, ad esempio, la variazione delle condizioni ambientali nel tempo, le mutazioni genetiche negli individui, la possibilità di avere più generazioni in un arco temporale: queste circostanze, sebbene la loro applicazione sarebbe analiticamente molto complessa, renderebbero il *framework* del modello molto più realistico e più adeguato per descrivere aspetti comportamentali umani e dei mercati finanziari.

Nel capitolo successivo verrà presentata un'applicazione originale del modello a scelta binaria in cui vengono apportate delle estensioni e delle modifiche nella randomizzazione di alcune variabili. Saranno inoltre illustrati i relativi risultati, paragonandoli a quelli descritti in questo capitolo ed interpretandoli con riferimento ai mercati finanziari e alla teoria delle AMH.

## 4. APPLICAZIONE DEL MODELLO EVOLUZIONISTICO IN MATLAB<sup>®</sup>

---

### 4.1 Introduzione

---

In questo capitolo è descritta in maniera dettagliata, un'applicazione originale del modello evoluzionistico di Brennan e Lo [2012] elaborata e condotta dall'autrice di questa tesi. Gli obiettivi principali di questa applicazione sperimentale sono: innanzitutto replicare e proporre un confronto analitico e nei risultati tra l'applicazione descritta nel capitolo precedente e quella spiegata in seguito, testarla con altri parametri ed altresì fornire delle interpretazioni al modello e ai risultati ottenuti in riferimento alla teoria delle *Adaptive Markets Hypothesis* applicata ai mercati finanziari.

Nonostante la costruzione analitica si basa sulla simulazione sperimentale condotta dai due autori, in questa simulazione vengono apportate delle modifiche e delle estensioni dal punto di vista analitico e metodologico che conducono a risultati differenti. Tali estensioni fanno riferimento in *primis* al numero di periodi generazionali che costituiscono l'intera simulazione: l'applicazione sperimentale di Brennan e Lo contiene 25 periodi, mentre in questa ne vengono simulati 36. Anche i valori numerici associati ai diversi parametri del modello evoluzionistico sono in quantità maggiore: questo determina l'ottenimento di un'analisi più completa, composta da varie simulazioni che, talvolta, non sono risultate computabili poiché, data la loro complessità, il computer non era sufficientemente dotato di potenza di calcolo o di memoria.

I dati del modello evoluzionistico sono stati concretamente simulati per mezzo di un codice, scritto utilizzando Matlab. Matlab<sup>®</sup> (acronimo di MATrix LABoratory) è un linguaggio software ad alte prestazioni che integra funzioni di calcolo matematico, visualizzazione grafica e programmazione. È un linguaggio di programmazione matematico ad altissimo livello orientato alla manipolazione delle matrici e dei vettori: infatti la sua principale caratteristica è quella di non operare semplicemente con numeri ma direttamente con matrici. Inoltre, le istruzioni fondamentali che possono essere usate sono corrispondenti alle funzioni che vengono usate normalmente in matematica per il calcolo matriciale e vettoriale (operazioni algebriche, esponenziale, inversa) e tutte le composizioni di queste funzioni possono essere rapidamente assemblate in espressioni

di facile comprensione. È uno dei programmi scientifici di maggior diffusione, usato nella ricerca e per il calcolo tecnico e scientifico e il suo linguaggio di alto livello si è imposto come leader mondiale nel settore del calcolo ingegneristico e della simulazione. Il capitolo è strutturato nel seguente modo: inizialmente si descrive in modo analitico l'elaborazione del codice in Matlab, presentandone tutte le specificità statistiche delle variabili e dei vettori, e la metodologia adottata per condurre le simulazioni. Successivamente si illustrano i risultati ottenuti dalle due principali simulazioni proponendo alcuni paragoni con i risultati riportati nel capitolo precedente e utilizzando grafici utili alla comprensione visiva degli outcome. Infine, l'ultima parte, la più interessante ed originale (in quanto priva di precedenti considerazioni da parte degli autori del modello evolucionistico), è dedicata alla sezione interpretativa del modello evolucionistico e della sua simulazione sperimentale in relazione alla teorie delle ipotesi di mercato adattivo e ai mercati finanziari.

## **4.2 Descrizione analitica dell'implementazione del modello Brennan-Lo in Matlab e della metodologia operativa**

---

L'implementazione originale del seguente modello evolucionistico prende spunto da quella sviluppata dagli autori Brennan e Lo (v. *supra* cap. 3); tuttavia, come sarà esposto successivamente in questo paragrafo, vengono apportate delle modifiche e delle estensioni dal punto di vista analitico e metodologico che conducono a risultati differenti.

Questa simulazione viene condotta con riferimento al medesimo contesto sperimentale ideato ed utilizzato dagli autori sopra citati. Per rendere più comprensibile la spiegazione riferita allo sviluppo analitico della simulazione evolucionistica, è utile richiamare una breve descrizione delle caratteristiche qualitative della 'situazione biologica' ipotizzata<sup>1</sup>. Tale situazione biologica è rappresentata da un ecosistema in cui i giorni caratterizzati da un meteo soleggiato si verificano con una probabilità  $p$  pari al 75%, mentre nel rimanente 25% dei giorni si verifica un tempo piovoso. Gli individui di una popolazione  $t = 1$  (che saranno nella prima simulazione 10, nella seconda 20) devono effettuare una decisione rispettivamente al luogo in cui costruire la propria abitazione, nella valle (valley, scelta  $a$ ) o sull'altopiano (plateau, scelta  $b$ ). Il tempo

---

<sup>1</sup> Per un approfondimento si veda il capitolo 3, interamente dedicato alla spiegazione quantitativa e qualitativa del modello, con l'ulteriore descrizione dei risultati dell'applicazione di Brennan e Lo.

meteorologico dell'ecosistema influenza direttamente la sopravvivenza e il successo riproduttivo dei singoli in base alla scelta effettuata: durante i giorni di sole, coloro che hanno costruito nella valle sono protetti dall'ombra e procurano le risorse idriche dai ruscelli, infatti la numerosità attesa della prole  $x_a$  (relativa alla scelta  $a$ ) per ciascun individuo è pari a  $E[x_a] = 3$ ; sull'altopiano, dove l'acqua scarseggia, gli individui sono destinati a scomparire e a non riprodursi, infatti il valore atteso della prole  $x_b$  (relativa alla scelta  $b$ ) è  $E[x_b] = 0$ . Viceversa, nei giorni di pioggia si verifica la situazione opposta: gli individui che costruiscono la loro abitazione nella valle subiscono inondazioni che ne provocano la scomparsa e la mancanza di una generazione successiva  $E[x_a] = 0$ ; coloro che abitano sull'altopiano invece, essendo sopraelevati sopravvivono e si riproducono ciascuno con un valore atteso pari a  $E[x_b] = 3$ . Come è riportato in seguito, le numerosità delle proli associate al successo o insuccesso riproduttivo vengono modificate nei valori, per permettere più tipologie di simulazioni e condurre delle analisi interpretative più complete.

Dati questi parametri sono effettuate delle simulazioni per un numero di generazioni pari a 35 (nella simulazione precedente erano 25 generazioni) partendo da due differenti quantità della popolazione iniziale (10 e 20 individui) e variando il parametro che rappresenta la probabilità  $f$  che venga effettuata la scelta di costruire a valle (scelta  $a$ ). Il valore che apporta al numero maggiore di individui della generazione finale (prole finale) viene definito come  $f$  ottimale, contraddistinto dalla notazione  $f^*$ , o, qualitativamente, *fenotipo comportamentale ottimale*.

#### **4.2.1 Costruzione delle variabili per l'elaborazione del codice Matlab**

L'obiettivo di questa sezione è quello di definire le linee guida e le scelte analitiche sulle quali si è costruita un'applicazione originale del modello di Brennan-Lo e fornire un'esaustiva descrizione di esso. Inizialmente sono elencate le variabili utilizzate per la definizione analitica del modello, illustrandone le relative caratteristiche e funzioni all'interno di esso. Successivamente, riportando anche i codici sviluppati in Matlab, si procede con la spiegazione di alcune modifiche di tipo statistico-matematico apportate per ottimizzare la simulazione del modello e delle estensioni operative effettuate per ampliare l'insieme dei risultati finali e le relative analisi e interpretazioni.

## Variabili utilizzate nel codice Matlab

Le variabili derivanti direttamente dal modello evolutivo del cap. 3 e le strutture progettate attraverso il codice Matlab, utilizzate entrambi nelle simulazioni sono le seguenti:

1.  $f$ : è il parametro di maggiore importanza, oggetto di studio del modello<sup>2</sup>; esso rappresenta la probabilità che gli individui di una generazione scelgano l'opzione  $a$ , cioè costruire la propria abitazione a valle: proprio per questo motivo esso determina la proporzione di individui che costruisce a valle. Tale parametro assume un diverso valore per ogni computazione<sup>3</sup> dell'evoluzione della specie. In questa simulazione si considerano i seguenti valori per  $f \in [0, 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40, 0.45, 0.50, 0.55, 0.60, 0.65, 0.70, 0.75, 0.80, 0.85, 0.90, 0.95, 1]$ , corrispondenti a 21 computazioni, rendendo molto più dettagliata la completa simulazione e l'analisi del modello rispetto a quella condotta da Brennan e Lo [2012] che hanno utilizzato 5 valori per  $f$ . Il complemento  $(1 - f)$ , rappresenta, per complementarietà ad 1, la probabilità che l'individuo effettui la scelta  $b$ , cioè costruire la propria abitazione sull'altopiano. Si ricorda che la probabilità  $f$  può essere formalmente sintetizzata attraverso la seguente variabile Bernoulliana:

$$I_{it}^f = \begin{cases} 1 & \text{con probabilità } f \\ 0 & \text{con probabilità } 1 - f. \end{cases}$$

2.  $T$ : rappresenta il numero totale di generazioni della popolazione (o specie) che si riproduce di volta in volta, ossia tutti i periodi di cui si compone l'evoluzione della specie. Per questioni legate alla potenza del computer (v. *infra*) utilizzato per condurre le simulazioni, si è deciso un arco temporale di analisi costituito da 35 periodi, 10 in più rispetto al modello descritto nel precedente capitolo.
3.  $k = 1:T$ : è il parametro che viene di seguito associato alle  $T = 35$  generazioni simulate.

---

<sup>2</sup> L'obiettivo del modello, oltre che descrivere un processo evolutivo di una specie, è infatti, quello di individuare il valore di  $f^*$ , fenotipo comportamentale ottimale, che porta al numero maggiore di individui della generazione finale.

<sup>3</sup> Nel presente capitolo con il termine "computazione" si intende un singolo *shot* computazionale che viene "lanciato", attraverso il tasto F5, affinché il codice Matlab elabori l'outcome.

4.  $n(1)$ : è il parametro a cui si attribuisce il numero di individui della popolazione alla generazione 1; esso è inizialmente posto pari a 10 ugualmente al modello Brennan-Lo e successivamente raddoppiato a 20 per capire come si modifica il processo evolutivo e come cambia il fenotipo ottimale  $f^*$  applicando tale modifica.
5.  $n = \text{zeros}(T, 1)$ : è il vettore  $T_{\text{righe}} \times 1_{\text{colonna}}$  di zeri che viene predisposto per contenere la numerosità finale di ogni generazione per  $t = 1:35$ .
6.  $xv1 = 3$ : rappresenta il successo riproduttivo dell'individuo  $x$  che effettua la scelta  $a$  (rappresentata dalla lettera  $v$  corrispondente a *valley*, valle) quando c'è il sole (rappresentato dal numero 1); in particolare la numerosità della prole è pari a 3, cioè da ogni singolo individuo che costruisce la propria abitazione a valle in presenza di meteo soleggiato se ne generano 3, che costituiscono la numerosità della generazione  $t$  successiva ( $xv$  coincide con la variabile  $x_{at}$  del modello di Brennan-Lo).
7.  $xp2 = 3$ : analogamente a quanto detto rispetto a  $xv1 = 3$ , esso rappresenta il successo riproduttivo dell'individuo  $x$  che effettua la scelta  $b$  (rappresentata dalla lettera  $p$  corrispondente a *plateau*, altopiano) quando c'è pioggia (rappresentato dal numero 2); in particolare la numerosità della prole è pari a 3, cioè da ogni singolo individuo che costruisce la propria abitazione sull'altopiano in presenza di meteo piovoso se ne generano 3, che costituiscono la numerosità della generazione  $t$  successiva ( $xp$  coincide con la variabile  $x_{bt}$  del modello di Brennan-Lo).
8.  $xv2 = 0$ : rappresenta l'insuccesso riproduttivo dell'individuo  $x$  che effettua la scelta  $a$  (rappresentata dalla lettera  $v$  corrispondente a *valley*, valle) quando c'è pioggia (rappresentato dal numero 2); ogni singolo individuo che costruisce la propria abitazione a valle in presenza di meteo piovoso non sopravvive e si estingue senza riprodursi in alcun ulteriore individuo.
9.  $xp1 = 0$ : analogamente a quanto detto rispetto  $xv2 = 0$ , esso rappresenta l'insuccesso riproduttivo dell'individuo  $x$  che effettua la scelta  $b$  (rappresentata dalla lettera  $p$  corrispondente a *plateau*, altopiano) quando c'è il sole (rappresentato dal numero 1); ogni singolo individuo che costruisce la propria

abitazione sull'altopiano in presenza di meteo soleggiato non sopravvive e si estingue senza riprodursi in alcun ulteriore individuo.

In queste applicazioni si suppone che variabili casuali  $xv_{1,2}$  e  $xp_{1,2}$  siano:

- identicamente e indipendentemente distribuite (IID) da una generazione all'altra;
- identicamente ed indipendentemente distribuite (IID) tra gli individui appartenenti alla stessa generazione  $t$ ;
- indipendenti dalle altre variabili casuali  $f$  (probabilità che gli individui costruiscano a valle) e  $i$  (indica il tempo meteorologico).

A differenza dall'applicazione di Brennan e Lo (in cui la scelta degli individui, *all'interno della stessa generazione*, era dipendente da quella altrui), la seconda condizione implica che ogni singolo individuo decide dove costruire la propria abitazione, *indipendentemente* dalla scelta di tutti gli altri ma in modo identicamente distribuito.

10.  $p = 0.75$ : è il valore fisso associato alla probabilità che si verifichi un giorno soleggiato (nel 75% dei casi ci sarà il sole).
11.  $r = \text{zeros}(T, 1)$ : è il vettore  $T_{\text{righe}} \times 1_{\text{colonna}}$  di zeri costruito per generare il tempo meteorologico sole o pioggia per i  $T$  periodi.
12.  $r(i) = \text{binonrd}(1, p)$ : dato  $i = 1:T$ , esso rappresenta il vettore colonna che descrive il tempo meteorologico per tutti i  $T$  periodi, simulato attraverso una variabile binomiale<sup>4</sup> randomizzata e la probabilità di sole  $p$  del 75% (per approfondimenti v. *infra*).
13.  $t = \text{zeros}(n(1), 1)$ : è il vettore  $n_{\text{righe}} \times 1_{\text{colonna}}$  di zeri utilizzato per simulare il numero di individui in base a dove costruiscono la propria abitazione.

---

<sup>4</sup> Una variabile casuale  $X$  può avere una distribuzione binomiale  $Bi(n, p)$  caratterizzata dai seguenti parametri:

- $n$ : rappresenta il numero delle "prove" indipendenti fra esse effettuate;
- $p$ : la probabilità di successo della prova ( $0 \leq p \leq 1$ );
- dato  $p$ , si definisce anche  $q = 1 - p$ , come probabilità di fallimento della prova.

Dati questi parametri, la funzione di distribuzione di una variabile binomiale può formalizzarsi come:

$$\text{Binom}(n, p) = f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x \cdot (1-p)^{(n-x)} & \text{per } x = 0, 1, 2, \dots, n \text{ e } 0 \leq p \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\text{e } \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} p^x \cdot (1-p)^{(n-x)} = 1.$$



14.  $t(i) = \text{binornd}(1, f)$ : è il vettore colonna che rappresenta tutte le  $k$  generazioni (infatti si assume che  $i = 1:n(k)$  con  $k = 1:T$ ) in base a dove costruisce la popolazione, simulato attraverso una variabile binomiale randomizzata e la probabilità di scegliere di costruire a valle  $f$  che assume molteplici valori determinati dall'autrice all'inizio di ogni computazione (per approfondimenti v. *infra*).
15.  $n(k + 1)$ : è il vettore outcome della sommatoria che calcola la numerosità della generazione successiva ( $k + 1$ ) a quella che si riproduce e decide dove costruire ( $k$ ). Nel codice Matlab esso è calcolato per mezzo della seguente espressione in cui:  $t(i)$  ed il suo complemento  $(1 - t(i))$  indicano, rispettivamente, dove costruiscono gli individui della popolazione;  $xv1$  e  $xp2$  rappresentano i due successi riproduttivi;  $r(k)$  ed il suo complemento  $(1 - r(k))$  indicano il tempo meteorologico che si verifica:

$$n(k + 1) = \text{sum}\{t(i) * xv1 * r(k) + [(1 - t(i)) * xp2 * (1 - (r(k)))]\}; \quad (1)$$

rappresenta l'implementazione, modificata attraverso le estensioni analitiche (variabili e vettori) proposte in questa sede, dell'equazione del modello generalizzato di Brennan-Lo (v. espressione (2) cap. 3):

$$n_t(f) = \sum_{i=1}^{n_{t-1}(f)} [I_{it}^f x_{at} + (1 - I_{it}^f) x_{bt}]. \quad (2)$$

#### 4.2.2 Descrizione analitica dei vettori randomizzati e stesura dei codici

L'elaborazione dei vettori che simulano il tempo meteorologico e le scelte degli individui richiedono una spiegazione più approfondita poiché le scelte analitiche attuate in questa implementazione non sono descritte nello studio che tratta del modello di Brennan-Lo [2012].

Per simulare il tempo meteorologico che si verifica nell'ecosistema analizzato è adottata una strategia di formalizzazione statistica che rende realistica la modalità con cui si susseguono periodi di sole in alternanza a periodi di pioggia. Per concretizzare la casualità del tempo meteorologico si applica a ciascuna componente  $T$  del vettore colonna  $r = \text{zeros}(T, 1)$  la definizione di variabile binomiale randomizzata (comando

Matlab: `binornd`) modificando il vettore in questo modo  $r(i) = \text{binornd}(1, p)$  (con  $i = 1:n(k)$  per  $k = 1:T$ ). La formalizzazione di questo vettore indica che all'interno di un vettore colonna di zeri, compare in modo casuale il numero 1, con una probabilità  $p = 0.75$ . Dal punto di vista qualitativo, il vettore generato, contenente 35 righe, sarà composto da 1 (che significa tempo soleggiato) con probabilità (o equivalentemente frequenza  $p = 0.75$ ) e da 0 (che significa tempo piovoso) con probabilità (o frequenza  $1 - p = 0.25$ ), i quali si alternano in modo casuale, randomizzato. Ad esempio, se il vettore  $r$  fosse composto di 100 righe, è probabile che ci sarebbero valori 1 in quantità pari a 75 e valori 0 in quantità pari a 25. Il vettore generato, che è il medesimo per ogni computazione, è raffigurato nella Tabella 4.1. Il procedimento che descrive la casualità nel tempo meteorologico non è analiticamente descritto nella simulazione di Brennan-Lo.

In modo analogo, modificando e completando la definizione formale del precedente vettore  $t = \text{zeros}(n(1), 1)$ , è elaborato il vettore  $t(i) = \text{binornd}(1, f)$  utilizzato con lo scopo di generare la casualità nel processo decisionale in base a cui gli individui scelgono dove costruire la propria abitazione. Anche in questo caso il vettore, per mezzo dell'inserimento della distribuzione binomiale, simula la scelta di ogni individuo in modo randomizzato tenendo comunque conto del valore assegnato alla probabilità che si effettui la scelta di costruire a valle, cioè  $f$ . Se l'individuo effettua la scelta  $a$ , cioè costruire a valle, il codice attribuisce il valore 1 alla riga relativa alla generazione  $t$  cui appartiene l'individuo; infatti alla serie di zeri, si alternano gli 1 in base al parametro  $f$ , che si modifica in ogni computazione del processo evolutivistico della specie. Confrontando questa costruzione del vettore che simula un'accettabile casualità del tempo meteorologico attraverso una variabile binomiale con l'applicazione sperimentale condotta da Brennan e Lo [2012], si può notare, nel cap.3, come i due autori non illustrino le modalità con cui simulano il susseguirsi alternato di giorni soleggiati e piovosi. Tuttavia, analizzando i dati, in particolare i dati della colonna  $f = 1$ , riportati nella Tabella 3.1 (tabella contenente i dati outcome delle computazioni svolte dai due autori) nella quale si intuisce che si verifica un tempo soleggiato fino al periodo  $T = 13$ . Infatti, poiché la popolazione continua a riprodursi generazione dopo generazione in modo esponenziale e la totalità degli individui costruisce la propria abitazione a valle, se ci fosse un periodo caratterizzato da un meteo piovoso, l'intera popolazione si

estinguerebbe, e nella serie numerica comparirebbe il numero 0. Ciò si verifica solamente alla 14-esima generazione, quando l'intera popolazione non si riproduce e si estingue: dati gli altri parametri, l'unica motivazione è che per quel periodo  $T$  si è verificato un meteo piovoso, dopo 13 periodi soleggiati. Questo fatto è interpretabile come un'ipotetica stagionalità implicita, presente nell'applicazione sperimentale del modello; ulteriori considerazioni in merito vengono fatte in seguito, quando si tratterà il modello evuzionistico interpretato con riferimento ai mercati finanziari.

Di seguito si riporta uno schema che descrive le modalità causa-effetto con cui si relazionano le componenti riga dei vettori  $r$  e  $t$ , (contenti le cifre 0 e 1 in base a quanto detto sopra), con la riproduttività dell'individuo (valore 3) o la sua estinzione (valore 0), associate alla scelta fatta (*valley/plateau*) e al tempo meteorologico che si verifica.

|         |               |                |
|---------|---------------|----------------|
|         | <i>valley</i> | <i>plateau</i> |
| sole    | (1; 1)        | (1; 0)         |
| pioggia | (0; 1)        | (0; 0)         |

 $\xrightarrow{\text{determina}}$ 

|           |           |
|-----------|-----------|
| $xv1 = 3$ | $xp1 = 0$ |
| $xv2 = 0$ | $xp2 = 3$ |

Ad esempio, si verifica un giorno di sole (valore estratto dal vettore  $r$  è pari a 1) e l'individuo sceglie di costruire a valle (valore estratto dal vettore  $t$  è pari a 1), e la coppia numerica che descrive questa situazione è quella in alto a destra (1; 1) allora il successo riproduttivo di chi costruisce a valle  $xv1$  è pari a 3.

**Tabella 4.1** Simulazione del vettore  $r$  che descrive il tempo meteorologico.

| Generazione | $r =$ vettore tempo meteorologico |
|-------------|-----------------------------------|
| 1           | 0                                 |
| 2           | 0                                 |
| 3           | 1                                 |
| 4           | 0                                 |
| 5           | 1                                 |
| 6           | 1                                 |
| 7           | 1                                 |
| 8           | 1                                 |
| 9           | 0                                 |
| 10          | 0                                 |
| 11          | 1                                 |
| 12          | 0                                 |
| 13          | 0                                 |
| 14          | 1                                 |
| 15          | 0                                 |
| 16          | 1                                 |
| 17          | 1                                 |
| 18          | 0                                 |
| 19          | 0                                 |
| 20          | 0                                 |
| 21          | 1                                 |
| 22          | 1                                 |
| 23          | 0                                 |
| 24          | 0                                 |
| 25          | 1                                 |
| 26          | 0                                 |
| 27          | 1                                 |
| 28          | 1                                 |
| 29          | 1                                 |
| 30          | 1                                 |
| 31          | 1                                 |
| 32          | 1                                 |
| 33          | 1                                 |
| 34          | 1                                 |
| 35          | 1                                 |

I valori all'interno del vettore colonna  $r$  descrivono il tempo meteorologico dell'ecosistema analizzato per i 35 periodi (o generazioni): il valore 1 corrisponde alla presenza di sole (associato alla probabilità  $p$ ); il valore 0 indica un tempo piovoso (con probabilità  $1-p$ ).

Date tutte le variabili sopra-descritte e le modifiche statistiche apportate per poter simulare la casualità del fenomeno ambientale del tempo meteorologico e quella del

processo decisionale degli individui, entrambi associati ad una determinata probabilità, è possibile formulare un primo codice Matlab, riportato in Appendice B.

Al completamento della stesura del codice sono effettuate delle singole computazioni (con il vettore colonna casuale che descrive il tempo meteorologico sempre nella medesima casualità<sup>5</sup>), di volta in volta cambiando il valore iniziale del parametro  $f$ . Si ricorda che i valori prescelti che vengono attribuiti ad  $f$  modificandoli in ogni *shot* computativo, con l'obiettivo di rendere più esaustiva la simulazione del modello e del processo evolutivo rispetto a quella illustrata nel precedente capitolo, sono [0, 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40, 0.45, 0.50, 0.55, 0.60, 0.65, 0.70, 0.75, 0.80, 0.85, 0.90, 0.95, 1]. Le computazioni sono singolarmente effettuate utilizzando due differenti computer caratterizzati da processori e memorie RAM<sup>6</sup> sufficientemente efficaci. Tuttavia, aumentando di volta in volta il valore attribuito alla probabilità che gli individui scelgano di costruire a valle, cioè  $f$ , i calcoli processati dal software risultano troppo complessi e nonché la macchina più potente non è dotata di sufficiente potenza computazionale e memoria per completare *shot* computativi impegnativi. In particolare, ciò che richiede una maggiore potenza computativa è il calcolo probabilistico dell'estrazione delle variabili binomiali contenute nel vettore  $t(i) = \text{binornd}(1, f)$  (vettore ottenuto da  $t = \text{zeros}(n(1), 1)$ , per  $i = 1:n(k)$  con  $k = 1:T$ ). Ciò implica che Matlab simuli un'estrazione binomiale per ogni singolo individuo che si riproduce effettuando la scelta di costruire a valle con probabilità  $f$ . Poiché la popolazione si riproduce di prole in prole (di  $t$  in  $t$ ) in modo esponenziale, le estrazioni probabilistiche binomiali da effettuare diventano moltissime ed alquanto complesse. Per gestire questo aspetto che renderebbe impossibile l'intera simulazione del modello, si

---

<sup>5</sup> Effettuando le computazioni singolarmente, 'chiudendo' il programma per ognuna di esse, il vettore casuale del meteo risultava sempre lo stesso, nell'alternanza tra 1 e 0.

<sup>6</sup> Un primo computer utilizzato possiede un sistema con le seguenti caratteristiche tecniche:

Edizione: Windows 7 Home Premium, Service Pack 1  
Produttore: ASUSTeK Computer Inc.  
Processore: Intel® Core™ i7-2670QM CPU @ 2.20GHz 2.20 GHz  
Memoria installata (RAM): 8,00 GB  
Tipo sistema: Sistema operativo a 64 bit.

Per potenziare la capacità computativa è stato utilizzato un secondo computer, con le seguenti tecniche:

Edizione: Windows 7 Professional, Service Pack 1  
Produttore: Fujitsu Technology Solutions  
Processore: Intel® Core™ i7-4770 CPU @ 3.40GHz 3.40GHz  
Memoria installata (RAM): 16,0 GB  
Tipo sistema: Sistema operativo a 64 bit.

procede alla modifica della formalizzazione del vettore che genera la casualità del processo decisionale compiuto dagli individui. Le modifiche che si devono attuare per rendere il codice Matlab facilmente computabile sono le seguenti:

1. trasformare il vettore colonna ‘predisposto’  $t = \text{zeros}(n(1), 1)$  nel vettore  $t = \text{zeros}(T, 1)$  ponendo in precedenza, identicamente al codice precedente, l’uguaglianza  $T = 35$  cioè il numero delle generazioni calcolate;
2. eliminare il comando superfluo  $i = 1:n(k)$  che mette in relazione il parametro indicizzatore  $i$ , mantenendo comunque quello relativo al parametro  $k$  che descrive l’ordine progressivo temporale delle generazioni da 1 a T (cioè  $k = 1:T$ );
3. infine, dopo aver modificato la stesura del codice secondo il punto 2., trasformare il vettore  $t(i) = \text{binornd}(1, f)$  nel vettore  $t(k) = \text{binornd}(n(k), f)$ .

Ai fini qualitativi e di analisi descrittiva del modello, queste semplificazioni non apportano alcuna modifica, poiché la descrizione e il procedimento di base del processo evolucionistico generazionale non viene variato.

Attuando queste modifiche, si riduce drasticamente la quantità e la complessità della computazione delle estrazioni binomiali, poiché esse vengono effettuate per la numerosità totale degli individui  $n(k)$  appartenenti alla  $k$ -esima generazione, cioè per l’intera collettività, e non più per ogni singolo individuo.

Infine, per calcolare il totale degli individui di ciascuna prole simulata ( $n(k + 1)$ ), successiva a quella che si riproduce ( $n(k)$ ) decidendo dove costruire (per  $T \equiv k = 1:35 + 1$ ), non si utilizza più la formula contenuta nell’espressione (2) bensì se ne elabora un’altra:

$$n(k + 1) = \{t(k) * xv1 * r(k) + [(n(k) - t(k)) * xp2 * (1 - r(k))]\} \quad (3)$$

in cui  $t(k)$  e  $(1 - t(k))$  indicano dove costruiscono, in modo complessivo, gli individui della popolazione,  $xv1$  e  $xp2$  rappresentano i due successi riproduttivi e  $r(k)$  e il complemento  $(1 - r(k))$  indicano il tempo meteorologico che si verifica. In questa espressione non si utilizza più l’operatore sommatoria poiché il vettore  $r(k)$  e il suo complemento a 1 contengono già le numerosità totali degli individui differenziati secondo l’alternativa scelta (costruire a valle o in altopiano), simulata in base alla

probabilità assegnata al parametro  $f$  e non occorre più fare la sommatoria per tutti i singoli individui, come implicava il codice precedente, non ottimizzato.

Tutte queste modifiche sono contenute nella *formulazione ottimizzata* del codice (v. Appendice B), che rende il modello meno complesso, rispetto a quanto desiderato, nella sua computazione e maggiormente utilizzabile per condurre la simulazione.

Il codice Matlab che viene utilizzato per simulare il modello evolutivo è quello espresso nella formulazione ottimizzata.

Come già anticipato, questa originale applicazione del modello di Brennan-Lo presenta delle estensioni rispetto alla simulazione sperimentale condotta dagli autori e dettagliatamente descritta nel cap. 3. Le varie simulazioni effettuate, complete dei 21 valori attribuiti ad  $f^7$  (nel modello Brennan-Lo i valori sono 5), sono differenti nei parametri di base mantenuti costanti. Oltre alla simulazione proposta dagli autori con  $n(1) = 10$ ,  $xv1 = xp2 = 3$  e  $xv2 = xp1 = 0$  ne vengono fatte altre, ponendo:

1.  $xv1, xp2 = 1$  e  $xv2, xp1 = 0$ ;
2.  $xv1, xp2 = 2$  e  $xv2, xp1 = 0$ ;
3.  $xv1, xp2 = 4$  e  $xv2, xp1 = 0$ ;
4.  $xv1, xp2 = 6$  e  $xv2, xp1 = 0$ .

Tuttavia, assumendo la numerosità della prole di un individuo pari a 4 e 6, sebbene venga adoperato il modello ottimizzato, i due computer non sono sufficientemente potenti e (in particolare per  $f = 0.35$  con  $xv1, xp2 = 4$  e per  $f = 0.15$  con  $xv1, xp2 = 6$ ) Matlab interrompe il suo funzionamento<sup>8</sup>.

In aggiunta, per un valore raddoppiato di  $n(1) = 20$ , si implementano altre 3 simulazioni (con le varie applicazioni degli stessi parametri  $xv1, xp2 = 1; 2; 3$ ).

Gli scenari totali che si ottengono sono sei: i due più interessanti, cioè quelli con le numerosità della prole pari a 3, sono dettagliatamente descritti successivamente mentre gli outcome numerici delle simulazioni con numerosità della prole ridotta a 1 e 2 ( $xv1, xp2 = 1; 2$ ) sono riportati in Appendice E.

Nel prossimo paragrafo vengono trattati tutti i risultati provenienti da queste simulazioni del medesimo modello evolutivo, conducendo l'analisi dei dati soprattutto per

---

<sup>7</sup> Per ciascuna simulazione del modello si considerano i seguenti valori per  $f \in [0, 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40, 0.45, 0.50, 0.55, 0.60, 0.65, 0.70, 0.75, 0.80, 0.85, 0.90, 0.95, 1]$ , corrispondenti a 21 computazioni.

<sup>8</sup> Gli outcome generazionali relativi ai primi valori di  $f$  e i successivi messaggi di "errore" di interruzione della computazione in Matlab sono riportati in Appendice E.

mezzo di grafici, e si mettono in evidenza le principali differenze rispetto ai risultati ottenuti dalla simulazione sperimentale condotta da Brennan e Lo.

### **4.3 Data analysis e descrizione dei risultati numerici**

---

Lo scopo di questo paragrafo è quello di descrivere l'analisi dei dati e dei risultati relativi alle simulazioni nelle due varianti del modello sperimentale, descrivente un processo evuzionistico di una popolazione (o, equivalentemente *specie*) che effettua la scelta su dove costruire la propria abitazione (a valle, con probabilità assegnata  $f$ , o sull'altopiano) in un ecosistema caratterizzato da un tempo meteorologico soleggiato (con probabilità  $p = 75\%$ ) e piovoso. I due scenari simulati, con un totale di 21 computazioni ciascuno in base ai valori assegnati ad  $f$ , si differenziano nel numero di individui che compongono la generazione iniziale: il primo scenario si caratterizza con i medesimi parametri utilizzati da Brennan e Lo [2012] nella loro applicazione cioè una numerosità iniziale della popolazione pari a  $n(1) = 20$  (e numerosità della prole  $xv1$  e  $xp2 = 3$ ); il secondo invece varia nel parametro della popolosità della generazione iniziale, infatti si ipotizza  $n(1) = 20$ . Per ciascuna delle due simulazioni del modello vengono sviluppati dei grafici, che consentono, visivamente, una maggiore comprensione di ciò che viene scritto riguardante l'analisi dei dati *outcome* della simulazione del modello evuzionistico. Tutti i grafici successivamente proposti, sono stati costruiti utilizzando i dati simulati dal codice ottimizzato di Matlab riportati nei fogli di calcolo di Excel.

#### **4.3.1 Numerosità della popolazione associata alla probabilità $f^*$ ottimale**

Lo scopo del modello è quello di comprendere quale sia il valore di  $f$  che apporta al numero di individui più elevato alla generazione (o prole) finale  $k = 36$ . Le generazioni totali calcolate nella simulazione in Matlab sono 36: infatti ipotizzando che  $n(1)$  sia pari al numero di individui iniziale della popolazione (10 e 20 rispettivamente nei due scenari), computando fino alla generazione  $n(k + 1)$ , con  $k = T = 35$ , si ottiene una generazione finale definita come  $n(36)$ . In altre parole, l'obiettivo delle simulazioni è definire quale sia il valore di  $f$  che conduca al maggior successo riproduttivo dell'intera specie nell'ecosistema. Tale parametro è definito dagli autori Brennan e Lo come



$f$  ottimale, contraddistinto dalla notazione  $f^*$ , o, qualitativamente, *fenotipo comportamentale ottimale*.

Dati i parametri e le variabili descritti nella spiegazione del codice Matlab (v. *infra*) si effettuano delle computazioni per le 35 generazioni successive alla prima ( $k = 35$ ), partendo da una popolazione composta da 10 individui alla prima generazione  $n(1)$  e variando<sup>9</sup> il parametro  $f$  che rappresenta la probabilità che venga effettuata la scelta di costruire a valle. Le computazioni effettuate per elaborare il processo evolutivo generazionale associato ai diversi valori di  $f$  sono 21. In aggiunta, si ripete lo stesso procedimento ipotizzando una specie composta da un numero iniziale di individui appartenenti alla prima generazione  $n(1)$  pari al doppio del caso precedente, cioè 20. I dati outcome di tutte le computazioni, completi della tempistica di elaborazione il cosiddetto *elapsed time* (letteralmente “tempo trascorso”) e delle componenti del vettore che simula il tempo meteorologico  $r(i)$  e del vettore che randomizza la scelta degli individui  $t(k)$ , sono riportati in modo completo nell’Appendice C.

I dati simulati, relativi all’evoluzione generazionale della numerosità degli individui delle due popolazioni, si ottengono attraverso il computo delle generazioni  $k+1$ , sviluppatasi dalla riproduzione degli individui appartenenti alle  $k$ -esima generazioni con  $k \equiv T = 1:35$ . Si ricorda che la formalizzazione analitica utilizzata dal codice per il computo delle generazioni successive è espressa dalla seguente equazione (3):

$$n(k + 1) = \{t(k) * xv1 * r(k) + [(n(k) - t(k)) * xp2 * (1 - r(k))]\}.$$

Nella Tabella 4.2 si riportano i dati relativi all’evoluzione generazionale delle due popolazioni simulate che si sono evolute attraverso la probabilità  $f^*$  ottimale, cioè il parametro tra i 21 selezionati, che conduce al numero più elevato della generazione finale  $t = 36$ . Per una popolazione con un numero di individui iniziale pari a 10, la probabilità  $f^*$  ottimale è 0.55 (o, equivalentemente 55%), mentre per quella con un  $n(1) = 20$ ,  $f^*$  ottimale è 0.65 (o, equivalentemente 65%). Dal punto di vista qualitativo ciò significa che il *fenotipo comportamentale ottimale*, riferito alla decisione di costruire a valle sapendo che nel 75% dei casi si verifica un tempo soleggiato e si sopravvive, è pari al valore  $f^*$  che manifesta la sopravvivenza della specie e il *successo*

---

<sup>9</sup> Per la simulazione del modello si considerano i seguenti valori per  $f \in [0, 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40, 0.45, 0.50, 0.55, 0.60, 0.65, 0.70, 0.75, 0.80, 0.85, 0.90, 0.95, 1]$ , corrispondenti a 21 computazioni.

*riproduttivo migliore*. Con questo termine si intende la situazione in cui gli individui della specie, riproducendosi di periodo in periodo, raggiungono il numero maggiore nella prole finale  $T + 1$  rispetto a quello raggiunto negli altri processi evolutivi, associati ad  $f$  diverse.

Raddoppiando la popolazione iniziale da 10 a 20 individui il fenotipo comportamentale ottimale varia rispettivamente da 0.55 a 0.65. Tale variazione può essere interpretata, dal punto di vista qualitativo, con il fatto che aumentando gli individui della specie, si elimina maggiormente il rischio di estinzione, poiché ci sono più individui che si possono riprodurre. In quest'ottica, aggiungendo individui alla specie, si diminuisce il rischio idiosincratico associato a ciascun individuo, poiché c'è maggiore diversificazione all'interno di ciascuna generazione, e il fenotipo comportamentale ottimale (cioè la probabilità di costruire a valle) si avvicina alla probabilità che ci sia sole  $p = 0.75$ .

**Tabella 4.2** Simulazione del processo evolutivo della numerosità di due popolazioni in base alla  $f^*$ , differenziato per le popolazioni con  $n(1)=10$  e  $n(2)=20$

| Generazione | $n(1)=10-f^*=0.55$ | $n(1)=20-f^*=0.65$ |
|-------------|--------------------|--------------------|
| 1           | 10                 | 20                 |
| 2           | 15                 | 27                 |
| 3           | 21                 | 27                 |
| 4           | 39                 | 57                 |
| 5           | 51                 | 48                 |
| 6           | 102                | 102                |
| 7           | 186                | 198                |
| 8           | 315                | 411                |
| 9           | 528                | 828                |
| 10          | 747                | 900                |
| 11          | 1,011              | 978                |
| 12          | 1,638              | 1,875              |
| 13          | 2,244              | 1,992              |
| 14          | 3,015              | 1,992              |
| 15          | 4,953              | 3,963              |
| 16          | 6,660              | 4,191              |
| 17          | 10,890             | 8,154              |
| 18          | 17,919             | 15,780             |
| 19          | 23,979             | 16,569             |
| 20          | 32,148             | 17,211             |
| 21          | 43,431             | 18,126             |
| 22          | 71,874             | 35,256             |
| 23          | 118,074            | 68,601             |
| 24          | 158,721            | 71,889             |
| 25          | 214,365            | 75,726             |
| 26          | 352,611            | 148,713            |
| 27          | 475,878            | 156,207            |
| 28          | 783,690            | 303,909            |
| 29          | 1,292,574          | 592,410            |
| 30          | 2,133,342          | 1,154,805          |
| 31          | 3,521,748          | 2,251,476          |
| 32          | 5,809,464          | 4,390,155          |
| 33          | 9,588,702          | 8,561,493          |
| 34          | 15,813,621         | 16,697,265         |
| 35          | 26,087,700         | 32,553,252         |
| 36          | <b>43,059,753</b>  | <b>63,495,540</b>  |

Gli individui delle due popolazioni scelgono, ad ogni generazione, di costruire a valle con una probabilità ottimale, che conduce ad un maggior successo riproduttivo, pari a 55% per la popolazione con un numero iniziale di 10 individui e 65% per quella con 20 individui iniziali.

Con una  $f^*$  pari a 0.55, per la popolazione con  $n(1) = 10$ , la generazione finale  $T = 36$  più numerosa, tra tutte quelle associate ai 21 valori di  $f$ , della simulazione del modello ammonta a 43,059,753 di individui; con una  $f^*$  pari a 0.65, per la popolazione

con  $n(1) = 20$ , la prole finale più numerosa della simulazione ammonta a 63,495,540 individui.

Confrontando queste due cifre con quella computata dagli autori del modello evolucionistico relativa al fenotipo comportamentale ottimale  $f^* = 0.75$  (cioè 173,996,290 individui) si nota come esse siano minori di circa 100 milioni unità. Questa sostanziale differenza trova una motivazione esauriente nella casualità sequenziale del tempo meteorologico che caratterizza i periodi, provocando la riproduzione o l'estinzione degli individui in base alla loro collocazione (valle o altopiano). Poiché nell'applicazione condotta da Brennan e Lo si verificano periodi di sole in modo consecutivo fino al periodo  $T = 14$ , la sotto-popolazione che costruisce a valle si riproduce in modo esponenziale di generazione in generazione. Tale processo riproduttivo risulta più considerevole, in termini numerici della quantità degli individui, rispetto a quello che si verifica in un ecosistema in cui vi è un'alternanza casuale molto più realistica tra periodi piovosi e soleggiati, descritta dall'outcome del vettore  $r(i) = \text{binonrd}(1, p)$  (con  $i = 1:n(k)$  per  $k = 1:T$ ) (v. *supra* 4.2.2).

Le due probabilità associate al fenotipo comportamentale ottimale,  $f_{n(1)=10}^*$  pari a 0.55 e  $f_{n(1)=20}^*$  pari a 0.65, non coincidono, a differenza del risultato di Brennan e Lo esposto nel capitolo precedente, con la probabilità che nel contesto ambientale di riferimento vi siano delle condizioni meteorologiche soleggiate, cioè  $p = 0.75$ . Infatti, nei due ecosistemi analizzati in questa nuova applicazione, il comportamento decisionale-evolucionistico ottimale che massimizza la numerosità finale della popolazione non è quello della caratterizzato dalla distorsione comportamentale della *probability matching* (v. *supra* 3.3) (risulterebbe  $f^* = p = 0.75$ ), che implicherebbe un comportamento randomizzato rispetto alla medesima casualità dell'ambiente. Tale risultato non implica tuttavia, che non vi sia una correlazione tra le caratteristiche ambientali, in questo caso meteorologiche, dell'ecosistema e il processo decisionale attuato dagli individui. Infatti, data la casualità che manifesta il contesto ambientale, i due valori ottimali di  $f$  non sono associabili a scelte e azioni comportamentali di tipo deterministico (ad esempio che tutti gli individui costruiscono sull'altopiano ( $f = 0$ ) o che tutti gli individui costruiscono a valle ( $f = 1$ )): tali parametri condurrebbero all'estinzione dell'intera specie qualora si verificasse la situazione meteorologica svantaggiosa rispetto all'alternativa decisa. I valori  $f_{n(1)=10}^* = 0.55$  e  $f_{n(1)=20}^* = 0.65$

sono entrambi compresi fra 0 e 1, in particolare vicino allo 0.5, valor medio fra i due estremi. Una possibile motivazione di tale similitudine è riscontrabile nelle proprietà che caratterizzano le variabili causali  $xv1$  e  $xp2$  (uguali a 3 in questa applicazione), rappresentanti la numerosità della prole originata da ciascun individuo che si riproduce. Dal momento che  $xv1$  e  $xp2$  sono identicamente e indipendentemente distribuite (IID) da una generazione all'altra e identicamente ed indipendentemente distribuite (IID) tra gli individui appartenenti alla stessa generazione  $k$ , il *rischio riproduttivo idiosincratico* (detto anche rischio specifico), cioè quello relativo alle specificità di ciascun individuo, viene eliminato nella specie (v. supra 3.4.4 II caso). In questo caso, la numerosità della popolazione al termine del processo riproduttivo, costituito da  $T \equiv k$  generazioni, si massimizza per i seguenti valori della probabilità  $f$ :

$$f^* = \begin{cases} 0 & \text{se } xv1 < xp2 \\ 0.5 & \text{se } xv1 = xp2 \\ 1 & \text{se } xv1 > xp2 \end{cases}$$

Il modello presenta la seconda condizione, cioè che  $xv1 = xp2 = 3$ : infatti i fenotipi comportamentali ottimali che emergono dall'outcome del codice Matlab, in particolare quello relativo alla specie con popolazione iniziale  $n(1) = 10$ , sono all'incirca pari al valore 0.5, dando prova del ragionamento esposto in precedenza sulla motivazione della diversità rispetto al risultato ottenuto dagli autori Brennan e Lo.

Con lo scopo di analizzare diversi outcome computazionali relativi alla probabilità ottimale  $f^*$  per la popolazione con  $n(1) = 10$ , sono effettuate 15 computazioni consecutive<sup>10</sup> mantenendo sempre costanti tutti i parametri delle variabili contenute nel codice ottimizzato<sup>11</sup>. Dato che gli *shots* computativi vengono fatti in maniera continua, il vettore colonna che simula la casualità del tempo meteorologico, non rimane sempre lo stesso nell'alternanza fra 1 e 0 (sole/pioggia) ma varia ad ogni computazione. Questa particolarità di elaborazione è essenziale per comprendere la notevole variabilità (espressa soprattutto dalla deviazione standard) tra le diverse serie numeriche che

---

<sup>10</sup> I dati completi sono riportati in Appendice C.

<sup>11</sup> Concretamente, sono stati fatti 15 *shots* computativi successivi, mantenendo costanti tutti i parametri numerici del codice, senza variare  $f$ .

rappresentano il processo evolutivo di una popolazione con lo stesso parametro decisionale della probabilità di costruire a valle,  $f^* = 0.55$ .

I 15 valori numerici riferiti alla numerosità della generazione finale  $T = 36$  e i risultati ottenuti calcolandone media, deviazione standard, massimo e minimo sono riportati nella Tabella 4.3.

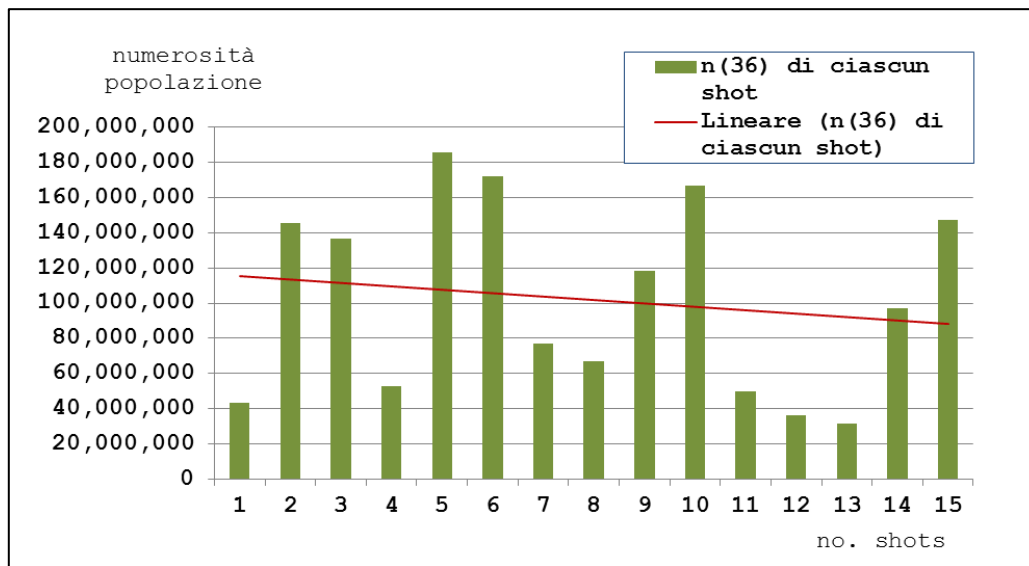
**Tabella 4.3** Numerosità della generazione finale  $T=36$  relative a 15 *shots* computazionali

| shot no.       | n(36)              |
|----------------|--------------------|
| 1              | 43,059,753         |
| 2              | 145,747,605        |
| 3              | 136,809,816        |
| 4              | 52,518,138         |
| 5              | 185,755,830        |
| 6              | 172,216,029        |
| 7              | 77,009,760         |
| 8              | 66,884,460         |
| 9              | 118,195,851        |
| 10             | 167,038,770        |
| 11             | 50,019,306         |
| 12             | 36,035,202         |
| 13             | 31,261,200         |
| 14             | 96,855,630         |
| 15             | 147,170,241        |
| <b>media</b>   | <b>101,771,839</b> |
| <b>std dev</b> | <b>52,577,963</b>  |
| <b>max</b>     | <b>185,755,830</b> |
| <b>min</b>     | <b>31,261,200</b>  |

I dati contenuti nella colonna n(36) rappresentano la numerosità finale della popolazione simulata dal modello evolutivo, per 15 *shots* computativi continui, applicando il parametro ottimale  $f^*=0.55$ . Per completezza sono inoltre riportate la media, la deviazione standard, il massimo e il minimo.

La notevole variabilità che caratterizza i dati riferiti alle diverse popolosità delle generazioni finali si nota in maniera più evidente attraverso l'utilizzo di grafici. L'istogramma nel Grafico 4.1 è composto da 15 colonne rappresentanti la numerosità totale dell'ultima prole del processo evolutivo ottenuta da ciascuna delle 15 computazioni continue; la linea rossa, aggiunta per completezza, rappresenta la tendenza lineare dei 15 valori. L'asse delle ascisse è impiegato per rappresentare i 15 *shots*, mentre in ordinata è descritta la quantità numerica della popolazione espressa in numeri interi.

**Grafico 4.1** Numerosità della generazione finale T=36 per ciascuno dei 15 *shots* computazionali



Attraverso l'istogramma è possibile notare in maniera più intuitiva la variabilità della la serie composta da 15 numeri, relativi a 15 computazione continue. La linea rossa, è la linea di tendenza, calcolata mediante la serie dei dati.

### 4.3.2 Evoluzione generazionale della specie

I grafici successivi (Grafico 4.2 a, b, c) raffigurano il trend numerico simulato delle due specie, quella con popolazione iniziale di 10 individui e quella con 20 individui, ed infine il grafico complessivo delle due. I modelli di grafico utilizzati per la rappresentazione sono l'istogramma e il grafico a dispersione XY per descrivere in maniera più visivamente intuibile la distribuzione continua dei valori. Essi sono costruiti utilizzando i dati finali dell'ultima prole generata ( $T = 36$ ) per ciascun parametro  $f$  variato in ogni computazione: i dati totali sono quindi 21 (per  $f \in [0; 1]$ ). In asse delle ascisse sono riportati, in ordine crescente, tutti i valori dati alla probabilità  $f$ , mentre in ordinata vi è la scala della numerosità della popolazione, espressa in numeri interi. L'andamento ottenuto è simile ad una 'campana' poiché per valori estremi di  $f$ , vicini allo 0 e ad 1, la specie si estingue (infatti per fenotipi comportamentali deterministici, tutta la generazione si estingue quando nell'ambiente non si verifica il meteo adatto alla decisione presa, ad esempio valle/pioggia, e il processo evolutivo non si sviluppa) e la quantità della prole finale è azzerata; mentre per valori centrali la popolazione aumenta in modo esponenziale (si ricorda infatti che  $f_{n(1)=10}^* = 0.55$  e  $f_{n(1)=20}^* = 0.65$ ). Tale diversità nella distribuzione (sull'asse x) dei valori numerici maggiori della prole finale per le due specie, si evince dal Grafico 4.2 c

in cui sono raffigurate assieme le due curve. Inoltre, in esso si nota che  $f^*$  per la specie con una generazione iniziale di 20 individui, è più vicino al valore 0.75, valore ottenuto dall'applicazione di Brennan e Lo e che rappresenta la distorsione comportamentale della *probability matching*.

La forma campanulare dei grafici può ricordare la distribuzione statistica di una normale<sup>12</sup>, ma nel caso in questione la distribuzione della quantità delle ultime generazioni non può essere una normale in quanto essa, trattandosi di una popolazione di individui, non va a  $-\infty$  ma si interrompe al valore estremo 0 che caratterizza numericamente l'estinzione della specie.

---

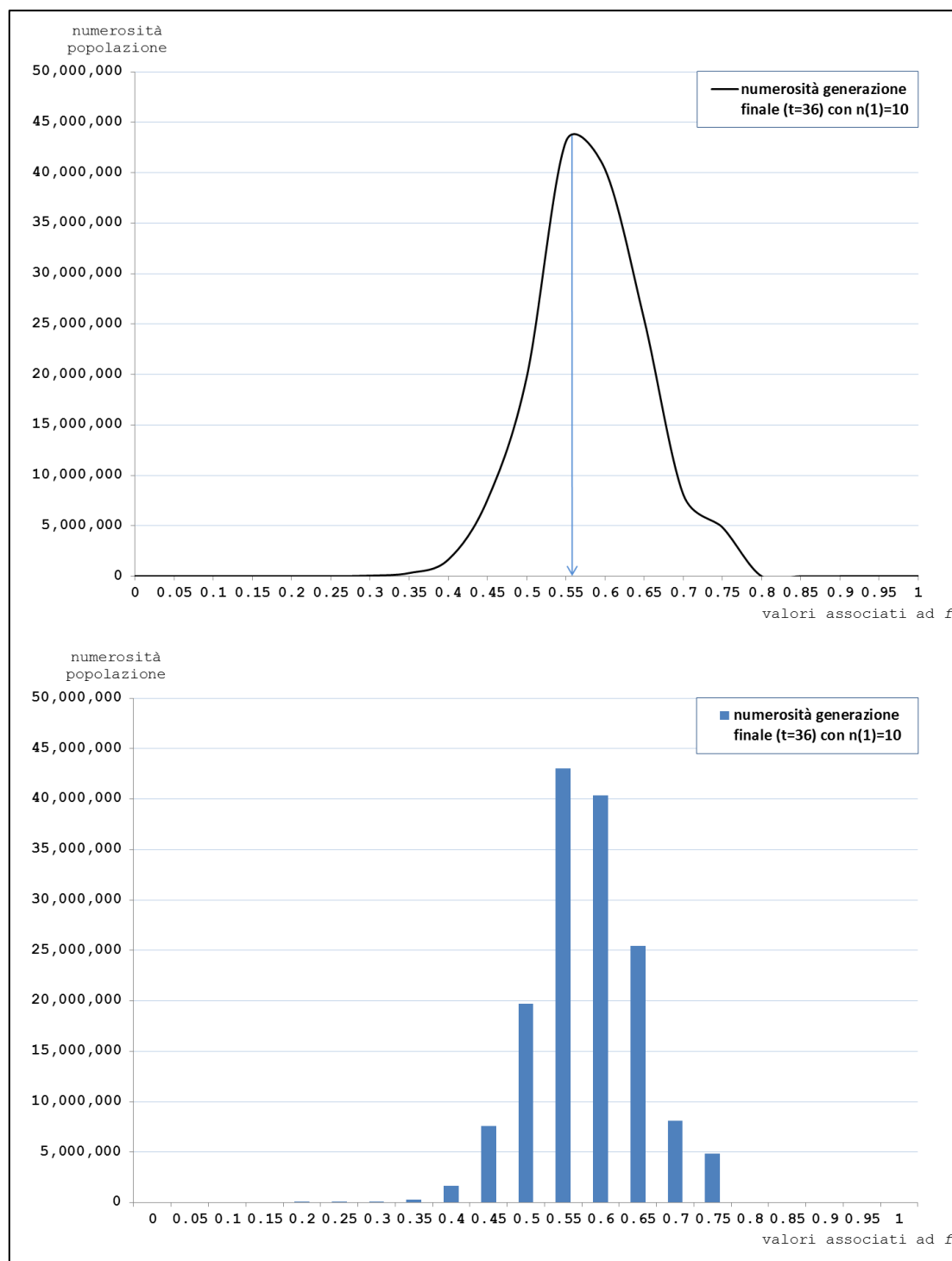
<sup>12</sup> Una variabile casuale  $X$  ha una distribuzione normale, indicata con  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  se la sua funzione di densità è:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad \text{con } -\infty < x < \infty.$$

Inoltre: la densità è simmetrica definita positiva su tutto l'asse reale ( $-\infty < x < \infty$ ); la funzione di densità ha un andamento campanulare la cui posizione è determinata dal valore di  $\mu$  e la forma più o meno 'schiacciata' dal valore di  $\sigma^2$  (che rappresentano media e varianza della variabile).

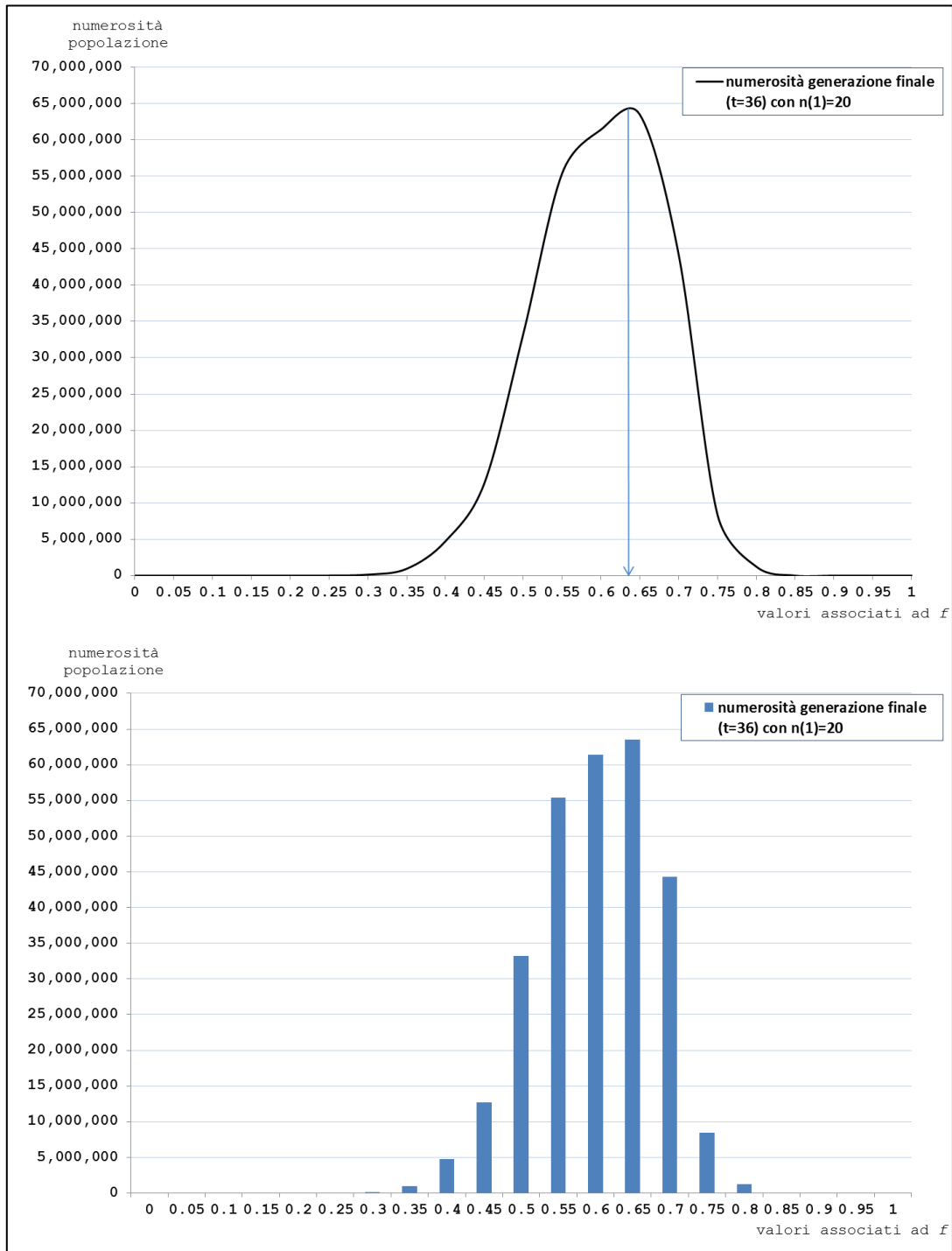


**Grafico 4.2 a** Simulazione della numerosità della generazione finale per ogni valore assegnato ad  $f$  di una specie con 10 individui iniziali



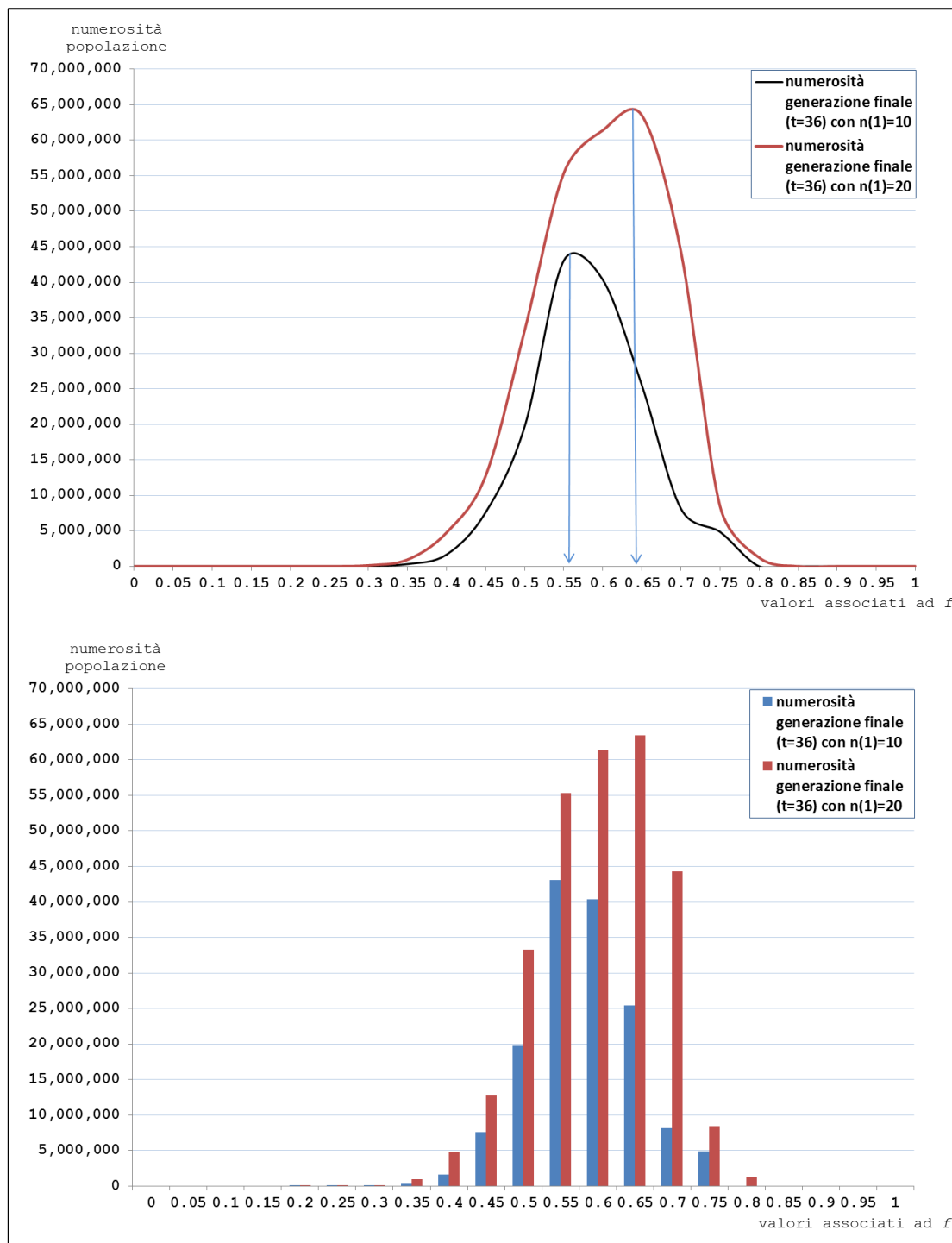
L'immagine, composta dal grafico a dispersione XY e dall'istogramma raffigura i valori numerici della generazione finale ( $T=36$ ) simulati con il codice Matlab, variando il parametro  $f$  ad ogni computazione (i valori di  $f$  sono rappresentati nell'asse delle ascisse).

**Grafico 4.2 b** Simulazione della numerosità della generazione finale per ogni valore assegnato ad  $f$  di una specie con 20 individui iniziali



L'immagine, composta dal grafico a dispersione XY e dall'istogramma raffigura i valori numerici della generazione finale ( $T=36$ ) simulati con il codice Matlab, variando il parametro  $f$  ad ogni computazione (i valori di  $f$  sono rappresentati nell'asse delle ascisse).

**Grafico 4.2 c** Grafico complessivo delle simulazioni della numerosità della generazione finale per ogni valore assegnato ad  $f$



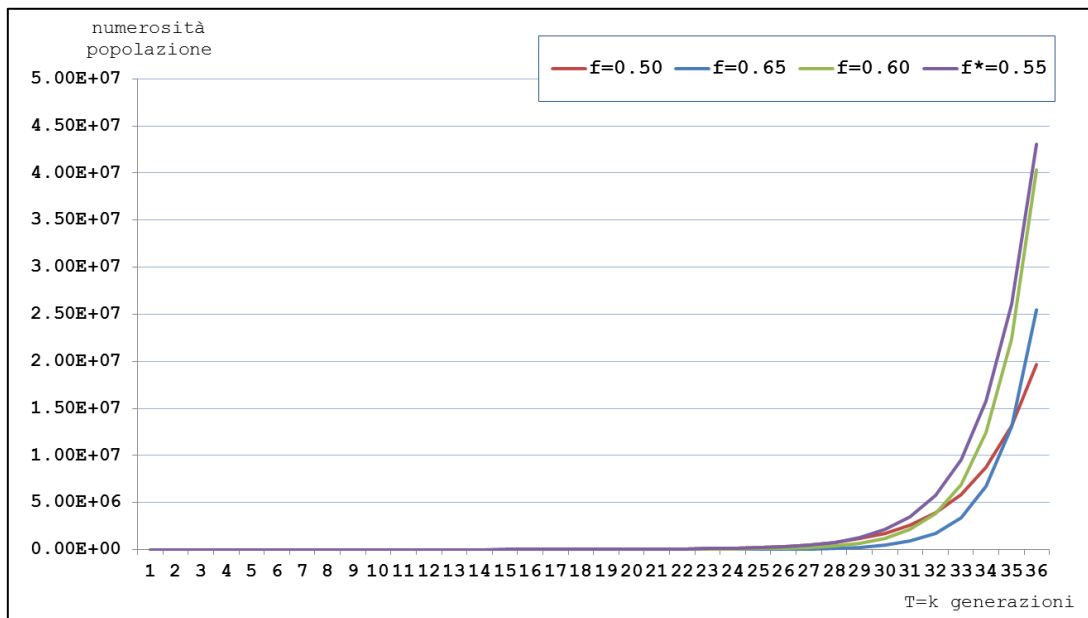
I due grafici rappresentati in questa immagine sono la somma dei due precedenti, riferiti alla specie con un numero di individui iniziali di 10 e 20. In questo modo, il confronto in termini di andamento e numerosità delle popolazioni è più comodo e immediato.

Per mettere in evidenza l'esponenzialità che caratterizza la crescita della popolazione simulata dal modello computato per mezzo di Matlab, sono stati elaborati dei grafici che

mettono in relazione l'evoluzione della specie per i valori della probabilità che gli individui costruiscano la loro abitazione a valle, cioè  $f$ , che portano al maggior numero finale di individui appartenenti alla specie.

I due grafici successivi raffigurano l'andamento numerico associato all'evoluzione della popolazione per i fenotipi comportamentali  $f$  che conducono al maggiore successo riproduttivi, in termine di popolosità finale degli individui, espressa in asse delle ordinate utilizzando la notazione scientifica. Il Grafico 4.3 a è riferito alla specie con una popolazione iniziale di 10 individui: i valori di  $f$  che portano alla numerosità della popolazione maggiore sono, in ordine crescente rispetto alla numerosità della popolazione: 0.50, 0.65, 0.60 e 0.55. A partire dalla prole associata al periodo  $T = 28$ , si nota l'aumento esponenziale della specie; nei periodi successivi, non vi è una marcata superiorità di un determinato valore della probabilità  $f$ , poiché le linee si intersecano fra esse, tranne quella che rappresenta il fenotipo comportamentale ottimale  $f^* = 0.55$ : essa è posizionata 'sopra' alle altre linee e inoltre questo è causato dall'aumento della popolazione, che risulta caratterizzata da una maggiore esponenzialità rispetto alle altre linee, poiché cresce più rapidamente.

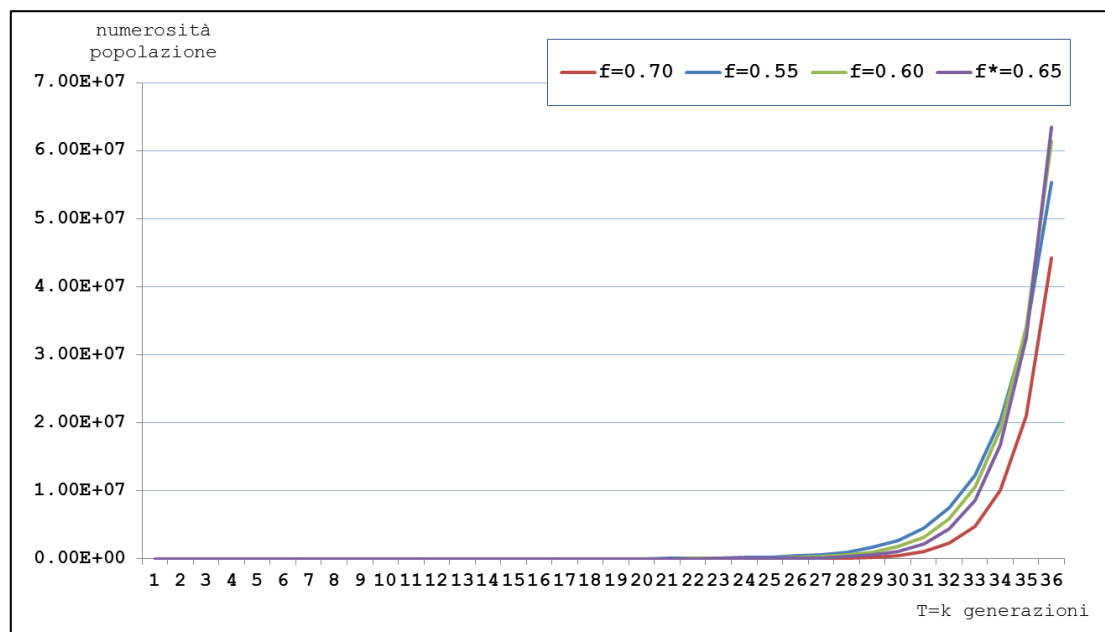
**Grafico 4.3 a** Evoluzione numerica della specie  $n(1)=10$  per i valori di  $f$  che manifestano i migliori successi riproduttivi



Le quattro linee curve rappresentano l'evoluzione numerica della generazione associata ai quattro valori di  $f$  che conducono alla popolazione più numerosa dopo i 36 periodi.

La medesima ‘superiorità’ esponenziale di una singola linea non si verifica nel Grafico 4.3 b poiché la linea che descrive l’evoluzione della popolazione per la probabilità ottimale  $f^* = 0.65$ , non cresce più rapidamente delle altre linee (quelle delle popolazioni con  $f = 0.70, 0.55, 0.60$ ) a partire dal periodo  $T = 28$ . Tuttavia, a seguito dell’intersezione delle curve nei periodi prossimi a quello finale (cioè  $T = 36$ ), la curva relativa ad  $f^* = 0.65$ , cresce più rapidamente rispetto alle altre, causando un elevato aumento della popolazione nelle proli finali, determinando il successo riproduttivo maggiore e, di conseguenza, il fenotipo comportamentale ottimale. Questo aumento improvviso della specie (riferita a  $f^* = 0.65$ ) nelle ultime generazioni sarà visivamente osservabile dall’istogramma raffigurato nel successivo Grafico 4.4 c.

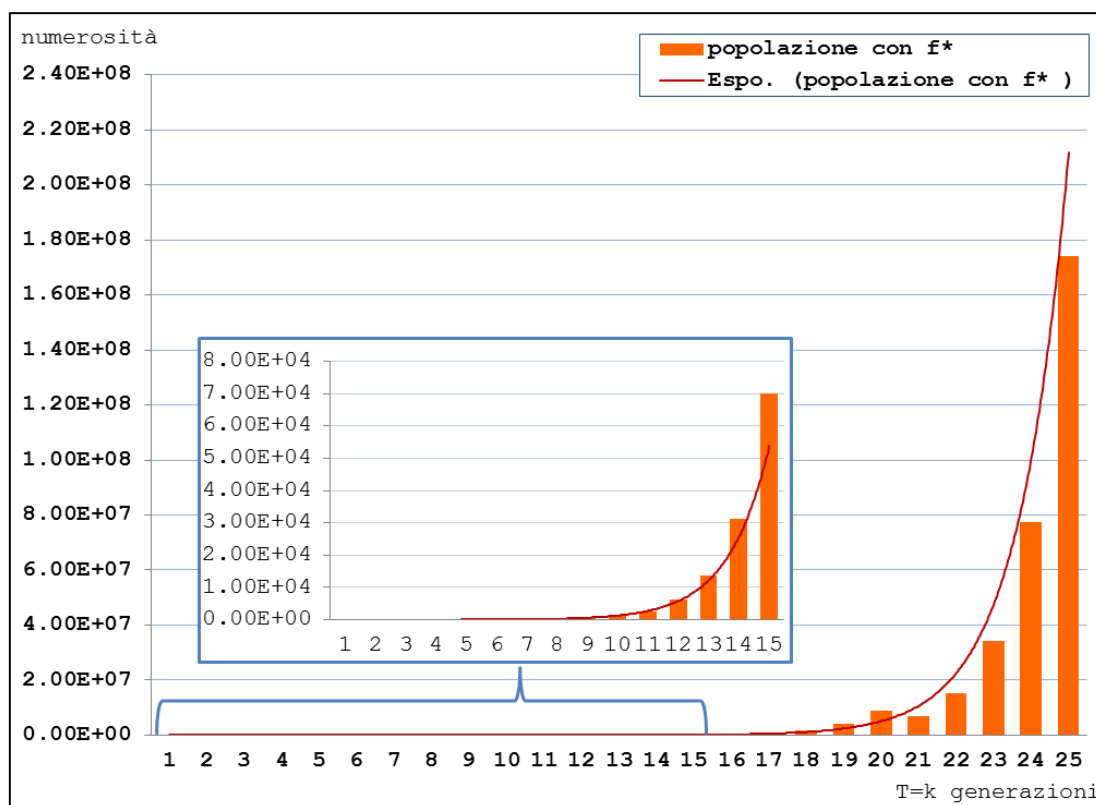
**Grafico 4.3 b** Evoluzione numerica della specie  $n(1)=20$  per i valori di  $f$  che manifestano i migliori successi riproduttivi



Le quattro linee curve rappresentano l’evoluzione numerica della generazione associata ai quattro valori di  $f$  che conducono alla popolazione più numerosa dopo i 36 periodi.

Di queste quattro linee riferite ai valori di  $f$  che apportano al maggior numero di individui nella generazione finale, è opportuno analizzare quella relativa al fenotipo comportamentale ottimale  $f^*$ .

**Grafico 4.4 a** Evoluzione numerica della specie riferita alla  $f^* = 0.75$  (applicazione di Brennan-Lo)



Il grafico è stato costruito utilizzando i dati ottenuti dalla simulazione condotta da Brennan e Lo, riportati nella Tabella 3.1.

Nel Grafico 4.4 a è rappresentata, attraverso un istogramma, l'evoluzione della popolazione utilizzando i dati della specie simulata dagli studiosi Brennan e Lo [2012] che presenta il numero maggiori di individui appartenenti all'ultima specie, nel loro caso  $T = 25$ .

In asse delle ordinate sono riportati diversi valori numerici per la definizione quantitativa delle generazioni per ogni periodo  $T \in [1; 25]$ , riportati sull'asse delle ascisse. Il riquadro interno al grafico principale, è stato riportato con l'obiettivo di fornire l'andamento delle proli fino al 15-esimo periodo poiché, per motivi di scala, non è possibile descrivere le prime generazioni di minore entità numerica. La linea rossa, descrive il trend esponenziale rappresentato dall'altezza delle colonne dell'istogramma, cui corrispondono, sequenzialmente, i valori delle numerosità delle generazioni da 1 a 25.

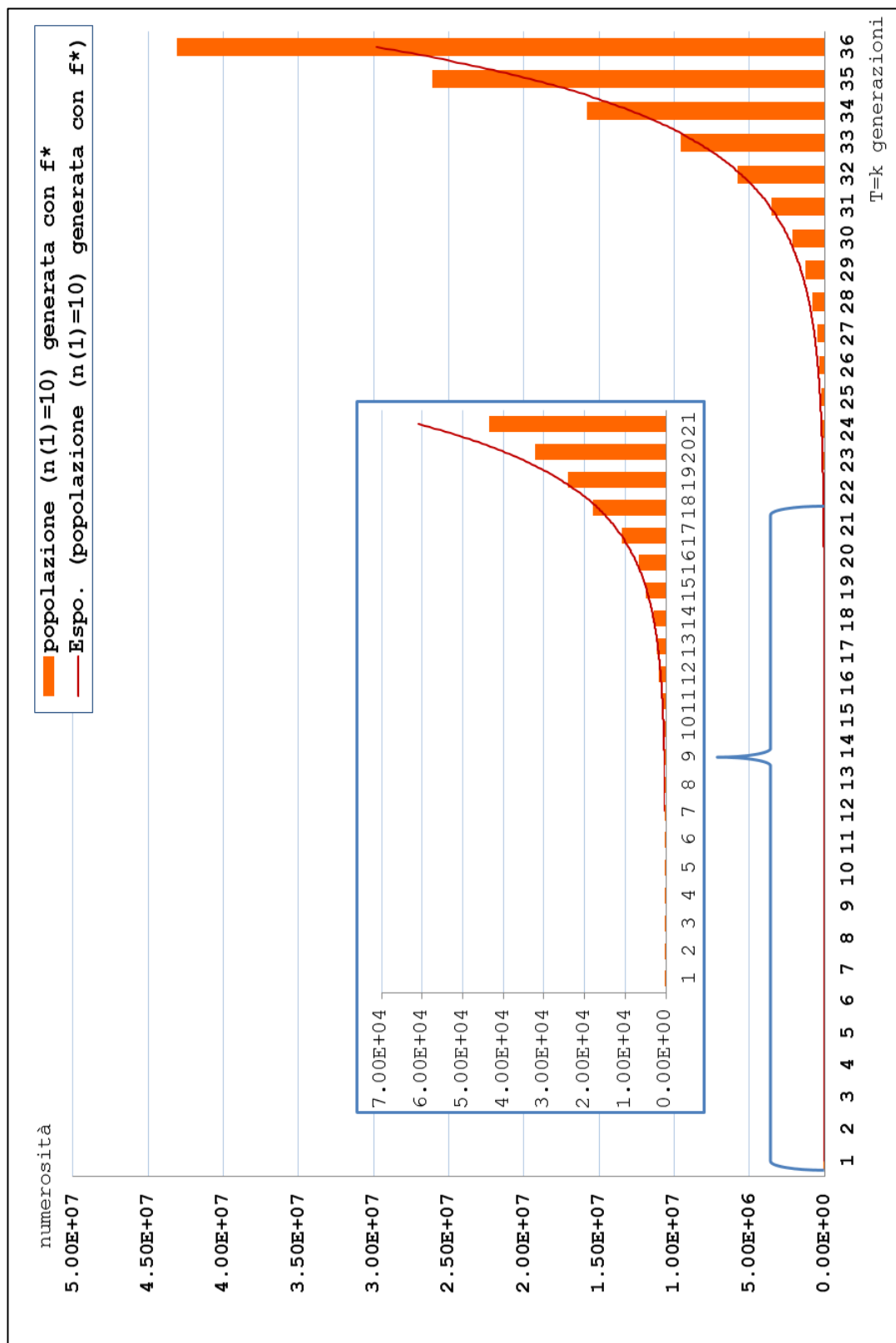
La stessa tipologia di raffigurazione è riportata nel Grafico 4.4 b (per la popolazione con  $n(1) = 10$ ) e nel Grafico 4.4 c (per la popolazione con  $n(1) = 20$ ) in cui sono utilizzati

gli outcome delle due simulazioni presentate del modello evuzionistico, descritte in questo capitolo. Il dettaglio riportato nel riquadro interno, è riferito alla numerosità delle generazioni fino  $T = 21$ . Il grafico relativo alla popolazione con 10 individui ( $f^* = 0.55$ ) alla prima generazione presenta un trend simile al grafico precedente, relativo all'applicazione condotta da Brennan e Lo: l'andamento esponenziale, raffigurato specialmente dalla linea rossa, è presente anche nelle proli riferite alle prime computazioni. Tale crescita rapida nella popolazione non si osserva nelle medesime caratteristiche per quanto riguarda il dettaglio del Grafico 4.4 c; in particolare, nelle generazioni associate a  $T \in [18; 21]$ , la funzione non cresce rapidamente come accade nel grafico precedente e tale rallentamento nella crescita della popolazione si riflette anche nella minore esponenzialità che caratterizza il trend della numerosità delle ultime proli del processo evuzionistico. Questa differenza è osservabile nel riquadro dettaglio del Grafico 4.4 d, rappresentazione complessiva dei due grafici precedenti, differenziati nel colore dei due istogrammi.

Le due simulazioni originali confermano il trend che caratterizza la crescita generazionale associata al fenotipo comportamentale ottimale, risultante dalla simulazione di Brennan-Lo. In tutti i grafici si nota la medesima crescita esponenziale nelle varie generazioni consecutive, sebbene nella simulazione di Lo esse siano 25.

Dal punto di vista numerico, il fenotipo comportamentale ottimale ottenuto dai due studiosi  $f^* = 0.75$ , si avvicina di più al valore  $f^* = 0.65$  ottenuto con la simulazione in cui si ipotizzava una popolazione iniziale pari a  $n(1) = 20$ .

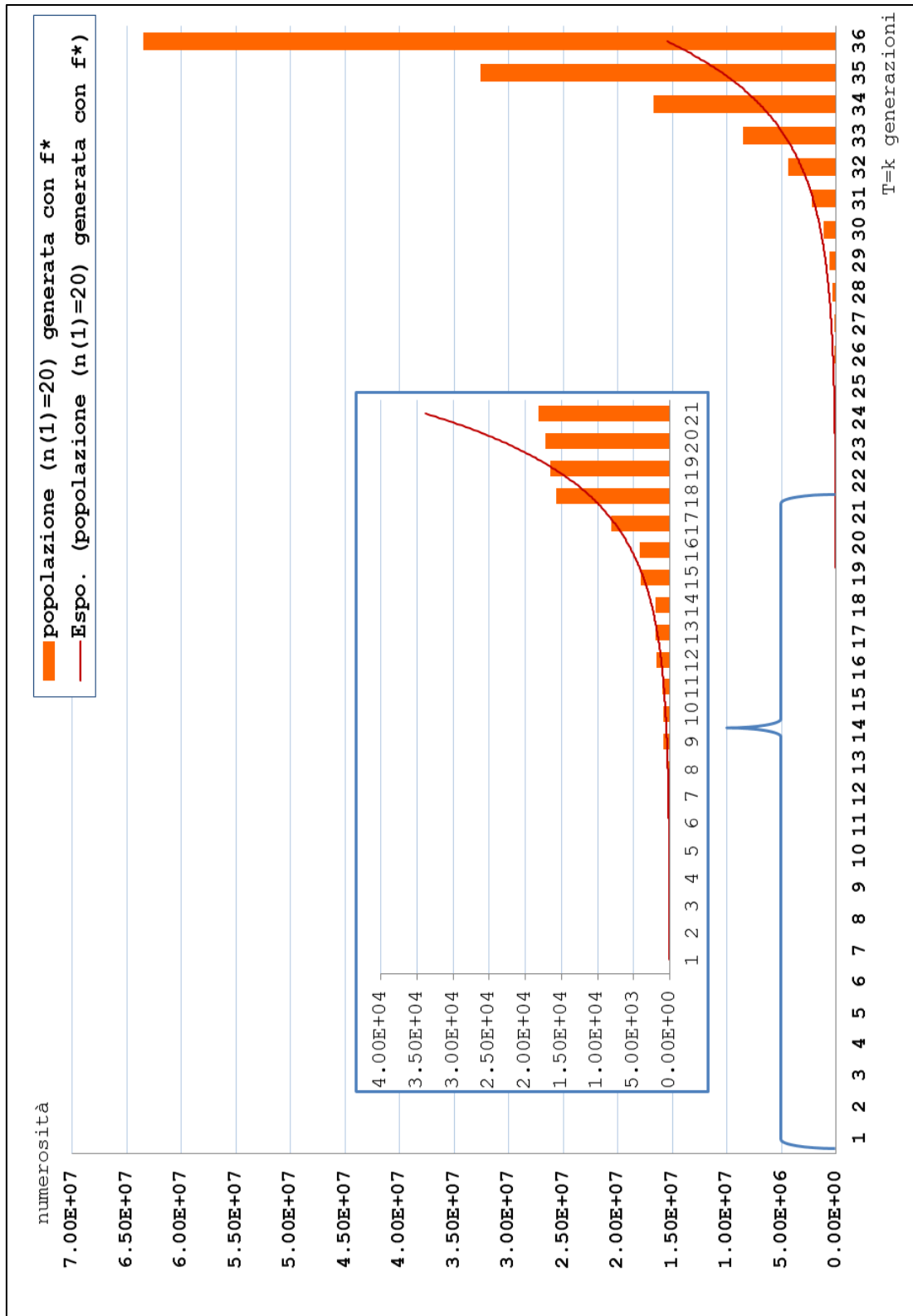
**Grafico 4.4 b** Evoluzione numerica della specie riferita alla  $f^* = 0.55$  (popolazione iniziale  $n(1)=10$ )



Il grafico è stato costruito utilizzando i dati ottenuti dalla simulazione presentata in questo capitolo.

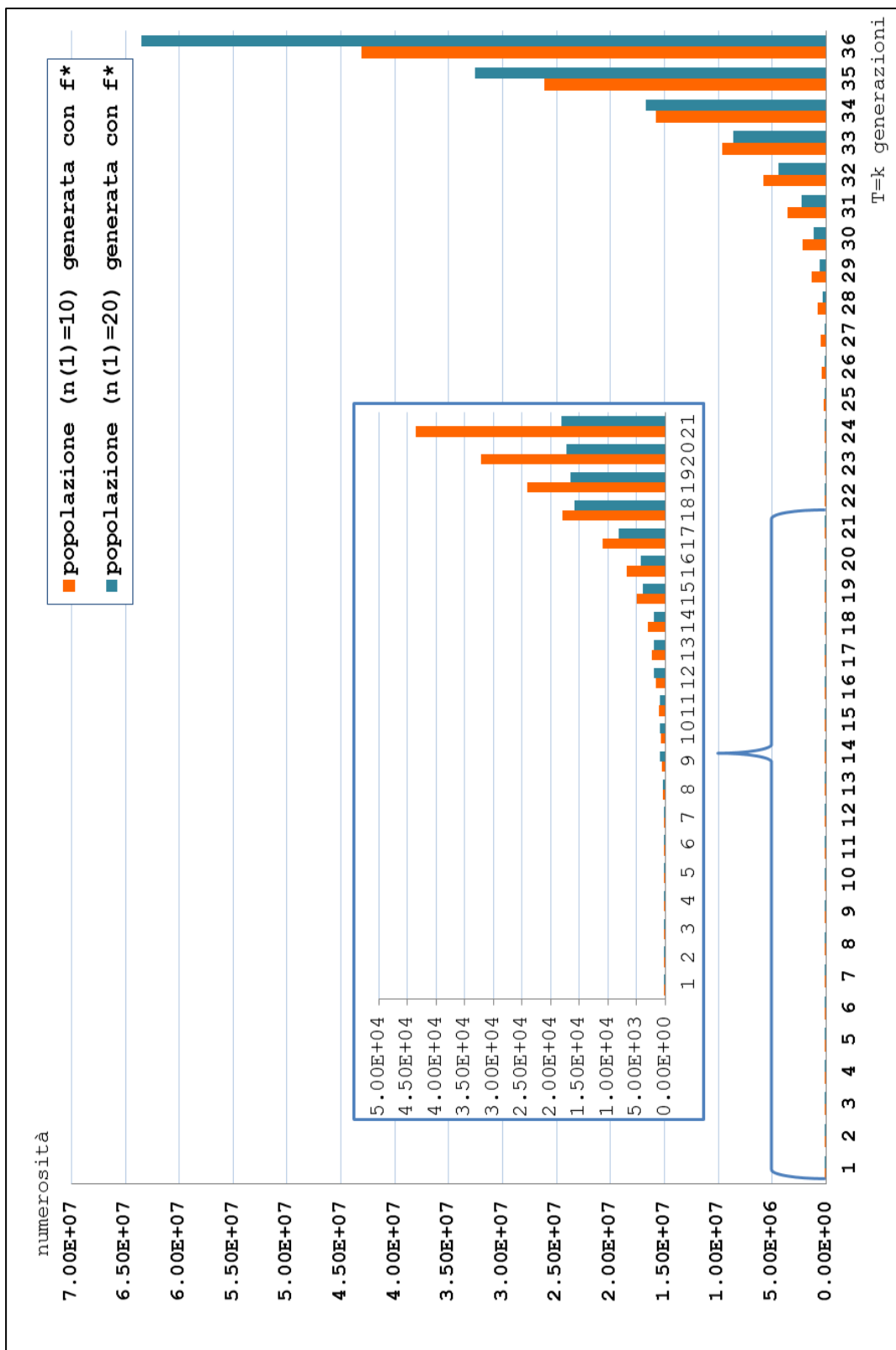


**Grafico 4.4 c** Evoluzione numerica della specie riferita alla  $f^* = 0.65$  (popolazione iniziale  $n(1)=20$ )



Il grafico è stato costruito utilizzando i dati ottenuti dalla simulazione presentata in questo capitolo.

**Grafico 4.4 d** Evoluzione numerica della specie riferita alla  $f^*$  (grafico complessivo delle due simulazioni)



Il grafico è stato costruito utilizzando i dati ottenuti dalla simulazione presentata in questo capitolo.

### 4.3.3 Altre simulazioni

Come precedentemente detto (v. *supra* 4.2.1), sono state sviluppate e computate molteplici simulazioni, variando i valori di alcune variabili del modello, attraverso l'implementazione di un opportuno codice Matlab. Oltre a quelle risultate troppo complesse nei calcoli e che necessiterebbero di macchine di calcolo molto potenti, sono state eseguite quelle meno complesse. In questa seconda casistica, si fa riferimento alle simulazioni condotte attribuendo dei valori alla numerosità della prole derivante da un singolo individuo,  $xv1$  e  $xp2$ , pari a 1 e 2 (cioè da ogni individuo che si riproduce ne nasce un altro o altri due, mentre nei casi analizzati in precedenza il valore era pari a 3). Dalla Tabella 4.4 sono riportate le evoluzioni generazionali delle popolazioni associate al fenotipo comportamentale ottimale,  $f^*$ , per  $n(1) = 10$  e  $n(1) = 20$ , nelle due varianti dei parametri  $xv1$ ,  $xp2$ . Come si evince dalle prime due colonne, relative a  $xv1 = xp2 = 1$ , nel migliore dei casi, la specie riesce a sopravvivere ed a riprodursi fino al periodo  $T = 8$  con un solo individuo rimasto, sia partendo da una popolazione di 10 individui, sia partendo da una con 20 individui. Questi risultati sono ugualmente interessanti, poiché danno prova del fatto che con un valore di riproduttività associata al singolo individuo ( $xv1$  e  $xp2$ ) minore, le popolazioni dell'ecosistema corrono inevitabilmente il rischio di non riuscire a riprodursi per un numero di generazioni elevato.

Tuttavia, aumentando di una unità i due parametri che determinano la riproduttività di un singolo individuo, nel migliore dei casi, la specie non si estingue e sopravvive per tutte le 35 generazioni successive a quella iniziale (senza crescere in modo esponenziale), per dei parametri ottimali di  $f^*$  pari a 0.35 e 0.55. È interessante il fatto che aumentando ancora di una sola unità la riproduttività del singolo, cioè definendo  $xv1 = xp2 = 3$ , le cifre che descrivono il processo evolutivo generazionale della specie sono alquanto più elevate e descrivono un'evoluzione esponenziale numerica della popolazione che è realistica, rendendo interessante il modello, la sua applicazione concreta e le relative interpretazioni che ne scaturiscono (v. *infra*).

Sebbene, salvo poche eccezioni, la popolazione si estingue dopo poche generazioni, i dati di queste due ulteriori simulazioni sono riportati in maniera completa nell'Appendice E.

**Tabella 4.4** Generazioni associate ai fenotipi comportamentali ottimali per le due simulazioni, variando i parametri  $xv1$  e  $xp2$

| $xv1$ e $xp2 = 1$ |            |            | $xv1$ e $xp2 = 2$ |            |            |
|-------------------|------------|------------|-------------------|------------|------------|
| Generazione       | $n(1)=10$  | $n(1)=20$  | Generazione       | $n(1)=10$  | $n(1)=20$  |
|                   | $f^*=0.65$ | $f^*=0.55$ |                   | $f^*=0.35$ | $f^*=0.55$ |
| 1                 | 10         | 20         | 1                 | 10         | 20         |
| 2                 | 5          | 10         | 2                 | 14         | 20         |
| 3                 | 2          | 5          | 3                 | 20         | 18         |
| 4                 | 1          | 4          | 4                 | 20         | 22         |
| 5                 | 1          | 2          | 5                 | 30         | 18         |
| 6                 | 1          | 1          | 6                 | 26         | 20         |
| 7                 | 1          | 1          | 7                 | 22         | 30         |
| 8                 | 1          | 1          | 8                 | 20         | 38         |
| 9                 | 0          | 0          | 9                 | 10         | 46         |
| 10                | 0          | 0          | 10                | 20         | 34         |
| 11                | 0          | 0          | 11                | 22         | 36         |
| 12                | 0          | 0          | 12                | 22         | 44         |
| 13                | 0          | 0          | 13                | 30         | 36         |
| 14                | 0          | 0          | 14                | 44         | 34         |
| 15                | 0          | 0          | 15                | 32         | 38         |
| 16                | 0          | 0          | 16                | 46         | 32         |
| 17                | 0          | 0          | 17                | 36         | 36         |
| 18                | 0          | 0          | 18                | 24         | 42         |
| 19                | 0          | 0          | 19                | 28         | 36         |
| 20                | 0          | 0          | 20                | 42         | 54         |
| 21                | 0          | 0          | 21                | 60         | 44         |
| 22                | 0          | 0          | 22                | 34         | 56         |
| 23                | 0          | 0          | 23                | 16         | 68         |
| 24                | 0          | 0          | 24                | 16         | 62         |
| 25                | 0          | 0          | 25                | 16         | 42         |
| 26                | 0          | 0          | 26                | 12         | 46         |
| 27                | 0          | 0          | 27                | 14         | 46         |
| 28                | 0          | 0          | 28                | 10         | 50         |
| 29                | 0          | 0          | 29                | 8          | 48         |
| 30                | 0          | 0          | 30                | 8          | 54         |
| 31                | 0          | 0          | 31                | 10         | 52         |
| 32                | 0          | 0          | 32                | 16         | 56         |
| 33                | 0          | 0          | 33                | 16         | 48         |
| 34                | 0          | 0          | 34                | 8          | 48         |
| 35                | 0          | 0          | 35                | 6          | 52         |
| 36                | 0          | 0          | 36                | 4          | 56         |

In questa tabella sono riportati i processi evolutivisti ottimali (cioè associati al fenotipo comportamentale  $f^*$ ) per due simulazioni computate variando il valore del parametro che determina la riproduttività di un individuo, cioè ponendo  $xv1, xp2 = 1$  e  $xv1, xp2 = 2$ . È interessante notare come nel primo caso la popolazione riesca a sopravvivere, con un solo individuo fino al periodo  $T=8$ . Nella seconda simulazione, per il fenotipo comportamentale ottimale, le popolazioni non si estinguono nel periodo simulato, ma non la popolazione non cresce in modo esponenziale.

#### 4.3.4 Elaborazione della rappresentazione cromatica dei valori di $f^*$

Il grafico cromatico presente nella Figura 4.2, è la replica della rappresentazione cromatica elaborata da Brennan e Lo [2012], riportata nella Figura 4.1.

Per sviluppare il codice necessario ad elaborare l'immagine cromatica stata codificata l'equazione (9) del cap. 3, di seguito riportata:

$$f^* = \begin{cases} 1 \\ \frac{p}{1-r_2} + \frac{q}{1-r_1} \\ 0 \end{cases} \text{ se } \begin{cases} r_2 \in \left[ q + \frac{pq}{r_1-p}, \infty \right) \text{ e } r_1 > p \\ r_2 \in \left( \frac{1-p}{q}r_1, q + \frac{pq}{r_1-p} \right) \text{ e } r_1 > p; r_2 \in \left( \frac{1-p}{q}r_1, \infty \right) \text{ e } r_1 \leq p \\ r_2 \in \left[ 0, \frac{1-p}{q}r_1 \right] \end{cases} \quad (4)$$

Nell'espressione (4) sono state definite le quantità numeriche della proli,  $x_a$ ,  $x_b$ , in termini generici  $c_{b1}$ ,  $c_{b2}$ , dove:

$$\begin{aligned} \text{Probabilità } (x_a = c_{a1}, x_b = c_{b1}) &= p \in [0, 1] \\ \text{Probabilità } (x_a = c_{a2}, x_b = c_{b2}) &= 1 - p \equiv q \end{aligned}$$

in cui  $\forall j = 1, 2$  (possibili stati dell'ambiente, pioggia e sole) si assume che  $c_{aj}$  e  $c_{bj} \geq 0$  e  $c_{aj} + c_{bj} \neq 0$ . Definite queste due nuove variabili, il tasso di fecondità relativo è dato dal rapporto fra le quantità della progenie apportate dall'azione  $a$  e  $b$ , costruire a valle o sull'altopiano (per due situazioni ambientali:  $j = 1, 2$ ) cioè:  $r_j \equiv c_{aj}/c_{bj}$ .

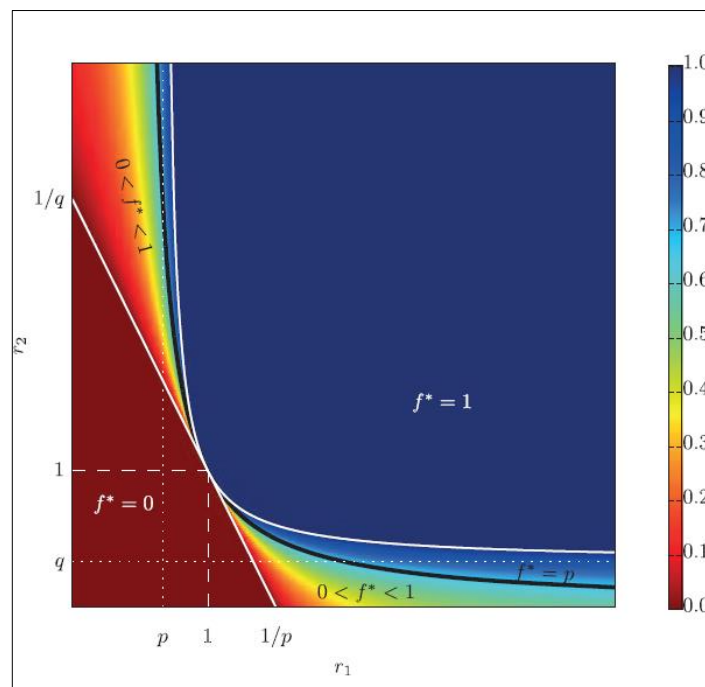
Oltre all'espressione analitica in (4), per rappresentare in modo accettabile gli effetti cromatici si è deciso di costruire una matrice di dimensioni  $100 \times 100$ , contenente 10,000 dati<sup>13</sup>. Le diversità cromatiche sono associate ai valori  $f^*$ , in base alla scala cromatica posizionata nella parte destra della Figura 4.2. Il quadrato colorato nel piano cartesiano ( $r_1; r_2$ ) corrisponde alla matrice  $100 \times 100$  che contiene tutti i dati simulati a seguito della computazione del codice.

Nel piano cartesiano raffigurato nella Figura 4.2 si mettono in evidenza, per mezzo di una scala cromatica, le diverse tipologie comportamentali, rappresentate dal parametro  $f^*$  che varia da 0 a 1, estremi inclusi. I valori corrispondenti nella matrice a  $f^* = 0$  sono posizionati in basso a sinistra, nella parte colorata in blu, mentre i valori corrispondenti a  $f^* = 1$  sono sulla parte superiore, colorata di rosso. Sebbene siano

<sup>13</sup> La matrice  $100 \times 100$  è presentata, seppure in caratteri minimali per questioni di limitazioni di spazio, nell'Appendice D.

scambiati i colori associati ai valori estremi della probabilità  $f^*$ , tra l'immagine elaborata in questa applicazione originale e quella relativa alla simulazione sperimentale condotta da Brennan e Lo ci sono poche differenze. Una fra queste è il diverso della linea blu, che delimita a sinistra, i valori di  $f^* = 0$  da quelli  $0 < f^* < 1$ , contenuti nella matrice  $100 \times 100$  computata con il codice riportato in Appendice B. Di conseguenza, data la minore inclinazione  $m$  della retta:  $r_2 = mr_1 + \frac{1}{q}$ , anche la linea curva che delimita a destra i valori  $f^* = 1$ , risulta più spostata verso l'alto, perciò i valori  $f^* = 1$ , sono in quantità minore rispetto quelli calcolati dagli autori del modello. Questa differenza si spiega con il fatto che nella simulazione del modello condotta da Brennan e Lo (v. *infra* cap.3), il fenotipo comportamentale ottimale, che determina il miglior successo riproduttivo della specie, in termini di quantità di individui, risulta  $f^* = 0.75$  quindi un valore più spostato verso il numero 1. Nell'applicazione originale presentata in questo capitolo (v. *infra* 4.3.1), il fenotipo comportamentale ottimale risulta  $f^* = 0.55$ , spostando l'ottimalità del successo riproduttivo per valori intermedi fra 0 e 1.

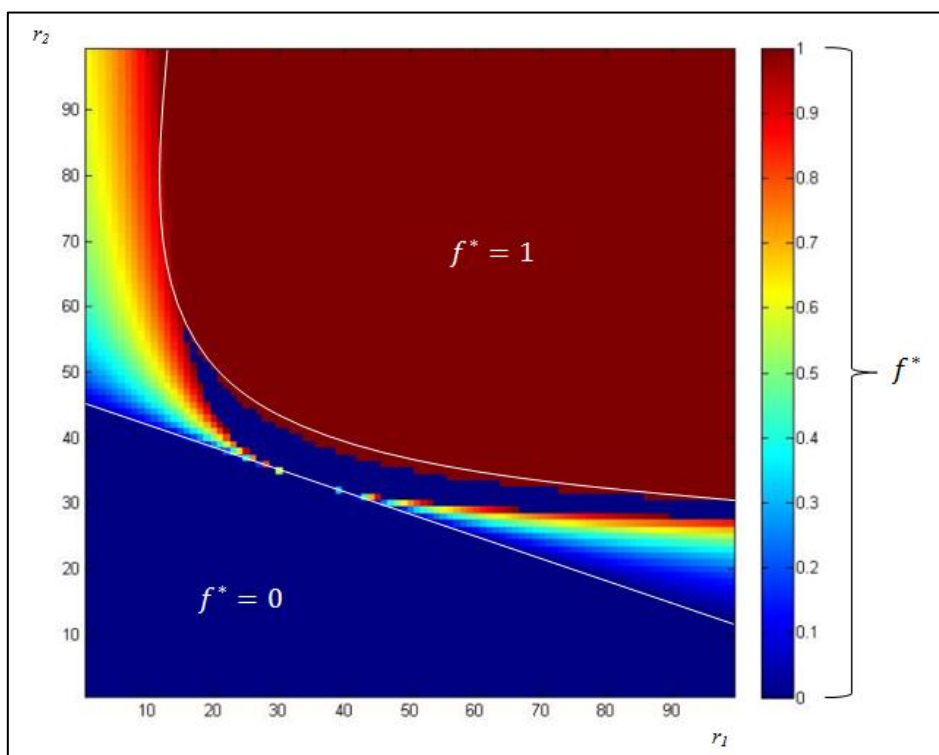
**Figura 4.1** Rappresentazione cromatica del valore di  $f^*$  per valori di  $r_1$  e  $r_2$  elaborata da Brennan e Lo



Nel piano  $r_1 - r_2$  (in cui  $r_j \equiv c_{aj}/c_{bj}$ ) si rappresenta la fecondità relativa dell'azione  $a$  rispetto all'azione  $b$  per una situazione ambientale  $j$ ) sono rappresentate le regioni in cui  $f^*$  assume valori pari a 0, 1 o compresi tra i due numeri.

Fonte: Brennan-Lo, 2012

**Figura 4.2** Rappresentazione cromatica per diversi valori di  $f^*$



Nel piano  $r_1 - r_2$  (in cui  $r_j \equiv c_{aj}/c_{bj}$ ) si rappresenta la fecondità relativa dell'azione  $a$  rispetto all'azione  $b$  per una situazione ambientale  $j$ ) sono rappresentate le regioni in cui  $f^*$  assume valori pari a 0, 1 o compresi tra i due numeri. Il grafico cromatico è stato implementato in Matlab, attraverso il codice riportato in Appendice B. Esso rappresenta una matrice  $100 \times 100$  in cui sono contenuti 10,000 numeri compresi fra lo 0 e 1, che corrispondono ai 10,000 pixel della figura.

#### **4.4 Interpretazioni del modello e dei risultati riferite ai mercati finanziari**

---

In questo paragrafo si descrivono le interpretazioni elaborate del modello evolucionistico elaborato da Brennan e Lo e dell'applicazione sperimentale presentata in questo capitolo, con riferimento ai mercati finanziari, avvalendosi altresì dei concetti principali che derivano dalla teoria delle *Adaptive Markets Hypothesis*. Le varie interpretazioni relative ai mercati finanziari si riferiscono a diverse categorie e aspetti che li caratterizzano, in particolare, agli operatori, agli strumenti finanziari e alle dinamiche che si riscontrano in essi.

Prima di approfondire le tematiche principali di questo paragrafo, è necessario mettere in evidenza che il modello elaborato dagli autori e le sue simulazioni non hanno uno scopo predittivo- previsionale, ma piuttosto esso è un modello *descrittivo*. Infatti, a differenza di molti modelli computazionali, costruiti con l'obiettivo di prevedere e simulare delle serie di dati futuri e, successivamente, utilizzare i risultati ottenuti per

elaborare specifiche strategie di investimento e di mercato, il modello che simula il processo evolutivo generazionale di una specie di individui in un determinato ecosistema caratterizzato da certe peculiarità, ha lo scopo di fornire una descrizione delle dinamiche che ragionevolmente intercorrono in un contesto sotto determinate caratteristiche, espresse in parametri, vincoli analitici e formalizzazioni matematiche utilizzate per elaborare il modello.

Le considerazioni e opinioni successivamente descritte, sono riferite agli aspetti di maggiore interesse del modello e della sua applicazione sperimentale, che consentono di interpretare il *framework* di riferimento del modello evolutivo ai mercati finanziari, applicando le AMH. Questi aspetti sono:

1. la casualità che caratterizza il contesto (biologicamente, l'ecosistema ambientale) del tempo meteorologico;
2. la scelta fra due alternative che deve essere effettuata dagli individui di una specie (appartenente all'ecosistema).

Il *framework* concreto del modello è infatti rappresentato da un ecosistema in cui i giorni caratterizzati da un meteo soleggiato si verificano con una probabilità  $p$  pari al 75%, mentre nel rimanente 25% dei giorni si verifica un tempo piovoso. Gli individui di una popolazione iniziale devono effettuare una decisione rispettivamente al luogo in cui costruire la propria abitazione, nella valle (valley, scelta  $a$ ) o sull'altopiano (plateau, scelta  $b$ ). Un'ipotesi importante ed in linea con la teoria delle AMH (v. *infra*), è che la casualità del tempo meteorologico ambientale influenza direttamente la sopravvivenza e il successo riproduttivo dei singoli, quindi della specie, in base alla scelta effettuata: durante i giorni di sole, coloro che hanno costruito nella valle sono protetti dall'ombra e procurano le risorse idriche dai ruscelli, infatti la numerosità attesa della prole  $x_a$  (relativa alla scelta  $a$ ) per ciascun individuo è pari a  $E[x_a] = 3$ ; sull'altopiano, dove l'acqua scarseggia, gli individui sono destinati a scomparire e a non riprodursi, infatti il valore atteso della prole  $x_b$  (relativa alla scelta  $b$ ) è  $E[x_b] = 0$ . Viceversa, nei giorni di pioggia si verifica la situazione opposta: gli individui che costruiscono la loro abitazione nella valle subiscono inondazioni che ne provocano la scomparsa e la mancanza di una generazione successiva  $E[x_a] = 0$ ; coloro che abitano sull'altopiano invece, essendo sopraelevati sopravvivono e si riproducono ciascuno con un valore atteso pari a  $E[x_b] = 3$ .



#### **4.4.1 Casualità meteorologica → Volatilità dei mercati finanziari**

Per iniziare la descrizione interpretativa del modello evolutivo in un'ottica riferita ai mercati finanziari, si considerano le peculiarità che caratterizzano il contesto ambientale in cui si inserisce la simulazione evolutiva. Secondo la teoria delle ipotesi di mercato adattivo, le strategie decisionali e i comportamenti adottati dagli operatori del mercato (che, sono essere umani dotati di intelligenza ma non perfettamente razionali), sono fortemente influenzate dalle caratteristiche contestuali in cui si inseriscono, quindi è necessario analizzare in modo approfondito le conseguenze che un contesto di variabilità può provocare nel mercato. L'instabilità che caratterizza, anche nella realtà, il tempo meteorologico è una variabile parametrica fondamentale nella costruzione del modello e della sua simulazioni.

La casualità che contraddistingue il tempo meteorologico, può essere interpretata, dal punto di vista economico finanziario, come la *volatilità* dei mercati finanziari. Per "volatilità" dei mercati si intendono, in questa sede, molteplici cause e situazioni in cui si verificano delle instabilità che rendono il funzionamento e le dinamiche nei mercati finanziari generalmente non efficienti. Innanzitutto, la volatilità può essere presente nella quotazione degli strumenti finanziari: infatti con il questo termine applicato ai mercati finanziari, si definisce la variazione di un prezzo di un titolo, in un determinato arco temporale; più ampie sono queste oscillazioni, più la volatilità è elevata. Tale fenomeno è spesso strettamente collegato all'eccesso di reattività del mercato, cioè la cosiddetta distorsione comportamentale dell'*overreaction* da parte del mercato, che "amplifica" il contenuto delle informazioni pubbliche di nuova diffusione, attraverso decisioni ed azioni operative irrazionali ed istintive.

Nell'applicazione del modello evolutivo presentata in questo capitolo si ipotizza un'alternanza casuale fra tempo soleggiato (probabilità 75%) e piovoso (probabilità 25%): questa alternanza casuale, può essere interpretabile come la variabilità e la casualità che contraddistingue la fasi positive e negative nei trend principali di uno specifico mercato finanziario. Ad esempio, la probabilità che nell'ecosistema si verifichi un tempo soleggiato può essere interpretato e paragonato ad una fase di mercato (o un indice di mercato, o uno strumento o titolo finanziario) caratterizzata da trend positivi; al contrario, i periodi in cui si verifica pioggia possono corrispondere alle fasi in cui si verificano i crolli dei prezzi azionari e delle quotazioni degli strumenti finanziari in

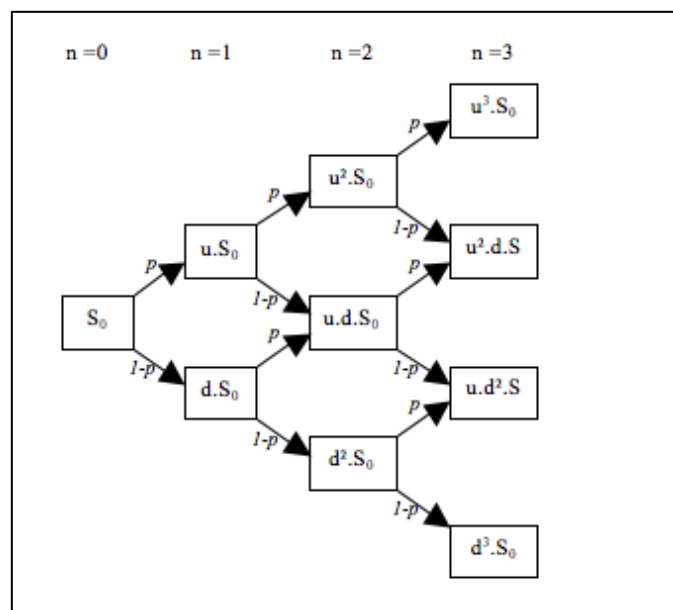
generale, ed altresì, le variazioni negative degli indici di mercato. Il periodo temporale in cui si sussegue l'alternanza fra sole e pioggia (cioè fra andamento di mercato positivo e negativo) ha importanza ai fini dell'interpretazione. Infatti è più utile, ai fini pratici, determinare l'arco temporale riferito al mercato finanziario sui cui si vuole effettuare l'analisi interpretativa applicando un modello evoluzionistico simile a quello in questione. Tale arco temporale di riferimento può essere suddiviso in unità orarie, in generale, infra-giornaliere, giornaliera, settimanali o mensili, dipendentemente all'obiettivo di analisi e al grado di dettaglio di essa.

Nella simulazione sperimentale condotta da Brennan e Lo [2012] non viene illustrato il modo in cui si rende casuale l'alternanza fra pioggia e sole. Come esposto in precedenza (v. *infra* 4.2.2), dall'output presente nello studio dei due autori, si può intuire che fino ad un certo periodo ( $T = 13$ ) si verifica un meteo soleggiato. Questa situazione è piuttosto inverosimile, trattandosi di variabilità nel tempo meteorologico, ed è immotivata in quella specifica applicazione. Tuttavia, essa può essere utile qualora fosse necessario sviluppare un modello evoluzionistico-comportamentale in cui il contesto di riferimento ambientale è contraddistinto dal connotato della stagionalità. In un mercato finanziario, il concetto di stagionalità è applicato per descrivere un periodo continuo in cui, con molta probabilità, si verificano sempre determinate condizioni. Diversamente, nell'applicazione originale presentata in precedenza, la casualità del tempo meteorologico è ottenuta attraverso la costruzione di una variabile con una distribuzione binomiale, inserita all'interno di un vettore outcome dei dati simulati. Il vettore casualmente generato, ha una distribuzione di giorni di sole e pioggia (rappresentati dai valori 1 e 0) più veritiera rispetto a quanto descritto per l'applicazione di Brennan-Lo. Il concetto di "binomialità" si riscontra anche in ambito finanziario analitico, in particolare in riferimento al *pricing* di uno strumento finanziario derivato.

L'*albero binomiale*<sup>14</sup> è una prima modellizzazione del movimento discreto del prezzo di un titolo finanziario. Esso è molto diffuso come tecnica per valutare le opzioni su azioni: si tratta di un albero che rappresenta i diversi sentieri che potrebbero essere seguiti dal prezzo dell'azione durante la vita dell'opzione; l'assunzione sottostante è che il prezzo dell'azione segua un processo casuale, cioè un *random walk*. In ogni intervallo c'è una certa probabilità che il prezzo del titolo aumenti o diminuisca ad un certo tasso. La probabilità che il prezzo salga è generalmente indicata con  $p$ , mentre la probabilità che il prezzo scenda è il complemento  $(1 - p)$ : questa costruzione rispecchia in modo identico la casualità del tempo meteorologico, descritta con i parametri  $p$  (probabilità di sole) e  $q = (1 - p)$  (probabilità di pioggia). Il modello binomiale converge verso il modello Black-Scholes-Merton col diminuire della lunghezza degli intervalli.

Secondo la teoria delle *Adaptive Markets Hypothesis*, il comportamento degli individui che operano nel mercato è fortemente influenzato dalle caratteristiche contestuali che determinano le dinamiche con cui agiscono le forze della selezione naturale. Le forze della selezione naturale, a loro volta, determinano quali individui sopravvivono nel mercato o si estinguono, anche in base al loro processo decisionale e comportamentale. Questo aspetto viene trattato di seguito, descrivendo le interpretazioni associative fra il contesto alternativo di scelta all'interno del modello evuzionistico e fra le scelte che gli operatori devono attuare in un mercato finanziario.

<sup>14</sup> La struttura analitica di un albero binomiale, applicato al *pricing* delle opzioni è abitualmente definita come segue:



#### **4.4.2 Scelta fra alternative *valley-plateau* → Scelta fra *asset* finanziari, scelta fra diverse strategie**

Nel modello evolutivo, gli individui di una popolazione devono effettuare una scelta in base alla quale, influenzata dal tempo meteorologico che si verifica nell'ecosistema, gli individui si riproducono in una nuova generazione più numerosa o si estinguono. Tale scelta consiste nelle due alternative di costruire a valle (opzione *a*) o sull'altopiano (opzione *b*); se si verifica un meteo soleggiato si riproducono gli individui che hanno edificato in valle; al contrario se c'è pioggia si riproducono gli individui sull'altopiano. Ipotizzando questo contesto in un'ottica di mercato finanziario, si possono elaborare interessanti interpretazioni. La scelta obbligata fra due (o eventualmente più) alternative può infatti essere vista come:

1. scelta fra diversi strumenti finanziari o portafogli su cui investire;
2. scelta fra varie, semplici o complesse, strategie di investimento.

Nell'applicazione sperimentale del modello evolutivo, gli individui appartenenti ad una specie che vive in ecosistema devono condurre un processo decisionale, che li porta ad effettuare una scelta fra due singole alternative, *a* o *b*. Analogamente in un mercato finanziario, il singolo investitore, le categorie di investitori e i grandi gruppi di investimento, i quali rappresentano tutti degli operatori di mercato, devono effettuare delle scelte di investimento tra una quantità innumerevole di strumenti finanziari. Per comprendere meglio questa associazione è utile elaborare un esempio. Si ipotizzi una semplice situazione in cui un singolo investitore, operatore di mercato, debba effettuare una scelta sullo strumento finanziario in cui investire i suoi risparmi: nel titolo azionario *a* o nel titolo azionario *b*. Il profitto o la perdita derivante dall'investimento nel titolo *a* o *b*, dipende da alcune variabili che caratterizzano il mercato azionario finanziario di riferimento, in particolare, se l'indice *X* aumenta (il che si verifica con una probabilità pari al 75%) l'investimento nel titolo *a* risulta profittevole e vantaggioso in termini di rendimento mentre l'investimento nel titolo *b* costituisce una perdita di capitale; al contrario, se l'indice *X* diminuisce (il che si verifica nel 25% dei casi) il titolo *b* porta ad un rendimento positivo, mentre investire nel titolo *a* risulta una scelta poco vantaggiosa e perdente. L'esempio proposto in queste modalità corrisponde al framework di riferimento in cui si inserisce la simulazione del modello evolutivo di Brennan e Lo. Generalizzando la situazione appena descritta, si può ipotizzare che il

processo decisionale di un operatore di mercato (che sia egli un singolo investitore privato o una banca di investimento) sia focalizzato sulla scelta di molteplici strumenti finanziari (ad esempio obbligazioni, BOT, BTP, titoli azionari, strumenti derivati, quote di fondi di investimento, ...). Per ognuno di questi asset se ne può studiare, dopo aver condotto attente e complesse analisi, la correlazione con determinate variabili generali che caratterizzano il mercato (soprattutto variabili come gli indici di mercato e di settore, tassi di interesse, tassi di cambio, prezzi delle materie prime, ...) con l'obiettivo di impostare e sviluppare dei modelli che descrivano il processo evuzionistico di un investimento (in termini di profitti e perdite) in uno specifico strumento finanziario, in relazione ad un parametro generale del mercato finanziario che influenza il trend dell'asset prescelto. Lo scopo del modello è quello di computare il valore del fenotipo comportamentale ottimale (che massimizza il valore del rendimento dell'investimento nel periodo finale)  $f^*$ , che rappresenta in modo concreto il valore ottimale da applicare alla scelta dell'alternativa  $a$  (in questo caso), all'interno del processo decisionale e di investimento. Più è complesso il processo di investimento che l'operatore deve attuare, più complesse e approfondite dovranno essere le analisi tra le relazioni positive e negative che descrivono il rapporto tra il singolo asset e il mercato e, infine, più complesso sarà il modello computazionale da elaborare analiticamente, tenendo in considerazione tutti i risultati derivanti dall'analisi precedentemente condotta. Tale procedimento presenta delle similitudini con l'*asset allocation*, con la differenza che implementando un modello di tipo evuzionistico basato sulla teoria delle AMH, lo scopo è quello di indagare e comprendere, per quanto possibile, le dinamiche che avvengono nel mercato e le conseguenze che esse hanno sulla sopravvivenza degli operatori e sulle caratteristiche generali della *market ecology*.

Un'ulteriore interpretazione del processo decisionale condotto dagli individui in riferimento ai mercati finanziari, è quello di associare la scelta fra le alternative  $a$  e  $b$  (valle/altopiano) alle strategie di investimento  $a$  e  $b$ , cioè, considerando le strategie basilari del mercato e delle leggi economiche: comprare e vendere. Le innumerevoli strategie di investimento, sotto le AMH, dipendono da moltissimi fattori come, tra i più importanti, l'andamento del mercato, le condizioni aziendali e contrattuali in continuo cambiamento, il numero di investitori (comprese le loro caratteristiche comportamentali

e preferenze) che ‘entrano ed escono’ dal mercato e il valore dei profitti potenziali e reali disponibili; ovviamente, più il mercato è ampio ed eterogeneo, più le dinamiche che influenzano e modificano i fattori sopra citati, saranno numerose e complesse da analizzare. Quindi, in base a determinate condizioni contestuali, una strategia di investimento può risultare vantaggiosa o poco profittevole ed in ultima istanza, determina il successo e la sopravvivenza di alcuni operatori di mercato e l’estinzione di altri. In un’ottica biologica-evoluzionistica, l’entrata, il successo e l’uscita degli investitori dai mercati finanziari, possono essere paragonati alle fasi biologiche della generazione della specie, del successo riproduttivo (caratterizzato dall’adattamento degli individui che vincono le forze della selezione naturale) e della estinzione. Riprendendo i concetti chiave sviluppati all’interno della corrente delle ipotesi di mercato adattivo un mercato finanziario presenta le seguenti specificità:

1. gli individui agiscono secondo il proprio interesse, talvolta commettendo errori;
2. gli individui imparano continuamente dalle singole esperienze e hanno la capacità di adattarsi (in modo più o meno adeguato e vantaggioso rispetto alla situazione venuta a crearsi);
3. la competizione, causata dalla ‘lotta alla sopravvivenza’ (in un contesto di mercato finanziario, la lotta alla sopravvivenza implica che gli operatori non vogliono essere eliminati dal mercato, non vogliono subire ingenti perdite, quindi ‘fanno del loro meglio’ per attuare strategie vincenti), determina l’adattamento degli individui;
4. la selezione naturale (che determina l’entrata e l’uscita degli investitori, l’offerta, la rarità o l’eliminazione di strumenti finanziari nel mercato) influenza e ‘plasma’ il contesto generale del mercato (l’ambiente) definita come *market ecology*;
5. il continuo processo evolutivo definisce le dinamiche di mercato, in particolare:
  - l’adattamento non è indipendente dalle forze del mercato, poiché esso è causato dalla competizione fra singoli operatori e categorie di investitori diverse;
  - le relazioni e interazioni fra tutti i partecipanti al mercato sono dominate dalla selezione naturale;
  - la selezione naturale modella, infine, il contesto generale di riferimento (il mercato finanziario).

Tuttavia, la teoria delle AMH non si focalizza su ogni singolo comportamento ma su come esso si modifica in base alle condizioni ambientali del mercato. Nel modello evolucionistico gli individui non sono né completamente razionali, né completamente irrazionali: piuttosto essi sono *intelligenti*, pensano con un'ottica di lungo periodo e sono investitori competitivi, che si adattano alle modifiche 'ambientali'. I concetti di intelligenza e dei *limiti all'intelligenza* sono espressi anche nella differenziazione delle 4 casistiche del modello evolucionistico sviluppata da Brennan e Lo (v. *supra* 3.4.4). I due autori inoltre, introducono il concetto dell'*idiosincrasia* applicandola al modello evolucionistico, in particolare nelle ipotesi di distribuzione delle variabili. Tale formulazione è implicitamente applicata anche nella simulazione presentata in questo capitolo, ed è la motivazione per cui il fenotipo comportamentale ottimale ( $f^* = 0.55$ ) non risulta uguale a quello ottenuto nella simulazione di Brennan e Lo ( $f^* = 0.75$ ). Dal momento che nella simulazione originale presentata in questo capitolo i successi riproduttivi associati alla scelta *a* e *b* sono: identicamente e indipendentemente distribuite (IID) da una generazione all'altra e identicamente ed indipendentemente distribuite (IID) tra gli individui appartenenti alla stessa generazione *k*, il *rischio riproduttivo idiosincratico* (detto anche rischio specifico), cioè quello relativo alle specificità di ciascun individuo, viene eliminato nella specie. Il risultato ottenuto è paragonabile, dal punto di vista interpretativo, all'eliminazione del rischio idiosincratico che viene spesso messa in pratica dalle strategie di investimento e di gestione di portafogli finanziari. Dal momento che gli individui sono diversificati nel processo decisionale e manifestano azioni comportamentali statisticamente indipendenti, essi possono optare per un'alternativa senza mettere a rischio la sopravvivenza dell'intera specie. L'indipendenza impedisce inoltre, che vi siano ipotetiche dinamiche e relazioni strategiche inter-individuali, dal momento che il comportamento dell'individuo *i*-esimo di una data generazione non influisce sul successo e risultato riproduttivo dell'individuo *j*-esimo della medesima generazione.

La distinzione fra eventi sistematici ed eventi idiosincratici in un ecosistema, permette di comprendere le manifestazioni di irrazionalità da parte dell'operatore di mercato. Egli tende a ragionare irrazionalmente e ad adottare comportamenti istintivi soprattutto nel dover fronteggiare eventi sistematici che mettono fortemente a rischio la sua permanenza nel mercato; mentre, a seguito di eventi idiosincratici, emerge l'aspetto

cognitivo e comportamentale più razionale dell'individuo, classicamente ipotizzato nella letteratura economica.

#### **4.4.3 Interpretazione dei risultati numerici delle simulazioni**

Un ultimo aspetto interessante da approfondire è l'interpretazione dei risultati numerici ottenuti dalle due simulazioni alla luce dell'interpretazione finanziaria descritta in questo paragrafo. Assumendo che il vettore (sole/pioggia) associato al tempo meteorologico rappresenti l'andamento generale del mercato (mercato che sale, mercato che scende) e che esso possa essere computato in modo casuale (come effettuato nella simulazione) o attraverso un'alternanza decisa da chi effettua l'analisi sulla base di opportune scelte, è interessante capire come il processo evolutivo, rappresentato da una crescita numerica esponenziale, possa rappresentare una situazione operativa finanziaria concreta. Si supponga che la scelta fra valle o altipiano sia equivalente alla scelta fra un investimento in un titolo azionario (scelta *a*) od obbligazionario (scelta *b*); *f* rappresenta la probabilità che si investa in un titolo azionario. Assegnando dei valori alla riproduttività cui conducono le due scelte ( $xv1$ ,  $xp2$ ), in base alla situazione che si verifica nel mercato (cioè l'output del tempo meteorologico, che rappresenta il mercato, o un indice generale o un indice di settore, che scende o sale) si può computare, in termini concreti numerici, il valore dello strumento finanziario successivo ad una contrattazione, avvenuta sotto determinate condizioni di mercato. Ponendo il numero di contrattazioni pari al numero delle generazioni della popolazione, si può calcolare l'importo potenziale dell'investimento partendo da un capitale iniziale, in base a determinati valori assegnati. Questa interpretazione operativa, consente una di ipotizzare la possibilità di un'elaborazione e applicazione concreta di modelli evolutivi ai processi di investimento, in particolare durante le fasi di trading di strumenti finanziari nel mercato.

Ciò che emerge da queste considerazioni è riassumibile in un aspetto che si ritrova nella teoria delle AMH: la tipologia di rischio o caratteristica ambientale che incide sulla fecondità di una specie, perciò, in ultima istanza, sulla sua sopravvivenza, determina la modifica e l'adattamento, possibili grazie *all'intelligenza naturale* e alla *razionalità*, degli individui ad attuare scelte e azioni in linea con il fenotipo comportamentale più adeguato (alle caratteristiche dell'ecosistema) e vantaggioso (in termini di



riproduzione). Applicando questo concetto ai mercati finanziari, il ragionamento appena descritto si modifica nel seguente modo: una caratteristica, sia essa stabile o casuale, insista nel mercato incide direttamente sia sulla performance vantaggiosa o poco profittevole di una specifica attività finanziaria, sia sull'entrata e l'uscita degli investitori nel mercato (in base alla performance ottenuta dal processo di investimento). Questo, in ultima istanza, determina la modifica e l'adattamento del processo decisionale (processo di ipotesi e analisi delle strategie di investimento) e delle azioni comportamentali (attuazioni delle strategie di investimento e operazioni effettuate nel mercato). Tali modifiche sono attuabili poiché gli investitori, che sono razionalmente limitati (poiché talvolta manifestano comportamenti istintivi irrazionali e distorsioni comportamentali) e intelligenti, fanno scelte ed azioni, adeguate alle presenti condizioni di mercato, con l'obiettivo di massimizzare il rendimento (massimizzazione del processo riproduttivo) e rimanere nel mercato (sopravvivenza).

## 4.5 Conclusioni

---

Gli aspetti più interessanti emersi in questo capitolo, in cui è stata descritta un'applicazione del modello evoluzionistico di Brennan e Lo, sono molteplici. Dal punto di vista analitico, i risultati ottenuti dalle varie simulazioni sono in linea con gli aspetti qualitativi del *framework* biologico, considerato in tutte le sue caratteristiche e parametri, in cui si inserisce il modello.

Le estensioni apportate nella fase di sviluppo del codice computazionale del modello hanno provocato una lieve modifica negli outcome dei dati rispetto ai risultati ottenuti da Brennan e Lo. Tuttavia le modifiche sono state dettagliatamente illustrate nella loro formalizzazione e nelle motivazioni che hanno indotto l'autrice ad effettuare determinate scelte in fase di elaborazione del codice. Le applicazioni sperimentali descritte precedentemente, non rappresentano una mera replica del modello evoluzionistico illustrato nel capitolo precedente, ma sono state di estrema utilità, anche in fase di stesura del codice Matlab, nel ragionamento finalizzato ad elaborare i successivi sviluppi interpretativi riferiti alla realtà dei mercati finanziari. Nel loro studio, Brennan e Lo, non forniscono ai lettori alcuna interpretazione economico-finanziaria del modello evoluzionistico e della relativa simulazione. Essi si limitano a descriverlo e commentarlo nei risultati dal punto di vista ecologico, considerando

implicitamente i concetti chiave della teoria delle ipotesi di mercato adattivo, ma senza applicarli ai mercati finanziari. Uno degli obiettivi di questo capitolo era quello di fornire delle interpretazioni al modello in riferimento alla teoria delle AMH, applicata ai mercati finanziari.

Sintetizzando i vari aspetti più importanti che sono emersi nell'analisi interpretativa, si dà prova del fatto che le caratteristiche di un mercato finanziario influenzano sui trend e le performance degli asset e degli investimenti finanziari. A sua volta, una buona o cattiva performance determina il processo evolutivo (entrata ed uscita dal mercato) e l'adattamento degli operatori. Essi si adattano per vincere le forze di selezione del mercato e, dotati di intelligenza, riescono ad attuare strategie di investimento che risultano vincenti in termini di guadagno. Tuttavia, poiché gli operatori di mercato hanno una razionalità limitata, a differenza di quanto ipotizzato nella teoria delle ipotesi di mercato efficiente, essi manifestano dei processi decisionali non sempre ottimali (in termini di sopravvivenza nel mercato e massimizzazione del guadagno) e delle distorsioni comportamentali che determinano azioni inadeguate e, talvolta, con effetti indesiderati sia dal singolo investitore, sia dall'intero mercato, che ne subisce comunque le conseguenze.

In aggiunta a quanto scritto in precedenza, si può riflettere sul fatto che un simile modello evolutivo, anche diverso nella sua formalizzazione, può essere utilizzato al fine di determinare specifiche strategie di investimento o essere impiegato in alcune fasi dell'intero processo di investimento, specialmente per quelle fasi in cui si analizzano ipotetici risultati conseguiti in seguito ad altrettanto ipotetiche decisioni di investimento. Ampliando i 'confini' dell'ambito applicativo del modello di Brennan e Lo, i modelli di tipo evolutivo possono essere altresì applicati per analizzare e studiare gli effetti che alcune manovre di politica economica e monetaria provocano nel contesto (ad esempio contesto generale economico, contesto finanziario, contesto sociale, ...), inteso nella sua totalità, in cui vengono implementate.

Di seguito, nella parte conclusiva di questo elaborato, verranno illustrati ulteriori spunti per studi e applicazioni future nell'ambito della nuova teoria delle AMH e dei modelli evolutivi applicati alle scienze economiche e alla finanza.

## ***Conclusione***

Le questioni che gravitano attorno alla validità e alla veridicità della teoria delle *Efficient Markets Hypothesis*, non sono ancora state risolte e i risultati emersi da studi e test empirici sono più o meno discordanti con tale teoria. Gli *event study* sembrano confermare il fatto che le informazioni vengano riflesse nei prezzi dei titoli azionari non appena esse sono diffuse nel mercato; al contrario, le diverse “anomalie di calendario” che si riscontrano nelle serie storiche dei rendimenti dei titoli sembrano non sostenere l’idea che i mercati siano efficienti. L’acceso dibattito accademico riguardante le EMH ha contribuito alla nascita di nuovi filoni teorici, cui fanno parte numerosi accademici e professionisti che si sono posti l’obiettivo di ampliare le teorie classiche sui mercati finanziari e di proporre eventuali visioni e soluzioni alle discordanze tra l’evidenza empirica e le assunzioni sottostanti le teorie classiche di portafoglio.

Tra questi rientra la teoria delle *Adaptive Markets Hypothesis* elaborata da Andrew W. Lo negli anni Novanta, che prende spunto dall’applicazione di concetti appartenenti a diverse discipline, quali la finanza comportamentale, la psicologia, le neuroscienze cognitive e la sociobiologia. La teoria delle ipotesi di mercato adattivo si basa sui principi biologici che stanno alla base della teoria evuzionistica, cioè i concetti di competizione, mutazione, riproduzione, adattamento, selezione naturale, sopravvivenza ed estinzione, e li applica allo scopo di analizzare e interpretare i mercati finanziari, descrivendone in modo più realistico le dinamiche e i comportamenti degli investitori che operano in essi. Infatti, nonostante le ovvie differenze tra l’evoluzione negli ecosistemi biologici e l’evoluzione nei mercati finanziari, tra esse si possono riscontrare delle similitudini e utilizzarle per approfondire alcune tematiche, riferite anche ad applicazioni concrete di modelli di portafoglio e strategie di investimento. Secondo Lo, il processo decisionale-valutativo di un individuo non può essere determinato solo in modo analitico, poiché dipende da fattori contestuali, fra cui le forze della selezione naturale che agiscono per mezzo del fatto che le scelte si basano anche su esperienze ed accadimenti passati. Infatti, qualora il contesto di riferimento subisca delle modifiche, i comportamenti e meccanismi cognitivi consolidati potrebbero non essere più vantaggiosi e adeguati e l’individuo potrebbe manifestare alcune distorsioni temporali, definibili come azioni mosse da un processo decisionale “non intelligente”, piuttosto che “irrazionale”. Quando le aspettative e i ragionamenti cognitivi non si modificano e

adattano alle trasformazioni dell'ambiente, cioè del mercato, sarà probabile che le azioni attuate e le strategie intraprese saranno non ottimali e poco vantaggiose. Applicando concetti propri della corrente evoluzionistica, Lo fornisce un'interpretazione riguardo la discordanza tra le teoria delle ipotesi di mercato efficiente e i contrastanti risultati empirici. Le ipotesi di mercato adattivo sono una visione, in chiave evoluzionistica, che è alternativa e complementare a quella delle ipotesi di mercato efficiente: i concetti espressi in esse non annullano quelle proposte nella teoria classica, ma ne vogliono essere il completamento. Secondo la teoria delle AMH gli individui, intesi come operatori di mercato, pur agendo nel proprio interesse, commettono degli errori poiché non agiscono sempre con piena razionalità, specialmente in determinate situazioni in cui viene messa a rischio la loro permanenza nel mercato. Essi non sono individui pienamente razionali, come nell'accezione classica dell'efficienza, ma intelligenti: attuano processi decisionali prevalentemente con un'ottica di lungo periodo e, imparando continuamente dalle singole esperienze, hanno la capacità di adattarsi per competere con gli altri investitori. Infatti la competizione, nonché le relazioni e le interazioni tra individui, avviene perché nei mercati agiscono le forze della selezione naturale, che influenzano l'entrata e l'uscita degli investitori nel mercato e l'offerta di strumenti finanziari. L'adattamento avviene anche quando gli individui modificano le proprie aspettative, i processi decisionali e i comportamenti in base a come si evolve il sistema finanziario, nelle sue caratteristiche e dinamiche. Tutti i punti precedentemente descritti rappresentano, nel loro insieme, il processo evoluzionistico del mercato, nelle sue caratteristiche contestuali e dinamiche, e degli operatori. La teoria delle ipotesi di mercato adattivo si basa sostanzialmente in un paragone fra l'ecosistema biologico e il mercato finanziario. La quantità di risorse naturali limitate equivale finanziariamente alle risorse finanziarie, sotto forma di liquidità o valore degli strumenti finanziari in un mercato: in base all'utilizzo delle risorse si determinano le dinamiche competitive tra gli individui e le relative conseguenze (modifica degli asset finanziari, rafforzamento o perdita relativa all'investimento, uscita dal mercato dell'investitore, ...). Secondo la teoria AMH il mercato finanziario non converge mai ad un equilibrio stabile, ma esso continua il suo processo evolutivo, spesso caratterizzato dalla medesima ciclicità che distingue il sistema economico.

Il *framework* delle ipotesi di mercato adattivo non si esaurisce in un utilizzo di analisi qualitativa dei mercati finanziari, bensì esso apporta implicazioni anche di tipo empirico-quantitativo, soprattutto riguardanti l'attività dell'*investment* e *portfolio management*. Data la formalità logica e di immediata applicazione delle EMH esse sono state utilizzate come approssimazione e semplificazione delle caratteristiche dei mercati finanziari e come condizione e ipotesi per molti modelli quantitativi di *asset-pricing* e *asset allocation*. Tuttavia le innumerevoli strategie di investimento dipendono da moltissimi fattori come l'andamento del mercato, le condizioni aziendali e contrattuali in continuo cambiamento, il numero di investitori che entrano ed escono nel mercato, e il valore dei profitti reali e attesi. Più il mercato è eterogeneo, più le dinamiche che influenzano e modificano i fattori sopracitati saranno numerose e complesse. Inoltre, se si considerano anche gli aspetti comportamentali propri degli operatori del mercato e l'impatto che essi hanno nell'andamento generale di esso, la teoria delle ipotesi di mercato efficiente può non essere sufficientemente esaustiva nella descrizione delle dinamiche più volatili e instabili che si manifestano nei sistemi finanziari. L'approccio metodologico per derivare delle implicazioni pratiche dell'economia comportamentale e delle ipotesi di mercato adattivo è una combinazione in cui si analizzano in modo teorico le dinamiche evolutive, in modo empirico le forze evoluzionistiche e in modo sperimentale si indaga sull'attività decisionale degli investitori singoli e delle categorie all'interno dei mercati finanziari.

Il modello evoluzionistico sviluppato qualitativamente e quantitativamente da Brennan e Lo, è un esempio pratica in cui si mette in luce l'utilizzo e l'applicazione di concetti propri delle discipline biologiche e sociologiche. Il principale risultato qualitativo che emerge dalla simulazione del modello è che il processo evoluzionistico e le determinanti che fanno manifestare o meno certi fenotipi comportamentali, dipendono dalla relazione tra le caratteristiche biologiche dell'individuo e le caratteristiche ambientali dell'ecosistema; inoltre le forze della selezione naturale hanno il potere di plasmare gli aspetti più rilevanti del processo cognitivo e di selezione, individuale e collettivo. Per comprendere meglio il grado di intelligenza e di razionalità o irrazionalità di un individuo, è quindi più utile analizzare e focalizzare l'attenzione sul contesto in cui egli opera e come esso si è evoluto, piuttosto che le peculiarità che lo contraddistinguono. L'applicazione originale elaborata dall'autrice cerca di approfondire la spendibilità di

questo modello evuzionistico, modificandone alcuni aspetti analitici e soprattutto, fornendone un'interpretazione relativa agli aspetti principali e ai meccanismi che caratterizzano i mercati finanziari. Anche se con un modello analiticamente semplice, si è quindi dato prova del fatto che è possibile utilizzare modelli di tipo biologico (che si basano su concetti derivanti dagli stessi rami disciplinari e contestualizzati in ambito economico attraverso la teoria delle ipotesi di mercato adattivo) per analizzare e descrivere teorie, situazioni e processi propri delle scienze economiche e finanziarie. Ad esempio, basti pensare al recente metodo della PSO, la *particle swarm optimization*, nel ramo dei modelli di costruzione e gestione di portafogli (*portfolio management*), in cui titoli e strumenti finanziari sono rappresentati dalle particelle oggetto di studio. La PSO, cioè un procedimento in cui si ottiene un'ottimizzazione utilizzando gli "sciame di particelle", è un algoritmo ottimizzante che si rifà ad un metodo euristico di processi decisionali ottimizzanti, ispirato ai movimenti e traiettorie degli sciame osservati in natura. Un aspetto interessante, paragonabile ad alcuni aspetti approfonditi nel modello evuzionistico è che il problema di ottimizzazione attraverso la PSO prende come riferimento una popolazione costituita da particelle che si muovono in uno spazio secondo formule semplici. Inoltre, si considerano tre aspetti: la velocità di ciascuna particella (caratteristiche del singolo); le conoscenze dello spazio di fitness (intelligenza della popolazione in base all'esperienza); la conoscenza condivisa (la migliore scelta collettiva identificata). Queste tre componenti (inerzia, cognitiva e sociale) sono pesate dall'algoritmo che attraverso la computazione minimizza la probabilità che le particelle vengano intrappolate in uno spazio minimo.

Il modello evuzionistico proposto in questo lavoro può essere sicuramente perfezionato ed ampliato, soprattutto ponendo condizioni contestuali variabili che lo renderebbero ancora più realistico. Si potrebbe assumere che le condizioni ambientali siano variabili nel tempo, che ci sia una mutazione genetica (ad esempio riferita al successo riproduttivo) casualmente distribuita tra le proli consecutive, e che una singola generazione, associata ad un periodo temporale, possa riprodursi più di una volta. Tutte queste modifiche ed estensioni rispecchiano in modo più realistico le complessità comportamentali che si osservano negli individui e nei mercati finanziari, e apporterebbero delle analisi sui rischi sistematici e idiosincratichi più perfezionate. Inoltre, apportando opportune modifiche e adattamenti, la teoria delle ipotesi di mercato

adattivo e un modello evolucionistico di interpretazione e analisi dei dati, potrebbero essere applicati anche nel ramo della microeconomia, in particolare alle teorie dell'utilità attesa e del consumatore. Nella loro accezione classica, anche nei modelli riferiti a queste tematiche rientra come condizione e ipotesi di base la razionalità nelle aspettative e nelle scelte dell'individuo. Parallelamente agli sviluppi ed elaborazioni di modelli finanziari, ulteriori spunti di ricerca sull'argomento delle AMH possono essere rappresentati dalla loro applicazione nei modelli microeconomici che descrivono processi decisionali dell'individuo. Poiché il processo decisionale di un essere umano non può essere paragonato e trattato empiricamente allo stesso modo in cui si tratta il processo produttivo effettuato da un macchinario, una visione alternativa, che consideri anche aspetti di economia comportamentale e di sociobiologia, come può essere l'approccio evolucionistico/adattivo delle AMH, potrebbe ampliare le teorie esistenti, apportare dei miglioramenti analitici e descrittivi di alcune teorie o modelli e offrire spunti interessanti per ipotetici sviluppi futuri della materia in questa direzione.

Per concludere questo elaborato, si riporta di seguito la parte finale di un articolo di ricerca di A. Lo pubblicato in occasione del 30° anniversario del "The Journal of Portfolio Management" [2004]:

«There are many other practical insights and potential breakthroughs that can be derived from the AMH as we shift our mode of thinking in financial economics from the physical to the biological sciences. Although evolutionary ideas are not yet part of the financial mainstream, my hope is that they will become more commonplace as they demonstrate their worth. No one has illustrated this principle so well as Harry Markowitz, the father of modern portfolio theory and a Nobel laureate in economics in 1990s. In describing his experience as a Ph.D. student on the eve of his graduation, he wrote in his Nobel address:

When I defended my dissertation as a student in the Economics Department of the University of Chicago, Professor Milton Friedman argued that portfolio theory was not Economics, and that they could not award me a Ph.D. degree in Economics for a dissertation which was not Economics. I assume that he was only half serious, since they did award me the degree without long debate. As to the merits of his arguments, at this point I am quite willing to concede: at the time I defended my dissertation, portfolio theory was not part of Economics. But now it is [1991, p. 476].

Perhaps over the next 30 years, the *Journal of Portfolio Management* will also bear witness to the relevance of the Adaptive Markets Hypothesis for financial markets and economics.»

## APPENDICE A) Dimostrazione dell'espressione (9) cap. 3

Partendo dalle condizioni:

$$\begin{aligned} \text{Probabilità } (x_a = c_{a1}, x_b = c_{b1}) &= p \in [0, 1] \\ \text{Probabilità } (x_a = c_{a2}, x_b = c_{b2}) &= 1 - p \equiv q \end{aligned} \quad (8)$$

e definendo il tasso di fecondità relativo come dato il rapporto fra le quantità della progenie apportate dall'azione  $a$  e  $b$  (per due situazioni ambientali sole e pioggia:  $j = 1, 2$ ) si avrà:  $r_1 \equiv c_{a1}/c_{b1}$  e  $r_2 \equiv c_{a2}/c_{b2}$ . I valori di  $f$  che massimizzano il tasso di crescita della popolazione saranno rappresentati dalla seguente tripartizione:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \frac{p}{1 - \frac{c_{a2}}{c_{b2}}} + \frac{q}{1 - \frac{c_{a1}}{c_{b1}}} \\ 0 \end{array} \right. \text{ se } \left\{ \begin{array}{l} \frac{c_{a2}}{c_{b2}} \geq q + \frac{pq}{\frac{c_{a1}}{c_{b1}} - p} \text{ e } r_1 > p \\ \frac{1}{q} - \frac{p c_{a1}}{q c_{b1}} < \frac{c_{a2}}{c_{b2}} < q + \frac{pq}{\frac{c_{a1}}{c_{b1}} - p} \text{ e } \frac{c_{a1}}{c_{b1}} > p; \frac{c_{a2}}{c_{b2}} > \frac{1}{q} - \frac{p c_{a1}}{q c_{b1}} \text{ e } \frac{c_{a1}}{c_{b1}} \leq p \\ 0 \leq \frac{c_{a2}}{c_{b2}} \leq \frac{1}{q} - \frac{p c_{a1}}{q c_{b1}} \end{array} \right.$$

Sostituendo a  $c_{a1}/c_{b1}$  il valore  $r_1$  e a  $c_{a2}/c_{b2}$  il valore  $r_2$  nella precedente equazione e definendo gli intervalli attraverso le parentesi, si ricava l'espressione finale (9):

$$f^* = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \frac{p}{1 - r_2} + \frac{q}{1 - r_1} \\ 0 \end{array} \right. \text{ se } \left\{ \begin{array}{l} r_2 \in \left[ q + \frac{pq}{r_1 - p}, \infty \right) \text{ e } r_1 > p \\ r_2 \in \left( \frac{1}{q} - \frac{p}{q} r_1, q + \frac{pq}{r_1 - p} \right) \text{ e } r_1 > p; r_2 \in \left( \frac{1}{q} - \frac{p}{q} r_1, \infty \right) \text{ e } r_1 \leq p \\ r_2 \in \left[ 0, \frac{1}{q} - \frac{p}{q} r_1 \right] \end{array} \right.$$



## APPENDICE B) Codici Matlab per la simulazione del modello

### Prima formulazione del codice del modello

```
f=0.75 %proporzione di individui che costruisce in valle (valore che
si varia per ogni computazioni)
T=35 %periodi, generazioni della popolazione

n=zeros(T,1) %vettore contenente la numerosità di ogni generazione
n(1)=10 %numerosità degli individui della generazione iniziale

xv1=3 %individuo v che effettua la scelta a (valle), quando c'è il
sole (1), genera 3 persone
xp2=3 %individuo p che effettua la scelta b (altopiano), quando c'è
pioggia (2), genera 3 persone
xv2=0 %individuo v che effettua la scelta a (valle), quando c'è
pioggia (2), genera 0 persone
xp1=0 %individuo p che effettua la scelta b (altopiano), quando c'è il
sole (1), genera 0 persone

p=0.75 %probabilità fissa che si verifichi un giorno soleggiato

r=zeros(T,1) %vettore che genera il tempo meteorologico per 35 periodi
t=zeros(n(1),1) %vettore che genera gli individui della generazione
che si riproduce differenziandoli in base a dove costruiscono

for i=1:T
r(i) = binornd(1,p); %vettore di outcome (pioggia (0) o sole (1)) in
base alla probabilità p
end

for k=1:T
if (n(k)>0)
for i=1:n(k) %generazioni (i) da 1 a n(k) con k=1:35
t(i) = binornd(1,f); %vettore di outcome degli individui e
dove costruiscono (altopiano (0) o valle (1)) in base alla probabilità
f
end
n(k+1)=sum(t(i)*xv1*r(k) + (1-t(i))*xp2*(1-(r(k)))) %vettore
outcome della sommatoria che calcola la numerosità della generazione
successiva
end
end
```

Come si denota dalla sovra-riportata stesura del codice, in aggiunta ai comandi `for-end` che determinano una computazione dal parte del software sotto determinati vincoli imposti utilizzando la dicitura “for” (la traduzione di *for* sta a “per”), viene aggiunto anche il comando `if` (“se”). Tale scelta è obbligata, poiché in mancanza di questo accorgimento, il programma genererebbe una numerosità positiva per una determinata generazione  $t + 1$ , anche se precedentemente si verificasse l’estinzione della

popolazione (cioè  $n_t = 0$ ); affinché il programma non commetta questo errore, che rappresenta una situazione irrealistica da un punto di vista biologico, si è aggiunta la scrittura: `if (n(k)>0)` con  $k: 1:T$ .

## Formulazione ottimizzata del codice del modello

```
f=0.55 %proporzione di individui che costruisce in valle (valore che
si varia per ogni computazione)% proporzione in valley
T=35 %periodi, generazioni della popolazione

n=zeros(T,1) %vettore contenente la numerosità di ogni generazione
n(1)=10 %numerosità degli individui della generazione iniziale

xv1=3 %individuo v che effettua la scelta a (valle), quando c'è il
sole (1), genera 3 persone
xp2=3 %individuo p che effettua la scelta b (altopiano), quando c'è
pioggia (2), genera 3 persone
xv2=0 %individuo v che effettua la scelta a (valle), quando c'è
pioggia (2), genera 0 persone
xp1=0 %individuo p che effettua la scelta b (altopiano), quando c'è il
sole (1), genera 0 persone

p=0.75 %probabilità fissa che si verifichi un giorno soleggiato

r=zeros(T,1) %vettore che genera il tempo meteorologico per 35 periodi
t=zeros(T,1) %vettore che genera gli individui delle generazioni T che
costruiscono in valle

tic

for i=1:T
r(i) = binornd(1,p); %vettore di outcome (pioggia (0) o sole (1)) in
base alla probabilità p
end

for k=1:T
    if (n(k)>0)
        t(k) = binornd(n(k),f); %vettore di outcome degli individui
generati e dove costruiscono (altopiano (0) o valle (1)) in base alla
probabilità f
        n(k+1)=t(k)*xv1*r(k) + (n(k)-t(k))*xp2*(1-(r(k))) %vettore
outcome che calcola la numerosità della generazione
    end
end

toc
```

Il comando `tic-toc` è stato aggiunto per determinare e apprendere dall'outcome finale anche il tempo utilizzato dal computer per l'intera computazione.

## Codice per riprodurre il grafico cromatico in Figura 4.2

```
p=0.75
q=1-p
dim=99

startValue =0;
endValue = 3;
nElements = dim;
r1 = linspace(startValue,endValue,nElements);
r1=r1.'
r2=r1
ris=zeros(dim,dim)

for i=1:dim
    for j=1:dim
        if (r2(j)>((q+p*q)/(r1(i)-p))) & (r1(i)>p)
            ris(i,j)=1
        end
        if ( (r2(j)>(1/q -p*r1(i)/q)) & (r2(j)<q+p*q/(r1(i)-p)) &
(r1(i)>p) ) | ( (r2(j)>1/q -p*r1(i)/q) & (r1(i)<=p) )
            ris(i,j)=p/(1-r2(j)) + q/(1-r1(i))
        end
    end
end

csvwrite('matrice.csv',ris) (La matrice outcome è quella rappresentata inAppendice D)
```

## Codice per la cromaticità del grafico (v. Figura 4.1):

```
surf(ris)
imagesc(ris); %colori
axis image;
colormap(jet);
caxis([0,1]);
colorbar;
set(gca,'YDir','normal')
%axis([0,4,0,4])
```

## **APPENDICE C) Dati outcome delle simulazioni del modello in Matlab**

In questa appendice si allegano le tabelle contenenti i dati outcome delle simulazioni del modello in Matlab (v. *infra* 4.2); le simulazioni complete, che hanno reso possibile la data analysis e l'interpretazione del modello evuzionistico. Vi sono due tipologie di tabelle: quelle che contengono l'evoluzione generazionale della numerosità della popolazione nelle sue 36 proli, per ogni valore associato alla probabilità  $f$  (totale 21 valori con  $f \in [0,1]$ ) e quella in cui si riportano i valori dei vettori simulati  $r(i)$ , vettore del tempo meteorologico (1=sole, 0=pioggia) e  $t(k)$ , vettore che simula la quantità di individui che costruisce la propria abitazione a valle (cioè in base alla probabilità  $f$ ). Le due simulazioni vengono fatte due popolazioni diversificate in base al numero di individui iniziale, cioè  $n(1) = 10$  e  $20$  (entrambi con un successo riproduttivo  $xv1, xp2 = 3$ , o, in caso negativo,  $0$ ). Inoltre, per il fenotipo ottimale  $f^* = 0.55$  per la simulazione dell'evoluzione generazionale della popolazione con  $n(1) = 10$ , vengono riportati i dati relativi alle 15 computazioni continue (sia della numerosità della specie, sia per i due vettori simulati). Nella tabella con i dati delle numerosità delle proli nei vari 36 periodi, nell'ultima riga si legge il cosiddetto *elapsed time*, cioè il tempo impiegato dalla macchina, attraverso il software Matlab, per la computazione.

Per comprendere meglio il criterio logico di esposizione delle tabelle si faccia riferimento al seguente elenco:

- Tabelle A.1, A.2, A.3, A.4, A.5: fanno riferimento alla simulazione del modello per la popolazione con  $n(1) = 10$  (le prime due tabelle contengono la numerosità della popolazione, le successive tre contengono i dati dei vettori  $r(i)$  e  $t(k)$ );
- Tabelle B.1, B.2, B.3: contengono le simulazioni dei 15 shot computazionali per il fenotipo ottimale  $f^* = 0.55$  per la simulazione generazionale della popolazione con  $n(1) = 10$ ;
- Tabelle C.1, C.2, C.3, C.4, C.5: fanno riferimento alla simulazione del modello per la popolazione con  $n(1) = 20$  (le prime due tabelle contengono la numerosità della popolazione, le successive tre contengono i dati dei vettori  $r(i)$  e  $t(k)$ ).

Tabella A.1

| Generazione  | f=0        | f=0.05     | f=0.10     | f=0.15     | f=0.20     | f=0.25     | f=0.30     | f=0.35     | f=0.40     | f=0.45     | f=0.50     |
|--------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1            | 10         | 10         | 10         | 10         | 10         | 10         | 10         | 10         | 10         | 10         | 10         |
| 2            | 30         | 27         | 27         | 27         | 24         | 24         | 24         | 21         | 18         | 15         | 15         |
| 3            | 90         | 81         | 81         | 72         | 60         | 57         | 51         | 45         | 36         | 27         | 21         |
| 4            | 0          | 9          | 27         | 36         | 39         | 42         | 51         | 54         | 45         | 33         | 33         |
| 5            | 0          | 27         | 69         | 81         | 84         | 81         | 90         | 93         | 75         | 54         | 54         |
| 6            | 0          | 6          | 9          | 18         | 42         | 63         | 78         | 96         | 102        | 96         | 99         |
| 7            | 0          | 0          | 0          | 9          | 24         | 48         | 72         | 93         | 111        | 135        | 162        |
| 8            | 0          | 0          | 0          | 3          | 18         | 36         | 66         | 105        | 135        | 180        | 249        |
| 9            | 0          | 0          | 0          | 0          | 21         | 24         | 63         | 96         | 150        | 234        | 354        |
| 10           | 0          | 0          | 0          | 0          | 54         | 54         | 150        | 210        | 288        | 393        | 495        |
| 11           | 0          | 0          | 0          | 0          | 120        | 123        | 318        | 363        | 474        | 630        | 789        |
| 12           | 0          | 0          | 0          | 0          | 57         | 75         | 333        | 375        | 519        | 846        | 1,134      |
| 13           | 0          | 0          | 0          | 0          | 147        | 162        | 747        | 765        | 939        | 1,425      | 1,746      |
| 14           | 0          | 0          | 0          | 0          | 333        | 330        | 1,611      | 1,515      | 1,776      | 2,472      | 2,664      |
| 15           | 0          | 0          | 0          | 0          | 249        | 261        | 1,389      | 1,473      | 2,094      | 3,411      | 4,026      |
| 16           | 0          | 0          | 0          | 0          | 633        | 648        | 2,901      | 2,856      | 3,678      | 5,604      | 6,012      |
| 17           | 0          | 0          | 0          | 0          | 387        | 486        | 2,640      | 3,084      | 4,491      | 7,641      | 8,949      |
| 18           | 0          | 0          | 0          | 0          | 198        | 348        | 2,427      | 3,255      | 5,463      | 10,437     | 13,500     |
| 19           | 0          | 0          | 0          | 0          | 474        | 789        | 5,085      | 6,237      | 17,241     | 30,331     | 37,425     |
| 20           | 0          | 0          | 0          | 0          | 1,161      | 1,836      | 10,662     | 12,147     | 17,481     | 28,377     | 30,129     |
| 21           | 0          | 0          | 0          | 0          | 2,829      | 4,107      | 22,128     | 23,718     | 31,479     | 46,728     | 45,495     |
| 22           | 0          | 0          | 0          | 0          | 1,677      | 3,174      | 19,836     | 25,083     | 37,920     | 63,117     | 68,190     |
| 23           | 0          | 0          | 0          | 0          | 1,071      | 2,313      | 18,069     | 26,316     | 45,405     | 84,837     | 101,745    |
| 24           | 0          | 0          | 0          | 0          | 2,523      | 5,157      | 38,196     | 51,336     | 81,780     | 139,740    | 152,310    |
| 25           | 0          | 0          | 0          | 0          | 6,117      | 11,529     | 80,160     | 100,128    | 147,336    | 229,398    | 228,288    |
| 26           | 0          | 0          | 0          | 0          | 3,711      | 8,673      | 72,441     | 104,802    | 177,666    | 307,824    | 341,619    |
| 27           | 0          | 0          | 0          | 0          | 8,928      | 19,569     | 152,589    | 204,381    | 320,706    | 508,146    | 512,811    |
| 28           | 0          | 0          | 0          | 0          | 5,457      | 15,069     | 137,109    | 213,636    | 384,117    | 685,386    | 768,039    |
| 29           | 0          | 0          | 0          | 0          | 3,267      | 11,211     | 122,712    | 223,590    | 460,518    | 924,912    | 1,152,129  |
| 30           | 0          | 0          | 0          | 0          | 1,917      | 8,268      | 109,635    | 234,369    | 553,179    | 1,249,872  | 1,729,506  |
| 31           | 0          | 0          | 0          | 0          | 1,194      | 6,132      | 98,043     | 245,775    | 662,688    | 1,687,257  | 2,593,929  |
| 32           | 0          | 0          | 0          | 0          | 684        | 4,605      | 88,524     | 258,738    | 796,131    | 2,279,808  | 3,890,646  |
| 33           | 0          | 0          | 0          | 0          | 390        | 3,543      | 79,347     | 271,908    | 956,013    | 3,079,608  | 5,838,813  |
| 34           | 0          | 0          | 0          | 0          | 213        | 2,532      | 71,643     | 285,129    | 1,145,346  | 4,156,707  | 8,759,127  |
| 35           | 0          | 0          | 0          | 0          | 129        | 1,815      | 64,521     | 299,199    | 1,376,514  | 5,618,430  | 13,138,836 |
| 36           | 0          | 0          | 0          | 0          | 90         | 1,347      | 57,717     | 315,183    | 1,651,578  | 7,581,021  | 19,698,423 |
| elapsed time | 0.001261 s | 0.013783 s | 0.013959 s | 0.011931 s | 0.029659 s | 0.016759 s | 0.059314 s | 0.094675 s | 0.188735 s | 0.485923 s | 0.822465 s |

Tabella A.2

| Generazione         | f=0.55     | f=0.60     | f=0.65     | f=0.70     | f=0.75     | f=0.80     | f=0.85     | f=0.90     | f=0.95     | f=1        |
|---------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1                   | 10         | 10         | 10         | 10         | 10         | 10         | 10         | 10         | 10         | 10         |
| 2                   | 15         | 15         | 15         | 12         | 12         | 6          | 3          | 3          | 3          | 0          |
| 3                   | 21         | 18         | 15         | 9          | 6          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 4                   | 39         | 33         | 24         | 18         | 15         | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 5                   | 51         | 36         | 18         | 12         | 15         | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 6                   | 102        | 72         | 36         | 21         | 33         | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 7                   | 186        | 144        | 78         | 51         | 69         | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 8                   | 315        | 261        | 171        | 108        | 165        | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 9                   | 528        | 465        | 342        | 240        | 384        | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 10                  | 747        | 546        | 348        | 174        | 252        | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 11                  | 1,011      | 642        | 363        | 159        | 147        | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 12                  | 1,638      | 1,119      | 672        | 348        | 330        | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 13                  | 2,244      | 1,338      | 705        | 312        | 261        | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 14                  | 3,015      | 1,680      | 762        | 276        | 162        | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 15                  | 4,953      | 3,102      | 1,470      | 582        | 354        | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 16                  | 6,660      | 3,699      | 1,572      | 546        | 306        | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 17                  | 10,890     | 6,687      | 3,174      | 1,128      | 693        | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 18                  | 17,919     | 11,898     | 6,225      | 2,286      | 1,542      | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 19                  | 23,979     | 14,340     | 6,543      | 1,989      | 1,233      | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 20                  | 32,148     | 17,028     | 7,035      | 1,722      | 864        | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 21                  | 43,431     | 20,199     | 7,254      | 1,521      | 654        | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 22                  | 71,874     | 36,375     | 13,950     | 3,177      | 1,497      | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 23                  | 118,074    | 64,995     | 27,486     | 6,780      | 3,420      | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 24                  | 158,721    | 77,862     | 28,965     | 6,279      | 2,553      | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 25                  | 214,365    | 93,948     | 30,594     | 5,556      | 1,914      | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 26                  | 352,611    | 170,109    | 59,646     | 11,607     | 4,275      | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 27                  | 475,878    | 204,264    | 62,463     | 10,233     | 3,273      | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 28                  | 783,690    | 366,219    | 121,581    | 21,495     | 7,359      | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 29                  | 1,292,574  | 659,304    | 237,867    | 45,063     | 16,590     | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 30                  | 2,133,342  | 1,185,273  | 463,698    | 94,167     | 37,353     | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 31                  | 3,521,748  | 2,135,568  | 903,801    | 198,090    | 84,147     | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 32                  | 5,809,464  | 3,842,247  | 1,761,447  | 416,904    | 189,054    | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 33                  | 9,588,702  | 6,918,021  | 3,434,262  | 875,106    | 425,895    | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 34                  | 15,813,621 | 12,456,897 | 6,696,183  | 1,836,831  | 957,534    | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 35                  | 26,087,700 | 22,418,352 | 13,061,250 | 3,857,592  | 2,153,826  | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 36                  | 43,059,753 | 40,346,712 | 25,469,241 | 8,100,549  | 4,847,823  | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| <b>elapsed time</b> | 1.333046 s | 1.019273 s | 0.559019 s | 0.155149 s | 0.110012 s | 0.015584 s | 0.013270 s | 0.012142 s | 0.017290 s | 0.011826 s |

**Tabella A.3**

| Generazione | f=0 |   | f=0.05 |   | f=0.10 |   | f=0.15 |    | f=0.20 |       | f=0.25 |       | f=0.30 |        |        |
|-------------|-----|---|--------|---|--------|---|--------|----|--------|-------|--------|-------|--------|--------|--------|
|             | x   | t | x      | t | x      | t | x      | t  | x      | t     | x      | t     | x      | t      |        |
| 1           | 0   | 0 | 0      | 1 | 0      | 1 | 0      | 0  | 1      | 0     | 2      | 0     | 2      | 0      | 2      |
| 2           | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 3      | 0     | 4      | 0     | 5      | 0      | 7      |
| 3           | 1   | 0 | 1      | 3 | 1      | 9 | 1      | 12 | 1      | 13    | 1      | 14    | 1      | 17     |        |
| 4           | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 4 | 0      | 0  | 9      | 0     | 11     | 0     | 15     | 0      | 21     |
| 5           | 1   | 0 | 1      | 2 | 1      | 3 | 1      | 6  | 1      | 14    | 1      | 21    | 1      | 26     |        |
| 6           | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 3  | 1      | 8     | 1      | 16    | 1      | 24     |        |
| 7           | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 1  | 1      | 6     | 1      | 12    | 1      | 22     |        |
| 8           | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 7     | 1      | 8     | 1      | 21     |        |
| 9           | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 0     | 3      | 0     | 6      | 0      | 13     |
| 10          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 0     | 14     | 0     | 13     | 0      | 44     |
| 11          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 0      | 1     | 19     | 1     | 25     | 1      | 111    |
| 12          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 0     | 8      | 0     | 21     | 0      | 84     |
| 13          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 0     | 36     | 0     | 52     | 0      | 210    |
| 14          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 0      | 1     | 83     | 1     | 87     | 1      | 463    |
| 15          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 0     | 38     | 0     | 45     | 0      | 422    |
| 16          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 129   | 1      | 162   | 1      | 880    |        |
| 17          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 66    | 1      | 116   | 1      | 809    |        |
| 18          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 0     | 40     | 0     | 85     | 0      | 732    |
| 19          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 0     | 87     | 0     | 177    | 0      | 1,531  |
| 20          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 0     | 218    | 0     | 467    | 0      | 3,286  |
| 21          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 559   | 1      | 1,058 | 1      | 6,612  |        |
| 22          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 357   | 1      | 771   | 1      | 6,023  |        |
| 23          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 0     | 230    | 0     | 594    | 0      | 5,337  |
| 24          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 0     | 484    | 0     | 1,314  | 0      | 11,476 |
| 25          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 1,237 | 1      | 2,891 | 1      | 24,147 |        |
| 26          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 0     | 735    | 0     | 2,150  | 0      | 21,578 |
| 27          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 1,819 | 1      | 5,023 | 1      | 45,703 |        |
| 28          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 1,089 | 1      | 3,737 | 1      | 40,904 |        |
| 29          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 639   | 1      | 2,756 | 1      | 36,545 |        |
| 30          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 398   | 1      | 2,044 | 1      | 32,681 |        |
| 31          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 228   | 1      | 1,535 | 1      | 29,508 |        |
| 32          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 130   | 1      | 1,181 | 1      | 26,449 |        |
| 33          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 71    | 1      | 844   | 1      | 23,881 |        |
| 34          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 43    | 1      | 605   | 1      | 21,507 |        |
| 35          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 30    | 1      | 449   | 1      | 19,239 |        |

**Tabella A.4**

| Generazione | f=0.35 |         | f=0.40 |         | f=0.45 |           | f=0.50 |           | f=0.55 |            | f=0.60 |            | f=0.65 |           |
|-------------|--------|---------|--------|---------|--------|-----------|--------|-----------|--------|------------|--------|------------|--------|-----------|
|             | r      | t       | r      | t       | r      | t         | r      | t         | r      | t          | r      | t          | r      | t         |
| 1           | 0      | 3       | 0      | 4       | 0      | 5         | 0      | 5         | 0      | 5          | 0      | 5          | 0      | 5         |
| 2           | 0      | 6       | 0      | 6       | 0      | 6         | 0      | 8         | 0      | 8          | 0      | 9          | 0      | 10        |
| 3           | 1      | 18      | 1      | 15      | 1      | 11        | 1      | 11        | 1      | 13         | 1      | 11         | 1      | 8         |
| 4           | 0      | 23      | 0      | 20      | 0      | 15        | 0      | 15        | 0      | 22         | 0      | 21         | 0      | 18        |
| 5           | 1      | 32      | 1      | 34      | 1      | 32        | 1      | 33        | 1      | 34         | 1      | 24         | 1      | 12        |
| 6           | 1      | 31      | 1      | 37      | 1      | 45        | 1      | 54        | 1      | 62         | 1      | 48         | 1      | 26        |
| 7           | 1      | 35      | 1      | 45      | 1      | 60        | 1      | 83        | 1      | 105        | 1      | 87         | 1      | 57        |
| 8           | 1      | 32      | 1      | 50      | 1      | 78        | 1      | 118       | 1      | 176        | 1      | 155        | 1      | 114       |
| 9           | 0      | 26      | 0      | 54      | 0      | 103       | 0      | 189       | 0      | 279        | 0      | 283        | 0      | 226       |
| 10          | 0      | 89      | 0      | 130     | 0      | 183       | 0      | 232       | 0      | 410        | 0      | 332        | 0      | 227       |
| 11          | 1      | 125     | 1      | 173     | 1      | 282       | 1      | 378       | 1      | 546        | 1      | 373        | 1      | 224       |
| 12          | 0      | 120     | 0      | 206     | 0      | 371       | 0      | 552       | 0      | 890        | 0      | 673        | 0      | 437       |
| 13          | 0      | 260     | 0      | 347     | 0      | 601       | 0      | 858       | 0      | 1,239      | 0      | 778        | 0      | 451       |
| 14          | 1      | 491     | 1      | 698     | 1      | 1,137     | 1      | 1,342     | 1      | 1,651      | 1      | 1,034      | 1      | 490       |
| 15          | 0      | 521     | 0      | 868     | 0      | 1,543     | 0      | 2,022     | 0      | 2,733      | 0      | 1,869      | 0      | 946       |
| 16          | 1      | 1,028   | 1      | 1,497   | 1      | 2,547     | 1      | 2,983     | 1      | 3,630      | 1      | 2,229      | 1      | 1,058     |
| 17          | 1      | 1,085   | 1      | 1,821   | 1      | 3,479     | 1      | 4,500     | 1      | 5,973      | 1      | 3,966      | 1      | 2,075     |
| 18          | 0      | 1,176   | 0      | 2,188   | 0      | 4,690     | 0      | 6,723     | 0      | 9,926      | 0      | 7,118      | 0      | 4,044     |
| 19          | 0      | 2,188   | 0      | 3,998   | 0      | 7,782     | 0      | 10,288    | 0      | 13,263     | 0      | 8,664      | 0      | 4,198     |
| 20          | 0      | 4,241   | 0      | 6,988   | 0      | 12,801    | 0      | 14,964    | 0      | 17,671     | 0      | 10,295     | 0      | 4,617     |
| 21          | 1      | 8,361   | 1      | 12,640  | 1      | 21,039    | 1      | 22,730    | 1      | 23,958     | 1      | 12,125     | 1      | 4,650     |
| 22          | 1      | 8,772   | 1      | 15,135  | 1      | 28,279    | 1      | 33,915    | 1      | 39,358     | 1      | 21,665     | 1      | 9,162     |
| 23          | 0      | 9,204   | 0      | 18,145  | 0      | 38,257    | 0      | 50,975    | 0      | 65,167     | 0      | 39,041     | 0      | 17,831    |
| 24          | 0      | 17,960  | 0      | 32,668  | 0      | 63,274    | 0      | 76,214    | 0      | 87,266     | 0      | 46,546     | 0      | 18,767    |
| 25          | 1      | 34,934  | 1      | 59,222  | 1      | 102,608   | 1      | 113,873   | 1      | 117,537    | 1      | 56,703     | 1      | 19,882    |
| 26          | 0      | 36,675  | 0      | 70,764  | 0      | 138,442   | 0      | 170,662   | 0      | 193,985    | 0      | 102,021    | 0      | 38,825    |
| 27          | 1      | 71,212  | 1      | 128,039 | 1      | 228,462   | 1      | 256,013   | 1      | 261,230    | 1      | 122,073    | 1      | 40,527    |
| 28          | 1      | 74,530  | 1      | 153,506 | 1      | 308,304   | 1      | 384,043   | 1      | 430,858    | 1      | 219,768    | 1      | 79,289    |
| 29          | 1      | 78,123  | 1      | 184,393 | 1      | 416,624   | 1      | 576,502   | 1      | 711,114    | 1      | 395,091    | 1      | 154,566   |
| 30          | 1      | 81,925  | 1      | 220,896 | 1      | 562,419   | 1      | 864,643   | 1      | 1,173,916  | 1      | 711,856    | 1      | 301,267   |
| 31          | 1      | 86,246  | 1      | 265,377 | 1      | 759,936   | 1      | 1,296,882 | 1      | 1,936,488  | 1      | 1,280,749  | 1      | 587,149   |
| 32          | 1      | 90,636  | 1      | 318,671 | 1      | 1,026,536 | 1      | 1,946,271 | 1      | 3,196,234  | 1      | 2,306,007  | 1      | 1,144,754 |
| 33          | 1      | 95,043  | 1      | 381,782 | 1      | 1,385,569 | 1      | 2,919,709 | 1      | 5,271,207  | 1      | 4,152,299  | 1      | 2,232,061 |
| 34          | 1      | 99,733  | 1      | 458,838 | 1      | 1,872,810 | 1      | 4,379,612 | 1      | 8,695,900  | 1      | 7,472,784  | 1      | 4,353,750 |
| 35          | 1      | 105,061 | 1      | 550,526 | 1      | 2,527,007 | 1      | 6,566,141 | 1      | 14,353,251 | 1      | 13,448,904 | 1      | 8,489,747 |



Tabella A.5

| Generazione | f=0.70 |           | f=0.75 |           | f=0.80 |   | f=0.85 |   | f=0.90 |   | f=0.95 |   | f=1 |    |
|-------------|--------|-----------|--------|-----------|--------|---|--------|---|--------|---|--------|---|-----|----|
|             | x      | t         | x      | t         | x      | t | x      | t | x      | t | x      | t | x   | t  |
| 1           | 0      | 6         | 0      | 6         | 0      | 8 | 0      | 9 | 0      | 9 | 0      | 9 | 0   | 10 |
| 2           | 0      | 9         | 0      | 10        | 0      | 6 | 0      | 3 | 0      | 3 | 0      | 3 | 0   | 0  |
| 3           | 1      | 6         | 1      | 5         | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1   | 0  |
| 4           | 0      | 14        | 0      | 10        | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0   | 0  |
| 5           | 1      | 7         | 1      | 11        | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1   | 0  |
| 6           | 1      | 17        | 1      | 23        | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1   | 0  |
| 7           | 1      | 36        | 1      | 55        | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1   | 0  |
| 8           | 1      | 80        | 1      | 128       | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1   | 0  |
| 9           | 0      | 182       | 0      | 300       | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0   | 0  |
| 10          | 0      | 121       | 0      | 203       | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0   | 0  |
| 11          | 1      | 116       | 1      | 110       | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1   | 0  |
| 12          | 0      | 244       | 0      | 243       | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0   | 0  |
| 13          | 0      | 220       | 0      | 207       | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0   | 0  |
| 14          | 1      | 194       | 1      | 118       | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1   | 0  |
| 15          | 0      | 400       | 0      | 252       | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0   | 0  |
| 16          | 1      | 376       | 1      | 231       | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1   | 0  |
| 17          | 1      | 762       | 1      | 514       | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1   | 0  |
| 18          | 0      | 1,623     | 0      | 1,131     | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0   | 0  |
| 19          | 0      | 1,415     | 0      | 945       | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0   | 0  |
| 20          | 0      | 1,215     | 0      | 646       | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0   | 0  |
| 21          | 1      | 1,059     | 1      | 499       | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1   | 0  |
| 22          | 1      | 2,260     | 1      | 1,140     | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1   | 0  |
| 23          | 0      | 4,687     | 0      | 2,569     | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0   | 0  |
| 24          | 0      | 4,427     | 0      | 1,915     | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0   | 0  |
| 25          | 1      | 3,869     | 1      | 1,425     | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1   | 0  |
| 26          | 0      | 8,196     | 0      | 3,184     | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0   | 0  |
| 27          | 1      | 7,165     | 1      | 2,453     | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1   | 0  |
| 28          | 1      | 15,021    | 1      | 5,530     | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1   | 0  |
| 29          | 1      | 31,389    | 1      | 12,451    | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1   | 0  |
| 30          | 1      | 66,030    | 1      | 28,049    | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1   | 0  |
| 31          | 1      | 138,968   | 1      | 63,018    | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1   | 0  |
| 32          | 1      | 291,702   | 1      | 141,965   | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1   | 0  |
| 33          | 1      | 612,277   | 1      | 319,178   | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1   | 0  |
| 34          | 1      | 1,285,864 | 1      | 717,942   | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1   | 0  |
| 35          | 1      | 2,700,183 | 1      | 1,615,941 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1   | 0  |

**Tabella B.1**

| Generazione  | shot no.1  | shot no.2   | shot no.3   | shot no.4  | shot no.5   | shot no.6   | shot no.7  | shot no.8  | shot no.9   | shot no.10  | shot no.11 | shot no.12 | shot no.13 | shot no.14 | shot no.15  |
|--------------|------------|-------------|-------------|------------|-------------|-------------|------------|------------|-------------|-------------|------------|------------|------------|------------|-------------|
| 1            | 10         | 10          | 10          | 10         | 10          | 10          | 10         | 10         | 10          | 10          | 10         | 10         | 10         | 10         | 10          |
| 2            | 15         | 15          | 27          | 12         | 24          | 24          | 21         | 18         | 12          | 15          | 15         | 21         | 15         | 12         | 21          |
| 3            | 21         | 30          | 33          | 21         | 21          | 45          | 30         | 36         | 24          | 36          | 21         | 39         | 15         | 30         | 24          |
| 4            | 39         | 63          | 54          | 27         | 45          | 78          | 42         | 54         | 48          | 69          | 30         | 63         | 15         | 48         | 33          |
| 5            | 51         | 105         | 87          | 48         | 93          | 117         | 54         | 93         | 90          | 126         | 36         | 90         | 18         | 84         | 51          |
| 6            | 102        | 156         | 135         | 96         | 150         | 192         | 105        | 156        | 156         | 189         | 60         | 147        | 30         | 162        | 102         |
| 7            | 186        | 288         | 189         | 153        | 243         | 318         | 141        | 249        | 255         | 336         | 108        | 207        | 54         | 207        | 189         |
| 8            | 315        | 453         | 249         | 255        | 414         | 387         | 213        | 312        | 366         | 585         | 177        | 273        | 90         | 306        | 309         |
| 9            | 528        | 741         | 384         | 417        | 681         | 675         | 414        | 501        | 501         | 975         | 267        | 447        | 165        | 465        | 501         |
| 10           | 747        | 1,176       | 630         | 639        | 1,062       | 1,173       | 723        | 708        | 843         | 1,308       | 504        | 603        | 222        | 732        | 849         |
| 11           | 1,011      | 1,569       | 810         | 792        | 1,767       | 1,662       | 972        | 1,149      | 1,320       | 2,142       | 618        | 978        | 375        | 1,194      | 1,419       |
| 12           | 1,638      | 2,451       | 1,338       | 1,104      | 2,445       | 2,703       | 1,572      | 1,980      | 1,863       | 2,784       | 1,017      | 1,335      | 666        | 1,644      | 2,421       |
| 13           | 2,244      | 3,897       | 2,133       | 1,728      | 4,113       | 3,732       | 2,562      | 3,288      | 3,216       | 4,626       | 1,677      | 2,118      | 813        | 2,688      | 3,885       |
| 14           | 3,015      | 6,474       | 3,390       | 2,919      | 6,705       | 6,234       | 3,825      | 5,466      | 5,271       | 6,204       | 2,727      | 2,883      | 1,308      | 4,488      | 6,498       |
| 15           | 4,953      | 10,719      | 4,641       | 4,776      | 9,141       | 8,580       | 4,653      | 8,970      | 8,754       | 10,143      | 4,515      | 4,824      | 2,226      | 5,922      | 10,737      |
| 16           | 6,660      | 17,769      | 7,584       | 7,827      | 15,003      | 14,079      | 7,644      | 14,961     | 11,817      | 16,773      | 6,072      | 7,872      | 3,807      | 7,857      | 17,682      |
| 17           | 10,890     | 29,157      | 12,501      | 12,846     | 24,903      | 23,127      | 12,492     | 20,148     | 19,455      | 22,434      | 10,047     | 10,689     | 6,348      | 13,077     | 29,385      |
| 18           | 17,919     | 39,333      | 20,346      | 21,129     | 41,133      | 31,191      | 20,877     | 33,534     | 32,424      | 36,897      | 16,374     | 17,649     | 10,431     | 21,666     | 39,879      |
| 19           | 23,979     | 65,466      | 33,303      | 34,947     | 67,941      | 51,738      | 34,536     | 45,037     | 53,271      | 61,083      | 27,129     | 29,166     | 17,121     | 35,484     | 53,736      |
| 20           | 32,148     | 107,892     | 54,981      | 47,277     | 112,512     | 85,194      | 57,177     | 74,031     | 87,624      | 100,710     | 44,820     | 48,210     | 28,038     | 58,116     | 72,756      |
| 21           | 43,431     | 145,917     | 90,687      | 78,126     | 185,547     | 140,493     | 76,710     | 99,696     | 144,435     | 166,167     | 74,184     | 79,398     | 38,019     | 96,309     | 120,537     |
| 22           | 71,874     | 240,963     | 150,357     | 128,757    | 304,947     | 232,035     | 127,209    | 164,436    | 238,206     | 274,734     | 122,919    | 108,108    | 62,682     | 159,087    | 199,167     |
| 23           | 118,074    | 397,098     | 248,550     | 174,588    | 503,301     | 383,310     | 209,733    | 222,600    | 321,108     | 453,393     | 203,076    | 145,845    | 84,132     | 262,320    | 328,386     |
| 24           | 158,721    | 536,685     | 411,117     | 288,306    | 832,137     | 634,002     | 282,849    | 365,742    | 529,356     | 747,246     | 273,606    | 197,073    | 114,129    | 354,381    | 539,577     |
| 25           | 214,365    | 883,275     | 677,538     | 474,714    | 1,124,850   | 1,044,807   | 380,997    | 603,729    | 872,151     | 1,232,466   | 451,464    | 266,337    | 189,117    | 585,636    | 889,890     |
| 26           | 352,611    | 1,455,396   | 914,223     | 640,812    | 1,855,134   | 1,722,684   | 629,028    | 815,211    | 1,178,742   | 2,035,158   | 745,164    | 439,026    | 312,351    | 965,166    | 1,203,024   |
| 27           | 475,878    | 1,963,986   | 1,509,894   | 1,058,403  | 3,060,690   | 2,841,960   | 1,036,980  | 1,101,345  | 1,946,385   | 3,361,236   | 1,230,165  | 725,841    | 514,761    | 1,594,491  | 1,984,647   |
| 28           | 783,690    | 3,240,069   | 2,491,755   | 1,744,020  | 5,050,854   | 4,685,628   | 1,712,433  | 1,818,786  | 2,629,761   | 5,547,057   | 2,030,661  | 1,196,343  | 850,359    | 2,632,230  | 2,678,229   |
| 29           | 1,292,574  | 5,350,071   | 4,112,328   | 2,881,182  | 8,333,238   | 7,728,471   | 2,823,453  | 2,999,424  | 4,339,176   | 9,155,460   | 2,741,415  | 1,616,031  | 1,401,405  | 4,343,985  | 4,419,120   |
| 30           | 2,133,342  | 8,824,608   | 6,779,307   | 4,754,016  | 13,752,162  | 12,755,937  | 3,819,231  | 4,954,419  | 7,160,508   | 12,362,757  | 3,703,548  | 2,664,627  | 2,313,156  | 7,165,416  | 7,289,754   |
| 31           | 3,521,748  | 14,567,553  | 11,186,013  | 6,413,037  | 22,689,159  | 21,045,240  | 6,301,485  | 8,172,939  | 9,670,107   | 16,692,129  | 6,114,039  | 4,401,285  | 3,820,902  | 11,820,609 | 12,033,683  |
| 32           | 5,809,464  | 24,041,427  | 18,460,926  | 10,578,894 | 30,624,096  | 28,406,955  | 10,392,906 | 11,029,974 | 15,953,247  | 27,537,423  | 8,253,810  | 7,264,032  | 5,155,215  | 19,511,862 | 19,850,565  |
| 33           | 9,588,702  | 39,677,259  | 30,457,344  | 17,464,407 | 50,535,507  | 46,863,558  | 17,146,164 | 18,202,065 | 26,309,232  | 45,439,203  | 11,134,626 | 9,809,325  | 8,506,992  | 32,204,328 | 32,761,566  |
| 34           | 15,813,621 | 65,455,395  | 50,251,347  | 23,582,826 | 83,375,733  | 63,254,289  | 28,279,788 | 24,574,848 | 43,411,590  | 61,346,061  | 18,382,521 | 13,240,131 | 14,035,572 | 43,480,800 | 54,058,524  |
| 35           | 26,087,700 | 88,330,809  | 82,917,342  | 38,899,800 | 112,565,892 | 104,375,046 | 46,671,909 | 40,534,455 | 71,633,622  | 101,224,279 | 30,320,562 | 21,835,626 | 23,155,422 | 71,751,663 | 89,175,114  |
| 36           | 43,059,753 | 145,747,605 | 136,809,816 | 52,518,138 | 185,755,830 | 172,216,029 | 77,009,760 | 66,884,460 | 118,195,851 | 167,009,770 | 50,019,306 | 36,035,202 | 31,261,200 | 96,855,630 | 147,170,241 |
| elapsed time | 1.368757 s | 4.952480 s  | 3.954530 s  | 2.081406 s | 6.383044 s  | 5.554200 s  | 2.298527 s | 2.191608 s | 3.542721 s  | 5.423325 s  | 1.630521 s | 1.227338 s | 1.177070 s | 3.758766 s | 4.290895 s  |

Tabella B.2

| Generazione | shot no.1 |            | shot no.2 |            | shot no.3 |            | shot no.4 |            | shot no.5 |            | shot no.6 |            | shot no.7 |              | shot no.8 |            |
|-------------|-----------|------------|-----------|------------|-----------|------------|-----------|------------|-----------|------------|-----------|------------|-----------|--------------|-----------|------------|
|             | x         | t          | x         | t          | x         | t          | x         | t          | x         | t          | x         | t          | x         | t            | x         | t          |
| 1           | 0         | 5          | 0         | 5          | 1         | 9          | 0         | 6          | 1         | 4          | 1         | 8          | 1         | 7            | 1         | 6          |
| 2           | 0         | 8          | 1         | 10         | 1         | 11         | 1         | 7          | 1         | 7          | 0         | 9          | 1         | 10           | 1         | 12         |
| 3           | 1         | 13         | 1         | 21         | 0         | 15         | 1         | 9          | 1         | 15         | 1         | 26         | 1         | 14           | 1         | 18         |
| 4           | 0         | 22         | 0         | 28         | 1         | 29         | 1         | 16         | 1         | 31         | 1         | 39         | 0         | 24           | 1         | 31         |
| 5           | 1         | 34         | 1         | 52         | 1         | 45         | 1         | 32         | 1         | 50         | 1         | 64         | 1         | 35           | 1         | 52         |
| 6           | 1         | 62         | 1         | 96         | 0         | 72         | 0         | 45         | 1         | 81         | 1         | 106        | 0         | 58           | 1         | 83         |
| 7           | 1         | 105        | 1         | 151        | 0         | 106        | 1         | 85         | 1         | 138        | 0         | 138        | 1         | 71           | 0         | 145        |
| 8           | 1         | 176        | 1         | 247        | 1         | 128        | 1         | 139        | 1         | 227        | 1         | 225        | 1         | 138          | 1         | 167        |
| 9           | 0         | 279        | 1         | 392        | 1         | 210        | 1         | 213        | 1         | 354        | 1         | 391        | 1         | 241          | 0         | 265        |
| 10          | 0         | 410        | 0         | 653        | 0         | 360        | 0         | 375        | 1         | 589        | 0         | 619        | 0         | 399          | 1         | 393        |
| 11          | 1         | 546        | 1         | 817        | 1         | 446        | 0         | 424        | 0         | 952        | 1         | 901        | 1         | 524          | 1         | 660        |
| 12          | 0         | 890        | 1         | 1,239      | 1         | 711        | 1         | 576        | 1         | 1,371      | 0         | 1,459      | 1         | 854          | 1         | 1,096      |
| 13          | 0         | 1,239      | 1         | 2,158      | 1         | 1,130      | 1         | 973        | 1         | 2,235      | 1         | 2,078      | 0         | 1,387        | 1         | 1,822      |
| 14          | 1         | 1,651      | 1         | 3,573      | 0         | 1,843      | 1         | 1,592      | 0         | 3,658      | 0         | 3,374      | 0         | 1,974        | 1         | 2,990      |
| 15          | 0         | 2,733      | 1         | 5,923      | 1         | 2,528      | 1         | 2,609      | 1         | 5,001      | 1         | 4,693      | 1         | 2,548        | 1         | 4,987      |
| 16          | 1         | 3,630      | 1         | 9,719      | 1         | 4,167      | 1         | 4,282      | 1         | 8,301      | 1         | 7,709      | 1         | 4,164        | 0         | 8,245      |
| 17          | 1         | 5,973      | 0         | 16,046     | 1         | 6,782      | 1         | 7,043      | 1         | 13,711     | 0         | 12,730     | 1         | 6,959        | 1         | 11,178     |
| 18          | 0         | 9,926      | 1         | 21,822     | 1         | 11,101     | 1         | 11,649     | 1         | 22,647     | 1         | 17,246     | 1         | 11,512       | 0         | 18,505     |
| 19          | 0         | 13,263     | 1         | 35,964     | 1         | 18,327     | 0         | 19,188     | 1         | 37,504     | 1         | 28,398     | 1         | 19,059       | 1         | 24,677     |
| 20          | 0         | 17,671     | 0         | 59,253     | 1         | 30,229     | 1         | 26,042     | 1         | 61,849     | 1         | 46,831     | 0         | 31,607       | 0         | 40,799     |
| 21          | 1         | 23,958     | 1         | 80,321     | 1         | 50,119     | 1         | 42,919     | 1         | 101,649    | 1         | 77,345     | 1         | 42,403       | 1         | 54,812     |
| 22          | 1         | 39,358     | 1         | 132,366    | 1         | 82,850     | 0         | 70,561     | 1         | 167,767    | 1         | 127,770    | 1         | 69,911       | 0         | 90,236     |
| 23          | 0         | 65,167     | 0         | 218,203    | 1         | 137,039    | 1         | 96,102     | 1         | 277,379    | 1         | 211,334    | 0         | 115,450      | 1         | 121,914    |
| 24          | 0         | 87,266     | 1         | 294,425    | 1         | 225,846    | 1         | 158,238    | 0         | 457,187    | 1         | 348,289    | 0         | 155,850      | 1         | 201,243    |
| 25          | 1         | 117,537    | 1         | 485,132    | 0         | 372,797    | 0         | 261,110    | 1         | 618,378    | 1         | 574,228    | 1         | 209,676      | 0         | 331,992    |
| 26          | 0         | 193,985    | 0         | 800,734    | 1         | 503,298    | 1         | 352,801    | 1         | 1,020,230  | 1         | 947,320    | 1         | 345,660      | 0         | 448,096    |
| 27          | 1         | 261,230    | 1         | 1,080,033  | 1         | 830,585    | 1         | 581,340    | 1         | 1,683,618  | 1         | 1,561,876  | 1         | 570,811      | 1         | 606,282    |
| 28          | 1         | 430,858    | 1         | 1,783,357  | 1         | 1,370,776  | 1         | 960,394    | 1         | 2,777,746  | 1         | 2,576,157  | 1         | 941,151      | 1         | 999,808    |
| 29          | 1         | 711,114    | 1         | 2,941,536  | 1         | 2,259,769  | 1         | 1,584,672  | 1         | 4,584,054  | 1         | 4,251,979  | 0         | 1,550,376    | 1         | 1,651,473  |
| 30          | 1         | 1,173,916  | 1         | 4,855,851  | 1         | 3,728,671  | 0         | 2,616,337  | 1         | 7,563,053  | 1         | 7,015,080  | 1         | 2,100,495    | 1         | 2,724,313  |
| 31          | 1         | 1,936,488  | 1         | 8,013,809  | 1         | 6,153,642  | 1         | 3,526,238  | 0         | 12,481,127 | 0         | 11,576,255 | 1         | 3,464,302    | 0         | 4,496,281  |
| 32          | 1         | 3,196,234  | 1         | 13,225,753 | 1         | 10,152,448 | 1         | 5,821,469  | 1         | 16,845,169 | 1         | 15,621,186 | 1         | 5,715,388    | 1         | 6,067,355  |
| 33          | 1         | 5,271,207  | 1         | 21,818,465 | 1         | 16,750,449 | 0         | 9,603,465  | 1         | 27,791,911 | 0         | 25,778,795 | 1         | 9,426,596    | 0         | 10,010,449 |
| 34          | 1         | 8,695,900  | 0         | 36,011,792 | 1         | 27,639,114 | 1         | 12,966,600 | 0         | 45,853,769 | 1         | 34,791,682 | 1         | 15,557,303   | 1         | 13,511,485 |
| 35          | 1         | 14,353,251 | 1         | 48,582,535 | 1         | 45,603,272 | 0         | 21,393,754 | 1         | 61,918,610 | 1         | 57,405,343 | 1         | 1,25,669,920 | 1         | 22,294,820 |

Tabella B.3

| Generazione | shot no.9 |            | shot no.10 |            | shot no.11 |            | shot no.12 |            | shot no.13 |            | shot no.14 |            | shot no.15 |            |
|-------------|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
|             | r         | t          | r          | t          | r          | t          | r          | t          | r          | t          | r          | t          | r          | t          |
| 1           | 0         | 6          | 1          | 5          | 1          | 5          | 1          | 7          | 1          | 5          | 1          | 4          | 1          | 7          |
| 2           | 1         | 8          | 1          | 12         | 1          | 7          | 1          | 13         | 1          | 5          | 1          | 10         | 1          | 8          |
| 3           | 1         | 16         | 1          | 23         | 1          | 10         | 0          | 18         | 0          | 10         | 1          | 16         | 1          | 11         |
| 4           | 1         | 30         | 1          | 42         | 1          | 12         | 0          | 33         | 1          | 6          | 1          | 28         | 1          | 17         |
| 5           | 0         | 38         | 1          | 63         | 1          | 20         | 1          | 49         | 1          | 10         | 1          | 54         | 1          | 34         |
| 6           | 1         | 85         | 1          | 112        | 1          | 36         | 1          | 69         | 1          | 18         | 0          | 93         | 1          | 63         |
| 7           | 1         | 122        | 1          | 195        | 1          | 59         | 0          | 116        | 0          | 24         | 1          | 102        | 1          | 103        |
| 8           | 0         | 199        | 1          | 325        | 1          | 89         | 1          | 149        | 1          | 55         | 1          | 155        | 1          | 167        |
| 9           | 1         | 281        | 0          | 539        | 1          | 168        | 0          | 246        | 0          | 91         | 1          | 244        | 1          | 283        |
| 10          | 1         | 440        | 1          | 714        | 0          | 298        | 1          | 326        | 1          | 125        | 1          | 398        | 1          | 473        |
| 11          | 0         | 699        | 0          | 1,214      | 1          | 339        | 0          | 533        | 1          | 222        | 0          | 646        | 1          | 807        |
| 12          | 1         | 1,072      | 1          | 1,542      | 1          | 559        | 1          | 706        | 0          | 395        | 1          | 896        | 1          | 1,295      |
| 13          | 1         | 1,757      | 0          | 2,558      | 1          | 909        | 0          | 1,157      | 1          | 436        | 1          | 1,496      | 1          | 2,166      |
| 14          | 1         | 2,918      | 1          | 3,381      | 1          | 1,505      | 1          | 1,608      | 1          | 742        | 0          | 2,514      | 1          | 3,579      |
| 15          | 0         | 4,815      | 1          | 5,591      | 0          | 2,491      | 1          | 2,624      | 1          | 1,269      | 0          | 3,303      | 1          | 5,894      |
| 16          | 1         | 6,485      | 0          | 9,295      | 1          | 3,349      | 0          | 4,309      | 1          | 2,116      | 1          | 4,359      | 1          | 9,795      |
| 17          | 1         | 10,808     | 1          | 12,299     | 1          | 5,458      | 1          | 5,883      | 1          | 3,477      | 1          | 7,222      | 0          | 16,092     |
| 18          | 1         | 17,757     | 1          | 20,361     | 1          | 9,043      | 1          | 9,722      | 1          | 5,707      | 1          | 11,828     | 0          | 21,967     |
| 19          | 1         | 29,208     | 1          | 33,570     | 1          | 14,943     | 1          | 16,070     | 1          | 9,346      | 1          | 19,372     | 0          | 29,484     |
| 20          | 1         | 48,145     | 1          | 55,389     | 1          | 24,728     | 1          | 26,466     | 0          | 15,365     | 1          | 32,103     | 1          | 40,179     |
| 21          | 1         | 79,402     | 1          | 91,578     | 1          | 40,973     | 0          | 43,362     | 1          | 20,894     | 1          | 53,029     | 1          | 66,389     |
| 22          | 0         | 131,170    | 1          | 151,131    | 1          | 67,692     | 0          | 59,493     | 0          | 34,638     | 1          | 87,440     | 1          | 109,462    |
| 23          | 1         | 176,452    | 1          | 249,082    | 0          | 111,874    | 0          | 80,154     | 0          | 46,089     | 0          | 144,193    | 1          | 179,859    |
| 24          | 1         | 290,717    | 1          | 410,822    | 1          | 150,488    | 0          | 108,294    | 1          | 63,039     | 1          | 195,212    | 1          | 296,630    |
| 25          | 0         | 479,237    | 1          | 678,386    | 1          | 248,388    | 1          | 146,342    | 1          | 104,117    | 1          | 321,722    | 0          | 488,882    |
| 26          | 1         | 648,795    | 1          | 1,120,412  | 1          | 410,055    | 1          | 241,947    | 1          | 171,587    | 1          | 531,497    | 0          | 661,549    |
| 27          | 0         | 1,069,798  | 1          | 1,849,019  | 1          | 676,887    | 1          | 398,781    | 1          | 283,453    | 1          | 877,410    | 0          | 1,091,904  |
| 28          | 1         | 1,446,392  | 1          | 3,051,820  | 0          | 1,116,856  | 0          | 657,666    | 1          | 467,135    | 1          | 1,447,995  | 1          | 1,473,040  |
| 29          | 1         | 2,386,836  | 0          | 5,034,541  | 0          | 1,506,899  | 1          | 888,209    | 1          | 771,052    | 1          | 2,388,472  | 1          | 2,429,918  |
| 30          | 0         | 3,937,139  | 0          | 6,798,714  | 1          | 2,038,013  | 1          | 1,467,095  | 1          | 1,273,634  | 1          | 3,940,203  | 1          | 4,011,231  |
| 31          | 1         | 5,317,749  | 1          | 9,179,141  | 0          | 3,362,769  | 1          | 2,421,344  | 0          | 2,102,497  | 1          | 6,503,954  | 1          | 6,616,855  |
| 32          | 1         | 8,769,744  | 1          | 15,146,401 | 0          | 4,542,268  | 0          | 3,994,257  | 1          | 2,835,664  | 1          | 10,734,776 | 1          | 10,920,522 |
| 33          | 1         | 14,470,530 | 0          | 24,990,516 | 1          | 6,127,507  | 0          | 5,395,948  | 1          | 4,678,524  | 0          | 17,710,728 | 1          | 18,019,508 |
| 34          | 1         | 23,877,874 | 1          | 33,741,413 | 1          | 10,106,854 | 1          | 7,278,542  | 1          | 7,718,474  | 1          | 23,917,221 | 1          | 29,725,038 |
| 35          | 1         | 39,398,617 | 1          | 55,679,590 | 1          | 16,673,102 | 1          | 12,011,734 | 0          | 12,735,022 | 0          | 39,466,453 | 1          | 49,056,747 |

Tabella C.1

| Generazione  | f=0        | f=0.05     | f=0.10     | f=0.15     | f=0.20     | f=0.25     | f=0.30     | f=0.35     | f=0.40     | f=0.45     | f=0.50     |
|--------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1            | 20         | 20         | 20         | 20         | 20         | 20         | 20         | 20         | 20         | 20         | 20         |
| 2            | 60         | 57         | 57         | 54         | 48         | 48         | 45         | 42         | 39         | 33         | 30         |
| 3            | 180        | 168        | 159        | 144        | 120        | 114        | 93         | 81         | 69         | 60         | 48         |
| 4            | 0          | 18         | 42         | 66         | 81         | 102        | 105        | 105        | 99         | 93         | 75         |
| 5            | 0          | 48         | 108        | 162        | 192        | 228        | 228        | 210        | 177        | 129        | 102        |
| 6            | 0          | 6          | 27         | 60         | 117        | 159        | 201        | 219        | 204        | 156        | 162        |
| 7            | 0          | 0          | 9          | 21         | 63         | 126        | 180        | 210        | 204        | 207        | 261        |
| 8            | 0          | 0          | 3          | 9          | 45         | 120        | 216        | 276        | 291        | 267        | 372        |
| 9            | 0          | 0          | 3          | 0          | 33         | 111        | 183        | 267        | 366        | 405        | 570        |
| 10           | 0          | 0          | 9          | 0          | 66         | 249        | 423        | 573        | 723        | 708        | 876        |
| 11           | 0          | 0          | 27         | 0          | 147        | 600        | 894        | 1,119      | 1,332      | 1,167      | 1,359      |
| 12           | 0          | 0          | 3          | 0          | 111        | 441        | 765        | 1,113      | 1,536      | 1,530      | 1,956      |
| 13           | 0          | 0          | 9          | 0          | 270        | 1,020      | 1,674      | 2,241      | 2,775      | 2,613      | 2,913      |
| 14           | 0          | 0          | 27         | 0          | 687        | 2,358      | 3,492      | 4,287      | 4,902      | 4,227      | 4,362      |
| 15           | 0          | 0          | 6          | 0          | 411        | 1,788      | 3,222      | 4,542      | 5,931      | 5,700      | 6,543      |
| 16           | 0          | 0          | 18         | 0          | 996        | 4,038      | 6,801      | 8,751      | 10,656     | 9,333      | 9,906      |
| 17           | 0          | 0          | 6          | 0          | 522        | 3,012      | 6,192      | 9,240      | 13,113     | 12,777     | 15,027     |
| 18           | 0          | 0          | 0          | 0          | 291        | 2,325      | 5,706      | 9,699      | 15,714     | 17,193     | 22,446     |
| 19           | 0          | 0          | 0          | 0          | 678        | 5,139      | 11,904     | 18,900     | 28,110     | 28,263     | 33,309     |
| 20           | 0          | 0          | 0          | 0          | 1,605      | 11,541     | 25,113     | 36,531     | 50,619     | 46,548     | 50,334     |
| 21           | 0          | 0          | 0          | 0          | 3,831      | 25,965     | 52,398     | 71,406     | 90,963     | 76,791     | 75,486     |
| 22           | 0          | 0          | 0          | 0          | 2,346      | 19,815     | 46,695     | 74,739     | 108,918    | 103,416    | 112,596    |
| 23           | 0          | 0          | 0          | 0          | 1,359      | 14,652     | 42,288     | 78,294     | 131,076    | 140,139    | 169,773    |
| 24           | 0          | 0          | 0          | 0          | 3,252      | 33,027     | 88,620     | 152,850    | 236,055    | 231,186    | 254,790    |
| 25           | 0          | 0          | 0          | 0          | 7,806      | 74,256     | 186,723    | 298,251    | 426,357    | 382,746    | 383,403    |
| 26           | 0          | 0          | 0          | 0          | 4,809      | 55,707     | 167,685    | 311,691    | 510,969    | 516,369    | 574,821    |
| 27           | 0          | 0          | 0          | 0          | 11,520     | 125,682    | 353,337    | 607,692    | 919,110    | 852,687    | 863,358    |
| 28           | 0          | 0          | 0          | 0          | 6,834      | 93,606     | 317,580    | 637,887    | 1,102,923  | 1,150,956  | 1,295,880  |
| 29           | 0          | 0          | 0          | 0          | 4,122      | 69,912     | 285,807    | 669,651    | 1,324,713  | 1,556,790  | 1,943,457  |
| 30           | 0          | 0          | 0          | 0          | 2,535      | 52,356     | 256,788    | 704,100    | 1,587,633  | 2,100,222  | 2,917,179  |
| 31           | 0          | 0          | 0          | 0          | 1,569      | 39,258     | 231,708    | 739,644    | 1,907,709  | 2,837,295  | 4,375,683  |
| 32           | 0          | 0          | 0          | 0          | 903        | 29,073     | 208,431    | 775,716    | 2,288,883  | 3,829,152  | 6,565,230  |
| 33           | 0          | 0          | 0          | 0          | 621        | 21,702     | 187,863    | 815,106    | 2,744,793  | 5,174,793  | 9,845,733  |
| 34           | 0          | 0          | 0          | 0          | 357        | 16,278     | 169,779    | 856,701    | 3,300,087  | 6,985,323  | 14,765,247 |
| 35           | 0          | 0          | 0          | 0          | 210        | 12,060     | 153,147    | 900,654    | 3,962,796  | 9,432,267  | 22,145,709 |
| 36           | 0          | 0          | 0          | 0          | 108        | 9,018      | 137,478    | 944,805    | 4,749,081  | 12,720,312 | 33,231,555 |
| elapsed time | 0.091643 s | 0.016577 s | 0.016773 s | 0.016528 s | 0.046388 s | 0.097368 s | 0.112219 s | 0.073965 s | 0.433720 s | 0.729168 s | 1.412823 s |

Tabella C.2

| Generazione         | f=0.55     | f=0.60     | f=0.65     | f=0.70     | f=0.75     | f=0.80     | f=0.85     | f=0.90     | f=0.95     | f=1        |
|---------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1                   | 20         | 20         | 20         | 20         | 20         | 20         | 20         | 20         | 20         | 20         |
| 2                   | 30         | 30         | 27         | 18         | 15         | 6          | 3          | 3          | 3          | 0          |
| 3                   | 39         | 33         | 27         | 18         | 12         | 3          | 3          | 3          | 3          | 0          |
| 4                   | 69         | 63         | 57         | 39         | 24         | 9          | 9          | 9          | 9          | 0          |
| 5                   | 75         | 57         | 48         | 36         | 18         | 12         | 6          | 3          | 3          | 0          |
| 6                   | 141        | 114        | 102        | 87         | 39         | 27         | 15         | 9          | 9          | 0          |
| 7                   | 237        | 201        | 198        | 195        | 87         | 78         | 42         | 24         | 27         | 0          |
| 8                   | 369        | 366        | 411        | 435        | 210        | 186        | 108        | 66         | 81         | 0          |
| 9                   | 651        | 681        | 828        | 954        | 495        | 444        | 285        | 171        | 234        | 0          |
| 10                  | 903        | 825        | 900        | 864        | 306        | 216        | 102        | 48         | 36         | 0          |
| 11                  | 1,257      | 1,020      | 978        | 819        | 234        | 87         | 45         | 18         | 3          | 0          |
| 12                  | 2,037      | 1,830      | 1,875      | 1,689      | 516        | 207        | 114        | 54         | 9          | 0          |
| 13                  | 2,724      | 2,286      | 1,992      | 1,590      | 381        | 153        | 48         | 12         | 0          | 0          |
| 14                  | 3,699      | 2,646      | 1,992      | 1,341      | 306        | 90         | 12         | 3          | 0          | 0          |
| 15                  | 6,144      | 4,758      | 3,963      | 2,880      | 672        | 231        | 33         | 9          | 0          | 0          |
| 16                  | 8,427      | 5,670      | 4,191      | 2,601      | 525        | 141        | 3          | 3          | 0          | 0          |
| 17                  | 13,956     | 10,089     | 8,154      | 5,574      | 1,191      | 330        | 9          | 9          | 0          | 0          |
| 18                  | 22,932     | 18,132     | 15,780     | 11,577     | 2,616      | 759        | 24         | 27         | 0          | 0          |
| 19                  | 30,513     | 21,738     | 16,569     | 10,347     | 1,920      | 498        | 12         | 6          | 0          | 0          |
| 20                  | 41,199     | 25,677     | 17,211     | 9,264      | 1,341      | 309        | 0          | 6          | 0          | 0          |
| 21                  | 55,551     | 30,945     | 18,126     | 8,118      | 1,083      | 195        | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 22                  | 91,353     | 55,422     | 35,256     | 16,992     | 2,508      | 435        | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 23                  | 150,519    | 99,816     | 68,601     | 35,628     | 5,643      | 1,038      | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 24                  | 202,254    | 120,030    | 71,889     | 32,508     | 4,314      | 588        | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 25                  | 274,044    | 143,187    | 75,726     | 29,235     | 3,246      | 309        | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 26                  | 451,770    | 257,514    | 148,713    | 61,563     | 7,359      | 750        | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 27                  | 610,956    | 310,023    | 156,207    | 55,560     | 5,640      | 459        | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 28                  | 1,007,373  | 557,415    | 303,909    | 116,838    | 12,759     | 1,101      | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 29                  | 1,663,050  | 1,002,351  | 592,410    | 246,165    | 28,902     | 2,697      | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 30                  | 2,743,071  | 1,805,598  | 1,154,805  | 516,453    | 64,935     | 6,456      | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 31                  | 4,527,102  | 3,248,661  | 2,251,476  | 1,084,278  | 145,839    | 15,555     | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 32                  | 7,470,666  | 5,847,450  | 4,390,155  | 2,276,583  | 328,533    | 37,326     | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 33                  | 12,324,111 | 10,529,235 | 8,561,493  | 4,780,293  | 739,482    | 89,874     | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 34                  | 20,330,433 | 18,950,304 | 16,697,265 | 10,039,290 | 1,663,011  | 215,646    | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 35                  | 33,545,319 | 34,106,613 | 32,553,252 | 21,080,541 | 3,742,506  | 517,899    | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 36                  | 55,360,062 | 61,403,286 | 63,495,540 | 44,263,953 | 8,422,620  | 1,242,573  | 0          | 0          | 0          | 0          |
| <b>elapsed time</b> | 1.653041 s | 1.457837 s | 1.315678 s | 0.796329 s | 0.143168 s | 0.032384 s | 0.014913 s | 0.014738 s | 0.014563 s | 0.011247 s |

Tabella C.3

| Generazione | f=0 |   | f=0.05 |   | f=0.10 |    | f=0.15 |    | f=0.20 |       | f=0.25 |        | f=0.30 |         |    |
|-------------|-----|---|--------|---|--------|----|--------|----|--------|-------|--------|--------|--------|---------|----|
|             | r   | t | r      | t | r      | t  | r      | t  | r      | t     | r      | t      | r      | t       |    |
| 1           | 0   | 0 | 1      | 0 | 0      | 1  | 0      | 0  | 2      | 0     | 4      | 0      | 4      | 0       | 5  |
| 2           | 0   | 0 | 0      | 1 | 0      | 4  | 0      | 0  | 6      | 0     | 8      | 0      | 10     | 0       | 14 |
| 3           | 1   | 0 | 1      | 6 | 1      | 14 | 1      | 22 | 1      | 27    | 1      | 34     | 1      | 35      |    |
| 4           | 0   | 0 | 0      | 2 | 0      | 6  | 0      | 12 | 0      | 17    | 0      | 26     | 0      | 29      |    |
| 5           | 1   | 0 | 1      | 2 | 1      | 9  | 1      | 20 | 1      | 39    | 1      | 53     | 1      | 67      |    |
| 6           | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 3  | 1      | 7  | 1      | 21    | 1      | 42     | 1      | 60      |    |
| 7           | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 1  | 1      | 3  | 1      | 15    | 1      | 40     | 1      | 72      |    |
| 8           | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 1  | 1      | 0  | 1      | 11    | 1      | 37     | 1      | 61      |    |
| 9           | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 11    | 0      | 28     | 0      | 42      |    |
| 10          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 17    | 0      | 49     | 0      | 125     |    |
| 11          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 1  | 1      | 0  | 1      | 37    | 1      | 147    | 1      | 255     |    |
| 12          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 21    | 0      | 101    | 0      | 207     |    |
| 13          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 41    | 0      | 234    | 0      | 510     |    |
| 14          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 2  | 1      | 0  | 1      | 137   | 1      | 596    | 1      | 1,074   |    |
| 15          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 79    | 0      | 442    | 0      | 955     |    |
| 16          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 2  | 1      | 0  | 1      | 174   | 1      | 1,004  | 1      | 2,064   |    |
| 17          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 97    | 1      | 775    | 1      | 1,902   |    |
| 18          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 65    | 0      | 612    | 0      | 1,738   |    |
| 19          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 143   | 0      | 1,292  | 0      | 3,533   |    |
| 20          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 328   | 0      | 2,886  | 0      | 7,647   |    |
| 21          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 782   | 1      | 6,605  | 1      | 15,565  |    |
| 22          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 453   | 1      | 4,884  | 1      | 14,096  |    |
| 23          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 275   | 0      | 3,643  | 0      | 12,748  |    |
| 24          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 650   | 0      | 8,275  | 0      | 26,379  |    |
| 25          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 1,603 | 1      | 18,569 | 1      | 55,895  |    |
| 26          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 969   | 0      | 13,813 | 0      | 49,906  |    |
| 27          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 2,278 | 1      | 31,202 | 1      | 105,860 |    |
| 28          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 1,374 | 1      | 23,304 | 1      | 95,269  |    |
| 29          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 845   | 1      | 17,452 | 1      | 85,596  |    |
| 30          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 523   | 1      | 13,086 | 1      | 77,236  |    |
| 31          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 301   | 1      | 9,691  | 1      | 69,477  |    |
| 32          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 207   | 1      | 7,234  | 1      | 62,621  |    |
| 33          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 119   | 1      | 5,426  | 1      | 56,593  |    |
| 34          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 70    | 1      | 4,020  | 1      | 51,049  |    |
| 35          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 36    | 1      | 3,006  | 1      | 45,826  |    |

**Tabella C.4**

| Generazione | f=0.35 |         | f=0.40 |           | f=0.45 |           | f=0.50 |            | f=0.55 |            | f=0.60 |            | f=0.65 |            |
|-------------|--------|---------|--------|-----------|--------|-----------|--------|------------|--------|------------|--------|------------|--------|------------|
|             | r      | t       | r      | t         | r      | t         | r      | t          | r      | t          | r      | t          | r      | t          |
| 1           | 0      | 6       | 0      | 7         | 0      | 9         | 0      | 10         | 0      | 10         | 0      | 10         | 0      | 11         |
| 2           | 0      | 15      | 0      | 16        | 0      | 13        | 0      | 14         | 0      | 14         | 0      | 17         | 0      | 18         |
| 3           | 1      | 35      | 1      | 33        | 1      | 31        | 1      | 25         | 1      | 23         | 1      | 21         | 1      | 19         |
| 4           | 0      | 35      | 0      | 40        | 0      | 50        | 0      | 41         | 0      | 44         | 0      | 44         | 0      | 41         |
| 5           | 1      | 73      | 1      | 67        | 1      | 52        | 1      | 54         | 1      | 47         | 1      | 38         | 1      | 34         |
| 6           | 1      | 70      | 1      | 68        | 1      | 69        | 1      | 87         | 1      | 79         | 1      | 67         | 1      | 66         |
| 7           | 1      | 92      | 1      | 97        | 1      | 89        | 1      | 124        | 1      | 123        | 1      | 122        | 1      | 137        |
| 8           | 1      | 89      | 1      | 122       | 1      | 135       | 1      | 190        | 1      | 217        | 1      | 227        | 1      | 276        |
| 9           | 0      | 76      | 0      | 125       | 0      | 169       | 0      | 278        | 0      | 350        | 0      | 406        | 0      | 528        |
| 10          | 0      | 200     | 0      | 279       | 0      | 319       | 0      | 423        | 0      | 484        | 0      | 485        | 0      | 574        |
| 11          | 1      | 371     | 1      | 512       | 1      | 510       | 1      | 652        | 1      | 679        | 1      | 610        | 1      | 625        |
| 12          | 0      | 366     | 0      | 611       | 0      | 659       | 0      | 985        | 0      | 985        | 0      | 1,068      | 0      | 1,211      |
| 13          | 0      | 812     | 0      | 1,141     | 0      | 1,204     | 0      | 1,459      | 0      | 1,491      | 0      | 1,404      | 0      | 1,328      |
| 14          | 1      | 1,514   | 1      | 1,977     | 1      | 1,900     | 1      | 2,181      | 1      | 2,048      | 1      | 1,586      | 1      | 1,321      |
| 15          | 0      | 1,625   | 0      | 2,379     | 0      | 2,589     | 0      | 3,241      | 0      | 3,335      | 0      | 2,868      | 0      | 2,566      |
| 16          | 1      | 3,080   | 1      | 4,371     | 1      | 4,259     | 1      | 5,009      | 1      | 4,652      | 1      | 3,363      | 1      | 2,718      |
| 17          | 1      | 3,233   | 1      | 5,238     | 1      | 5,731     | 1      | 7,482      | 1      | 7,644      | 1      | 6,044      | 1      | 5,260      |
| 18          | 0      | 3,399   | 0      | 6,344     | 0      | 7,772     | 0      | 11,343     | 0      | 12,761     | 0      | 10,886     | 0      | 10,257     |
| 19          | 0      | 6,723   | 0      | 11,237    | 0      | 12,747    | 0      | 16,531     | 0      | 16,780     | 0      | 13,179     | 0      | 10,832     |
| 20          | 0      | 12,729  | 0      | 20,298    | 0      | 20,951    | 0      | 25,172     | 0      | 22,682     | 0      | 15,362     | 0      | 11,169     |
| 21          | 1      | 24,913  | 1      | 36,306    | 1      | 34,472    | 1      | 37,532     | 1      | 30,451     | 1      | 18,474     | 1      | 11,752     |
| 22          | 1      | 26,098  | 1      | 43,692    | 1      | 46,713    | 1      | 56,591     | 1      | 50,173     | 1      | 33,272     | 1      | 22,867     |
| 23          | 0      | 27,344  | 0      | 52,391    | 0      | 63,077    | 0      | 84,843     | 0      | 83,101     | 0      | 59,806     | 0      | 44,638     |
| 24          | 0      | 53,433  | 0      | 93,936    | 0      | 103,604   | 0      | 126,989    | 0      | 110,906    | 0      | 72,301     | 0      | 46,647     |
| 25          | 1      | 103,897 | 1      | 170,323   | 1      | 172,123   | 1      | 191,607    | 1      | 150,590    | 1      | 85,838     | 1      | 49,571     |
| 26          | 0      | 109,127 | 0      | 204,599   | 0      | 232,140   | 0      | 287,035    | 0      | 248,118    | 0      | 154,173    | 0      | 96,644     |
| 27          | 1      | 212,629 | 1      | 367,641   | 1      | 383,652   | 1      | 431,960    | 1      | 335,791    | 1      | 185,805    | 1      | 101,303    |
| 28          | 1      | 223,217 | 1      | 441,571   | 1      | 518,930   | 1      | 647,819    | 1      | 554,350    | 1      | 334,117    | 1      | 197,470    |
| 29          | 1      | 234,700 | 1      | 529,211   | 1      | 700,074   | 1      | 972,393    | 1      | 914,357    | 1      | 601,866    | 1      | 384,935    |
| 30          | 1      | 246,548 | 1      | 635,903   | 1      | 945,765   | 1      | 1,458,561  | 1      | 1,509,034  | 1      | 1,082,887  | 1      | 750,492    |
| 31          | 1      | 258,572 | 1      | 762,961   | 1      | 1,276,384 | 1      | 2,188,410  | 1      | 2,490,222  | 1      | 1,949,150  | 1      | 1,463,385  |
| 32          | 1      | 271,702 | 1      | 914,931   | 1      | 1,724,931 | 1      | 3,281,911  | 1      | 4,108,037  | 1      | 3,509,745  | 1      | 2,853,831  |
| 33          | 1      | 285,567 | 1      | 1,100,029 | 1      | 2,328,441 | 1      | 4,921,749  | 1      | 6,776,811  | 1      | 6,316,768  | 1      | 5,565,755  |
| 34          | 1      | 300,218 | 1      | 1,320,932 | 1      | 3,144,089 | 1      | 7,381,903  | 1      | 11,181,773 | 1      | 11,368,871 | 1      | 10,851,084 |
| 35          | 1      | 314,935 | 1      | 1,583,027 | 1      | 4,240,104 | 1      | 11,077,185 | 1      | 18,453,354 | 1      | 20,467,762 | 1      | 21,165,180 |



Tabella C.5

| Generazione | f=0.70 |            | f=0.75 |           | f=0.80 |         | f=0.85 |     | f=0.90 |     | f=0.95 |     | f=1 |    |
|-------------|--------|------------|--------|-----------|--------|---------|--------|-----|--------|-----|--------|-----|-----|----|
|             | r      | t          | r      | t         | r      | t       | r      | t   | r      | t   | r      | t   | r   | t  |
| 1           | 0      | 14         | 0      | 15        | 0      | 18      | 0      | 19  | 0      | 19  | 0      | 19  | 0   | 20 |
| 2           | 0      | 12         | 0      | 11        | 0      | 5       | 0      | 2   | 0      | 2   | 0      | 2   | 0   | 0  |
| 3           | 1      | 13         | 1      | 8         | 1      | 3       | 1      | 3   | 1      | 3   | 1      | 3   | 1   | 0  |
| 4           | 0      | 27         | 0      | 18        | 0      | 5       | 0      | 7   | 0      | 8   | 0      | 8   | 0   | 0  |
| 5           | 1      | 29         | 1      | 13        | 1      | 9       | 1      | 5   | 1      | 3   | 1      | 3   | 1   | 0  |
| 6           | 1      | 65         | 1      | 29        | 1      | 26      | 1      | 14  | 1      | 8   | 1      | 9   | 1   | 0  |
| 7           | 1      | 145        | 1      | 70        | 1      | 62      | 1      | 36  | 1      | 22  | 1      | 27  | 1   | 0  |
| 8           | 1      | 318        | 1      | 165       | 1      | 148     | 1      | 95  | 1      | 57  | 1      | 78  | 1   | 0  |
| 9           | 0      | 666        | 0      | 393       | 0      | 372     | 0      | 251 | 0      | 155 | 0      | 222 | 0   | 0  |
| 10          | 0      | 591        | 0      | 228       | 0      | 187     | 0      | 87  | 0      | 42  | 0      | 35  | 0   | 0  |
| 11          | 1      | 563        | 1      | 172       | 1      | 69      | 1      | 38  | 1      | 18  | 1      | 3   | 1   | 0  |
| 12          | 0      | 1,159      | 0      | 389       | 0      | 156     | 0      | 98  | 0      | 50  | 0      | 9   | 0   | 0  |
| 13          | 0      | 1,143      | 0      | 279       | 0      | 123     | 0      | 44  | 0      | 11  | 0      | 0   | 0   | 0  |
| 14          | 1      | 960        | 1      | 224       | 1      | 77      | 1      | 11  | 1      | 3   | 1      | 0   | 1   | 0  |
| 15          | 0      | 2,013      | 0      | 497       | 0      | 184     | 0      | 32  | 0      | 8   | 0      | 0   | 0   | 0  |
| 16          | 1      | 1,858      | 1      | 397       | 1      | 110     | 1      | 3   | 1      | 3   | 1      | 0   | 1   | 0  |
| 17          | 1      | 3,859      | 1      | 872       | 1      | 253     | 1      | 8   | 1      | 9   | 1      | 0   | 1   | 0  |
| 18          | 0      | 8,128      | 0      | 1,976     | 0      | 593     | 0      | 20  | 0      | 25  | 0      | 0   | 0   | 0  |
| 19          | 0      | 7,259      | 0      | 1,473     | 0      | 395     | 0      | 12  | 0      | 4   | 0      | 0   | 0   | 0  |
| 20          | 0      | 6,558      | 0      | 980       | 0      | 244     | 0      | 0   | 0      | 6   | 0      | 0   | 0   | 0  |
| 21          | 1      | 5,664      | 1      | 836       | 1      | 145     | 1      | 0   | 1      | 0   | 1      | 0   | 1   | 0  |
| 22          | 1      | 11,876     | 1      | 1,881     | 1      | 346     | 1      | 0   | 1      | 0   | 1      | 0   | 1   | 0  |
| 23          | 0      | 24,792     | 0      | 4,205     | 0      | 842     | 0      | 0   | 0      | 0   | 0      | 0   | 0   | 0  |
| 24          | 0      | 22,763     | 0      | 3,232     | 0      | 485     | 0      | 0   | 0      | 0   | 0      | 0   | 0   | 0  |
| 25          | 1      | 20,521     | 1      | 2,453     | 1      | 250     | 1      | 0   | 1      | 0   | 1      | 0   | 1   | 0  |
| 26          | 0      | 43,043     | 0      | 5,479     | 0      | 597     | 0      | 0   | 0      | 0   | 0      | 0   | 0   | 0  |
| 27          | 1      | 38,946     | 1      | 4,253     | 1      | 367     | 1      | 0   | 1      | 0   | 1      | 0   | 1   | 0  |
| 28          | 1      | 82,055     | 1      | 9,634     | 1      | 899     | 1      | 0   | 1      | 0   | 1      | 0   | 1   | 0  |
| 29          | 1      | 172,151    | 1      | 21,645    | 1      | 2,152   | 1      | 0   | 1      | 0   | 1      | 0   | 1   | 0  |
| 30          | 1      | 361,426    | 1      | 48,613    | 1      | 5,185   | 1      | 0   | 1      | 0   | 1      | 0   | 1   | 0  |
| 31          | 1      | 758,861    | 1      | 109,511   | 1      | 12,442  | 1      | 0   | 1      | 0   | 1      | 0   | 1   | 0  |
| 32          | 1      | 1,593,431  | 1      | 246,494   | 1      | 29,958  | 1      | 0   | 1      | 0   | 1      | 0   | 1   | 0  |
| 33          | 1      | 3,346,430  | 1      | 554,337   | 1      | 71,882  | 1      | 0   | 1      | 0   | 1      | 0   | 1   | 0  |
| 34          | 1      | 7,026,847  | 1      | 1,247,502 | 1      | 172,633 | 1      | 0   | 1      | 0   | 1      | 0   | 1   | 0  |
| 35          | 1      | 14,754,651 | 1      | 2,807,540 | 1      | 414,191 | 1      | 0   | 1      | 0   | 1      | 0   | 1   | 0  |

# APPENDICE D) Matrice definita in Excel per la costruzione del grafico cromatico (v. Figura 4.2)

The image shows a large grid representing a matrix for chromatic graph construction. The grid is mostly empty, with some faint text visible at the bottom edge. The text at the bottom appears to be a list of vertices or nodes, possibly related to the graph construction process. The grid is bounded by a thick black border.

## **APPENDICE E) Dati outcome di altre simulazioni del modello in Matlab**

In questa appendice si allegano le tabelle contenenti i dati outcome di altre simulazioni del modello in Matlab (v. *infra* 4.2.2). Inizialmente si riportano le quattro simulazioni complete ma che non hanno apportato ad alcun risultato interessante. Le quattro simulazioni vengono fatte per due popolazioni, diversificate in base al numero di individui iniziale, cioè  $n(1) = 10$  e  $20$ , entrambe per due valori associati al successo riproduttivo  $xv1$ ,  $xp2 = 1$ ,  $xv1$ ,  $xp2 = 2$  o, in caso negativo,  $0$ ). Anche in questo caso, come in Appendice C, vi sono due tipologie di tabelle: quelle che contengono l'evoluzione generazionale della numerosità della popolazione nelle sue 36 proli, per ogni valore associato alla probabilità  $f$  (totale 21 valori con  $f \in [0,1]$ ) e quella in cui si riportano i valori dei vettori simulati  $r(i)$ , vettore del tempo meteorologico (1=sole, 0=pioggia) e  $t(k)$ , vettore che simula la quantità di individui che costruisce la propria abitazione a valle (cioè in base alla probabilità  $f$ ). Nella tabella con i dati delle numerosità delle proli nei vari 36 periodi, nell'ultima riga si legge il cosiddetto *elapsed time*, cioè il tempo impiegato dalla macchina, attraverso il software Matlab, per la computazione. Oltre alle tabelle relative alle 4 simulazioni, sono riportate due tabelle contenenti i dati di una simulazione incompleta (per una popolazione con  $n(1) = 10$  e  $xv1$ ,  $xp2 = 4$ ), a causa dell'insufficienza di calcolo della macchina utilizzata (per completezza di riporta anche il messaggio di errore formulato dal software). Particolare attenzione in questi dati, merita il valore elevato associato all'*elapsed time*.

Per comprendere meglio il criterio logico di esposizione delle tabelle si faccia riferimento al seguente elenco:

- Tabelle A.1, A.2, A.3, A.4: fanno riferimento alla simulazione del modello per la popolazione con  $n(1) = 10$  e  $xv1$ ,  $xp2 = 1$  (le prime due tabelle contengono la numerosità della popolazione, le successive due contengono i dati dei vettori  $r(i)$  e  $t(k)$ );
- Tabelle B.1, B.2, B.3, B.4: fanno riferimento alla simulazione del modello per la popolazione con  $n(1) = 10$  e  $xv1$ ,  $xp2 = 2$  (le prime due tabelle contengono la numerosità della popolazione, le successive due contengono i dati dei vettori  $r(i)$  e  $t(k)$ );

- Tabelle C.1, C.2, C.3, C.4: fanno riferimento alla simulazione del modello per la popolazione con  $n(1) = 20$  e  $xv1, xp2 = 1$  (le prime due tabelle contengono la numerosità della popolazione, le successive due contengono i dati dei vettori  $r(i)$  e  $t(k)$ );
- Tabelle D.1, D.2, D.3, D.4: fanno riferimento alla simulazione del modello per la popolazione con  $n(1) = 20$  e  $xv1, xp2 = 2$  (le prime due tabelle contengono la numerosità della popolazione, le successive due contengono i dati dei vettori  $r(i)$  e  $t(k)$ );
- Tabelle E.1, E.2, E.3: fanno riferimento alla simulazione incompleta del modello per la popolazione con  $n(1) = 10$  e  $xv1, xp2 = 4$  (le prime due tabelle contengono la numerosità della popolazione fino al calcolo riuscito, e il messaggio di errore, la successiva contiene i dati dei vettori  $r(i)$  e  $t(k)$ ).

**Tabella A.1**

| Generazione  | f=0        | f=0.05     | f=0.10     | f=0.15     | f=0.20     | f=0.25     | f=0.30     | f=0.35     | f=0.40     | f=0.45     | f=0.50     |
|--------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1            | 10         | 10         | 10         | 10         | 10         | 10         | 10         | 10         | 10         | 10         | 10         |
| 2            | 10         | 9          | 9          | 9          | 8          | 8          | 8          | 7          | 6          | 5          | 5          |
| 3            | 10         | 9          | 9          | 9          | 8          | 8          | 7          | 6          | 5          | 4          | 3          |
| 4            | 0          | 0          | 0          | 1          | 2          | 3          | 3          | 3          | 2          | 2          | 1          |
| 5            | 0          | 0          | 0          | 1          | 2          | 3          | 2          | 2          | 1          | 1          | 0          |
| 6            | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 1          | 0          | 0          | 0          |
| 7            | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 8            | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 9            | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 10           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 11           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 12           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 13           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 14           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 15           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 16           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 17           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 18           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 19           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 20           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 21           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 22           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 23           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 24           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 25           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 26           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 27           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 28           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 29           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 30           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 31           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 32           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 33           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 34           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 35           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 36           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| elapsed time | 0.080384 s | 0.012997 s | 0.012275 s | 0.011360 s | 0.013149 s | 0.013001 s | 0.012213 s | 0.013134 s | 0.013128 s | 0.013191 s | 0.012972 s |

Tabella A.2

| Generazione  | f=0.55     | f=0.60     | f=0.65     | f=0.70     | f=0.75     | f=0.80     | f=0.85     | f=0.90     | f=0.95     | f=1        |
|--------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1            | 10         | 10         | 10         | 10         | 10         | 10         | 10         | 10         | 10         | 10         |
| 2            | 5          | 5          | 5          | 4          | 4          | 2          | 1          | 1          | 1          | 0          |
| 3            | 3          | 3          | 2          | 1          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 4            | 1          | 1          | 1          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 5            | 0          | 0          | 1          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 6            | 0          | 0          | 1          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 7            | 0          | 0          | 1          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 8            | 0          | 0          | 1          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 9            | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 10           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 11           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 12           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 13           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 14           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 15           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 16           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 17           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 18           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 19           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 20           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 21           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 22           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 23           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 24           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 25           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 26           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 27           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 28           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 29           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 30           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 31           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 32           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 33           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 34           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 35           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 36           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| elapsed time | 0.011530 s | 0.013812 s | 0.014196 s | 0.013196 s | 0.013951 s | 0.011243 s | 0.012732 s | 0.012792 s | 0.011604 s | 0.011730 s |

Tabella A.3

| Generazione | f=0 |   | f=0.05 |   | f=0.10 |   | f=0.15 |   | f=0.20 |   | f=0.25 |   | f=0.30 |   | f=0.35 |   | f=0.40 |   | f=0.45 |   | f=0.50 |   |
|-------------|-----|---|--------|---|--------|---|--------|---|--------|---|--------|---|--------|---|--------|---|--------|---|--------|---|--------|---|
|             | x   | t | x      | t | x      | t | x      | t | x      | t | x      | t | x      | t | x      | t | x      | t | x      | t | x      | t |
| 1           | 0   | 0 | 0      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 2      | 0 | 2      | 0 | 3      | 0 | 4      | 0 | 5      | 0 | 5      | 0 |
| 2           | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 |
| 3           | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 2 | 1      | 3 | 1      | 3 | 1      | 2 | 1      | 2 | 1      | 2 | 1      | 1 |
| 4           | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 5           | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 |
| 6           | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 |
| 7           | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 |
| 8           | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 |
| 9           | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 10          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 11          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 |
| 12          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 13          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 14          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 |
| 15          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 16          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 |
| 17          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 |
| 18          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 19          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 20          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 21          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 |
| 22          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 |
| 23          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 24          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 25          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 |
| 26          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 27          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 |
| 28          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 |
| 29          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 |
| 30          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 |
| 31          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 |
| 32          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 |
| 33          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 |
| 34          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 |
| 35          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 |

Tabella A.4

| Generazione | f=0.55 |   | f=0.60 |   | f=0.65 |   | f=0.70 |   | f=0.75 |   | f=0.80 |   | f=0.85 |   | f=0.90 |   | f=0.95 |   | f=1 |   |   |   |
|-------------|--------|---|--------|---|--------|---|--------|---|--------|---|--------|---|--------|---|--------|---|--------|---|-----|---|---|---|
|             | f      | t | f      | t | f      | t | f      | t | f      | t | f      | t | f      | t | f      | t | f      | t | f   | t |   |   |
| 1           | 0      | 5 | 0      | 5 | 0      | 5 | 0      | 6 | 0      | 6 | 0      | 6 | 0      | 8 | 0      | 9 | 0      | 9 | 0   | 9 | 0 |   |
| 2           | 0      | 2 | 0      | 2 | 0      | 3 | 0      | 3 | 0      | 4 | 0      | 4 | 0      | 2 | 0      | 1 | 0      | 1 | 0   | 1 | 0 |   |
| 3           | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1   | 0 | 1 | 0 |
| 4           | 0      | 1 | 0      | 1 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0   | 0 | 0 | 0 |
| 5           | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1   | 1 | 1 | 1 |
| 6           | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1   | 1 | 1 | 1 |
| 7           | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1   | 1 | 1 | 1 |
| 8           | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1   | 1 | 1 | 1 |
| 9           | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0   | 0 | 0 | 0 |
| 10          | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0   | 0 | 0 | 0 |
| 11          | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1   | 0 | 1 | 0 |
| 12          | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0   | 0 | 0 | 0 |
| 13          | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0   | 0 | 0 | 0 |
| 14          | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1   | 0 | 1 | 0 |
| 15          | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0   | 0 | 0 | 0 |
| 16          | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1   | 0 | 1 | 0 |
| 17          | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1   | 0 | 1 | 0 |
| 18          | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0   | 0 | 0 | 0 |
| 19          | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0   | 0 | 0 | 0 |
| 20          | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0   | 0 | 0 | 0 |
| 21          | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1   | 0 | 1 | 0 |
| 22          | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1   | 0 | 1 | 0 |
| 23          | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0   | 0 | 0 | 0 |
| 24          | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0   | 0 | 0 | 0 |
| 25          | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1   | 0 | 1 | 0 |
| 26          | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0   | 0 | 0 | 0 |
| 27          | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1   | 0 | 1 | 0 |
| 28          | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1   | 0 | 1 | 0 |
| 29          | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1   | 0 | 1 | 0 |
| 30          | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1   | 0 | 1 | 0 |
| 31          | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1   | 0 | 1 | 0 |
| 32          | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1   | 0 | 1 | 0 |
| 33          | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1   | 0 | 1 | 0 |
| 34          | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1   | 0 | 1 | 0 |
| 35          | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1   | 0 | 1 | 0 |



Tabella B.1

| Generazione  | f=0      | f=0.05   | f=0.10   | f=0.15   | f=0.20   | f=0.25   | f=0.30   | f=0.35   | f=0.40   | f=0.45   | f=0.50   |
|--------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1            | 10       | 10       | 10       | 10       | 10       | 10       | 10       | 10       | 10       | 10       | 10       |
| 2            | 20       | 18       | 18       | 18       | 16       | 16       | 16       | 14       | 12       | 10       | 10       |
| 3            | 40       | 36       | 36       | 34       | 28       | 26       | 24       | 20       | 18       | 12       | 10       |
| 4            | 0        | 2        | 6        | 8        | 6        | 8        | 16       | 20       | 16       | 6        | 8        |
| 5            | 0        | 4        | 12       | 18       | 8        | 12       | 20       | 30       | 18       | 4        | 8        |
| 6            | 0        | 0        | 2        | 8        | 6        | 8        | 14       | 26       | 16       | 6        | 12       |
| 7            | 0        | 0        | 2        | 2        | 2        | 6        | 12       | 22       | 12       | 4        | 8        |
| 8            | 0        | 0        | 0        | 2        | 0        | 4        | 8        | 20       | 14       | 2        | 10       |
| 9            | 0        | 0        | 0        | 2        | 0        | 2        | 8        | 10       | 14       | 2        | 8        |
| 10           | 0        | 0        | 0        | 4        | 0        | 2        | 12       | 20       | 14       | 2        | 8        |
| 11           | 0        | 0        | 0        | 6        | 0        | 4        | 12       | 22       | 14       | 2        | 8        |
| 12           | 0        | 0        | 0        | 4        | 0        | 2        | 8        | 22       | 10       | 0        | 12       |
| 13           | 0        | 0        | 0        | 6        | 0        | 2        | 14       | 30       | 16       | 0        | 12       |
| 14           | 0        | 0        | 0        | 12       | 0        | 2        | 28       | 44       | 16       | 0        | 6        |
| 15           | 0        | 0        | 0        | 8        | 0        | 0        | 26       | 32       | 12       | 0        | 10       |
| 16           | 0        | 0        | 0        | 12       | 0        | 0        | 40       | 46       | 12       | 0        | 8        |
| 17           | 0        | 0        | 0        | 2        | 0        | 0        | 24       | 36       | 8        | 0        | 6        |
| 18           | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 14       | 24       | 8        | 0        | 6        |
| 19           | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 18       | 28       | 12       | 0        | 4        |
| 20           | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 28       | 42       | 18       | 0        | 6        |
| 21           | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 36       | 60       | 22       | 0        | 8        |
| 22           | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 20       | 34       | 16       | 0        | 6        |
| 23           | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 16       | 16       | 16       | 0        | 10       |
| 24           | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 28       | 16       | 24       | 0        | 6        |
| 25           | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 34       | 16       | 24       | 0        | 6        |
| 26           | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 16       | 12       | 18       | 0        | 10       |
| 27           | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 26       | 14       | 20       | 0        | 10       |
| 28           | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 14       | 10       | 14       | 0        | 10       |
| 29           | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 2        | 8        | 8        | 0        | 10       |
| 30           | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 2        | 8        | 10       | 0        | 8        |
| 31           | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 10       | 10       | 0        | 2        |
| 32           | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 16       | 4        | 0        | 2        |
| 33           | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 16       | 2        | 0        | 2        |
| 34           | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 8        | 0        | 0        | 4        |
| 35           | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 6        | 0        | 0        | 2        |
| 36           | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 4        | 0        | 0        | 0        |
| elapsed time | 0.014371 | 0.021981 | 0.018091 | 0.019937 | 0.012568 | 0.014635 | 0.020451 | 0.038287 | 0.022831 | 0.013125 | 0.033998 |

Tabella B.2

| Generazione  | f=0.55     | f=0.60     | f=0.65     | f=0.70     | f=0.75     | f=0.80     | f=0.85     | f=0.90     | f=0.95     | f=1        |
|--------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1            | 10         | 10         | 10         | 10         | 10         | 10         | 10         | 10         | 10         | 10         |
| 2            | 10         | 10         | 10         | 8          | 8          | 4          | 2          | 2          | 2          | 0          |
| 3            | 10         | 10         | 8          | 4          | 2          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 4            | 10         | 12         | 12         | 6          | 4          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 5            | 8          | 8          | 12         | 2          | 2          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 6            | 10         | 10         | 18         | 2          | 2          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 7            | 12         | 12         | 28         | 2          | 4          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 8            | 16         | 20         | 32         | 4          | 4          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 9            | 18         | 20         | 52         | 4          | 6          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 10           | 16         | 10         | 30         | 2          | 4          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 11           | 8          | 4          | 14         | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 12           | 12         | 4          | 22         | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 13           | 8          | 0          | 24         | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 14           | 8          | 0          | 16         | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 15           | 8          | 0          | 18         | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 16           | 4          | 0          | 8          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 17           | 2          | 0          | 10         | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 18           | 4          | 0          | 8          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 19           | 8          | 0          | 4          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 20           | 4          | 0          | 4          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 21           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 22           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 23           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 24           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 25           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 26           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 27           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 28           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 29           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 30           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 31           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 32           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 33           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 34           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 35           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 36           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| elapsed time | 0.016354 s | 0.014561 s | 0.019390 s | 0.013440 s | 0.013313 s | 0.012628 s | 0.011661 s | 0.012708 s | 0.012879 s | 0.014550 s |

Tabella B.3

| Generazione | f=0 |   | f=0.05 |   | f=0.10 |   | f=0.15 |   | f=0.20 |   | f=0.25 |    | f=0.30 |    | f=0.35 |    | f=0.40 |   | f=0.45 |   | f=0.50 |   |
|-------------|-----|---|--------|---|--------|---|--------|---|--------|---|--------|----|--------|----|--------|----|--------|---|--------|---|--------|---|
|             | x   | t | x      | t | x      | t | x      | t | x      | t | x      | t  | x      | t  | x      | t  | x      | t | x      | t | x      | t |
| 1           | 0   | 0 | 0      | 1 | 0      | 1 | 0      | 1 | 0      | 2 | 0      | 2  | 0      | 2  | 0      | 3  | 0      | 4 | 0      | 5 | 0      | 5 |
| 2           | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 1 | 0      | 2 | 0      | 3  | 0      | 4  | 0      | 4  | 0      | 3 | 0      | 4 | 0      | 5 |
| 3           | 1   | 0 | 1      | 1 | 1      | 3 | 1      | 5 | 1      | 3 | 1      | 4  | 1      | 8  | 1      | 10 | 1      | 8 | 1      | 3 | 1      | 4 |
| 4           | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 1 | 0      | 2 | 0      | 0  | 0      | 6  | 0      | 5  | 0      | 7 | 0      | 4 | 0      | 4 |
| 5           | 1   | 0 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 4 | 1      | 3 | 1      | 4  | 1      | 7  | 1      | 13 | 1      | 8 | 1      | 3 | 1      | 6 |
| 6           | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 3  | 1      | 6  | 1      | 11 | 1      | 6 | 1      | 2 | 1      | 4 |
| 7           | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 0 | 1      | 2  | 1      | 4  | 1      | 10 | 1      | 7 | 1      | 1 | 1      | 5 |
| 8           | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 1  | 1      | 4  | 1      | 5  | 1      | 7 | 1      | 1 | 1      | 4 |
| 9           | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 1      | 0  | 2      | 0  | 0      | 0 | 7      | 0 | 1      | 4 |
| 10          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 0  | 6      | 0  | 9      | 0 | 7      | 0 | 0      | 4 |
| 11          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 2 | 1      | 0 | 1      | 1  | 1      | 4  | 1      | 11 | 1      | 5 | 1      | 0 | 1      | 6 |
| 12          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 1      | 0  | 7      | 0  | 8      | 0 | 0      | 0 | 0      | 6 |
| 13          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 1      | 0  | 0      | 0  | 0      | 2 | 0      | 0 | 0      | 9 |
| 14          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 4 | 1      | 0 | 1      | 13 | 1      | 13 | 1      | 16 | 1      | 6 | 1      | 0 | 1      | 5 |
| 15          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 0  | 6      | 0  | 6      | 0 | 0      | 0 | 0      | 6 |
| 16          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 1 | 1      | 0 | 1      | 12 | 1      | 12 | 1      | 18 | 1      | 4 | 1      | 0 | 1      | 3 |
| 17          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 7  | 1      | 7  | 1      | 12 | 1      | 4 | 1      | 0 | 1      | 3 |
| 18          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 5  | 0      | 10 | 0      | 2 | 0      | 0 | 0      | 4 |
| 19          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 4  | 0      | 7  | 0      | 3 | 0      | 0 | 0      | 1 |
| 20          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 10 | 0      | 12 | 0      | 7 | 0      | 0 | 0      | 2 |
| 21          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 10 | 1      | 17 | 1      | 17 | 1      | 8 | 1      | 0 | 1      | 3 |
| 22          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 8  | 1      | 8  | 1      | 8  | 1      | 8 | 1      | 0 | 1      | 5 |
| 23          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 2  | 0      | 8  | 0      | 4 | 0      | 0 | 0      | 7 |
| 24          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 0  | 11     | 0  | 12     | 0 | 0      | 0 | 0      | 3 |
| 25          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 8  | 1      | 8  | 1      | 6  | 1      | 9 | 1      | 0 | 1      | 5 |
| 26          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 3  | 0      | 5  | 0      | 8 | 0      | 0 | 0      | 5 |
| 27          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 7  | 1      | 7  | 1      | 5  | 1      | 7 | 1      | 0 | 1      | 5 |
| 28          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 1  | 1      | 1  | 4      | 1  | 4      | 1 | 0      | 1 | 1      | 5 |
| 29          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 1  | 1      | 1  | 4      | 1  | 5      | 1 | 0      | 1 | 1      | 4 |
| 30          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 5  | 1      | 5 | 1      | 0 | 1      | 1 |
| 31          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 8  | 1      | 2 | 1      | 0 | 1      | 1 |
| 32          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 8  | 1      | 1 | 1      | 0 | 1      | 1 |
| 33          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 4  | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 2 |
| 34          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 3  | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 1 |
| 35          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 2  | 1      | 1 | 0      | 1 | 0      | 2 |

Tabella B.4

| Generazione | f=0.55 |    | f=0.60 |    | f=0.65 |    | f=0.70 |   | f=0.75 |   | f=0.80 |   | f=0.85 |   | f=0.90 |   | f=0.95 |   | f=1 |    |
|-------------|--------|----|--------|----|--------|----|--------|---|--------|---|--------|---|--------|---|--------|---|--------|---|-----|----|
|             | r      | t  | r      | t  | r      | t  | r      | t | r      | t | r      | t | r      | t | r      | t | r      | t | r   | t  |
| 1           | 0      | 5  | 0      | 5  | 0      | 5  | 0      | 6 | 0      | 6 | 0      | 6 | 0      | 8 | 0      | 9 | 0      | 9 | 0   | 10 |
| 2           | 0      | 5  | 0      | 5  | 0      | 6  | 0      | 6 | 0      | 7 | 0      | 4 | 0      | 4 | 0      | 2 | 0      | 2 | 0   | 0  |
| 3           | 1      | 5  | 1      | 6  | 1      | 6  | 1      | 3 | 1      | 2 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1   | 0  |
| 4           | 0      | 6  | 0      | 8  | 0      | 6  | 0      | 5 | 0      | 3 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0   | 0  |
| 5           | 1      | 5  | 1      | 5  | 1      | 9  | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1   | 1  |
| 6           | 1      | 6  | 1      | 6  | 1      | 14 | 1      | 1 | 1      | 2 | 1      | 0 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1   | 1  |
| 7           | 1      | 8  | 1      | 10 | 1      | 16 | 1      | 2 | 1      | 2 | 1      | 0 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1   | 1  |
| 8           | 1      | 9  | 1      | 10 | 1      | 26 | 1      | 2 | 1      | 3 | 1      | 0 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1   | 1  |
| 9           | 0      | 10 | 0      | 15 | 0      | 37 | 0      | 3 | 0      | 4 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0   | 0  |
| 10          | 0      | 12 | 0      | 8  | 0      | 23 | 0      | 2 | 0      | 4 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0   | 0  |
| 11          | 1      | 6  | 1      | 2  | 1      | 11 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1   | 0  |
| 12          | 0      | 8  | 0      | 4  | 0      | 10 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0   | 0  |
| 13          | 0      | 4  | 0      | 0  | 0      | 16 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0   | 0  |
| 14          | 1      | 4  | 1      | 0  | 1      | 9  | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1   | 1  |
| 15          | 0      | 6  | 0      | 0  | 0      | 14 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0   | 0  |
| 16          | 1      | 1  | 1      | 0  | 1      | 5  | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1   | 1  |
| 17          | 1      | 2  | 1      | 0  | 1      | 4  | 1      | 1 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1   | 1  |
| 18          | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 6  | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0   | 0  |
| 19          | 0      | 6  | 0      | 0  | 0      | 2  | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0   | 0  |
| 20          | 0      | 4  | 0      | 0  | 0      | 4  | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0   | 0  |
| 21          | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1   | 1  |
| 22          | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1   | 1  |
| 23          | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0   | 0  |
| 24          | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0   | 0  |
| 25          | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1   | 1  |
| 26          | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0   | 0  |
| 27          | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1   | 1  |
| 28          | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1   | 1  |
| 29          | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1   | 1  |
| 30          | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1   | 1  |
| 31          | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1   | 1  |
| 32          | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1   | 1  |
| 33          | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1   | 1  |
| 34          | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1   | 1  |
| 35          | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 0 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1      | 1 | 1   | 1  |

Tabella C.1

| Generazione  | f=0        | f=0.05     | f=0.10     | f=0.15     | f=0.20     | f=0.25     | f=0.30     | f=0.35     | f=0.40     | f=0.45     | f=0.50     |
|--------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1            | 20         | 20         | 20         | 20         | 20         | 20         | 20         | 20         | 20         | 20         | 20         |
| 2            | 20         | 19         | 19         | 18         | 16         | 16         | 15         | 14         | 13         | 11         | 10         |
| 3            | 20         | 19         | 19         | 16         | 14         | 13         | 10         | 9          | 9          | 8          | 6          |
| 4            | 0          | 0          | 2          | 0          | 1          | 2          | 4          | 6          | 6          | 5          | 3          |
| 5            | 0          | 0          | 2          | 0          | 1          | 2          | 4          | 6          | 4          | 2          | 1          |
| 6            | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 1          | 1          | 1          | 1          | 0          |
| 7            | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 1          | 0          | 0          | 0          |
| 8            | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 1          | 0          | 0          | 0          |
| 9            | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 10           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 11           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 12           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 13           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 14           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 15           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 16           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 17           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 18           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 19           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 20           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 21           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 22           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 23           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 24           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 25           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 26           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 27           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 28           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 29           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 30           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 31           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 32           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 33           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 34           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 35           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 36           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| elapsed time | 0.012038 s | 0.011627 s | 0.014440 s | 0.013036 s | 0.012984 s | 0.017001 s | 0.014485 s | 0.012186 s | 0.012508 s | 0.013323 s | 0.012406 s |

Tabella C.2

| Generazione  | f=0.55     | f=0.60     | f=0.65     | f=0.70     | f=0.75     | f=0.80     | f=0.85     | f=0.90     | f=0.95     | f=1       |
|--------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|-----------|
| 1            | 20         | 20         | 20         | 20         | 20         | 20         | 20         | 20         | 20         | 20        |
| 2            | 10         | 10         | 9          | 6          | 5          | 2          | 1          | 1          | 1          | 0         |
| 3            | 5          | 4          | 3          | 2          | 1          | 1          | 0          | 0          | 0          | 0         |
| 4            | 4          | 3          | 1          | 2          | 0          | 1          | 0          | 0          | 0          | 0         |
| 5            | 2          | 1          | 0          | 1          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0         |
| 6            | 1          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0         |
| 7            | 1          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0         |
| 8            | 1          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0         |
| 9            | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0         |
| 10           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0         |
| 11           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0         |
| 12           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0         |
| 13           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0         |
| 14           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0         |
| 15           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0         |
| 16           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0         |
| 17           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0         |
| 18           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0         |
| 19           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0         |
| 20           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0         |
| 21           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0         |
| 22           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0         |
| 23           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0         |
| 24           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0         |
| 25           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0         |
| 26           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0         |
| 27           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0         |
| 28           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0         |
| 29           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0         |
| 30           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0         |
| 31           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0         |
| 32           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0         |
| 33           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0         |
| 34           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0         |
| 35           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0         |
| 36           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0         |
| elapsed time | 0.013788 s | 0.013022 s | 0.012117 s | 0.013535 s | 0.013123 s | 0.011862 s | 0.012435 s | 0.012765 s | 0.011614 s | 0.11742 s |

Tabella C.3

| Generazione | f=0 |   | f=0.05 |   | f=0.10 |   | f=0.15 |   | f=0.20 |   | f=0.25 |   | f=0.30 |   | f=0.35 |   | f=0.40 |   | f=0.45 |   | f=0.50 |   |
|-------------|-----|---|--------|---|--------|---|--------|---|--------|---|--------|---|--------|---|--------|---|--------|---|--------|---|--------|---|
|             | x   | t | x      | t | x      | t | x      | t | x      | t | x      | t | x      | t | x      | t | x      | t | x      | t | x      | t |
| 1           | 0   | 0 | 0      | 1 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 2           | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 3           | 1   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 4           | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 5           | 1   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 6           | 1   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 7           | 1   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 8           | 1   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 9           | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 10          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 11          | 1   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 12          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 13          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 14          | 1   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 15          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 16          | 1   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 17          | 1   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 18          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 19          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 20          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 21          | 1   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 22          | 1   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 23          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 24          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 25          | 1   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 26          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 27          | 1   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 28          | 1   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 29          | 1   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 30          | 1   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 31          | 1   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 32          | 1   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 33          | 1   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 34          | 1   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |
| 35          | 1   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 |

Tabella C.4

| Generazione | f=0.55 |    | f=0.60 |    | f=0.65 |    | f=0.70 |    | f=0.75 |    | f=0.80 |    | f=0.85 |    | f=0.90 |    | f=0.95 |    | f=1 |    |
|-------------|--------|----|--------|----|--------|----|--------|----|--------|----|--------|----|--------|----|--------|----|--------|----|-----|----|
|             | x      | t  | x      | t  | x      | t  | x      | t  | x      | t  | x      | t  | x      | t  | x      | t  | x      | t  | x   | t  |
| 1           | 0      | 10 | 0      | 10 | 0      | 11 | 0      | 14 | 0      | 15 | 0      | 18 | 0      | 19 | 0      | 19 | 0      | 19 | 0   | 20 |
| 2           | 0      | 5  | 0      | 6  | 0      | 6  | 0      | 4  | 0      | 4  | 0      | 1  | 0      | 1  | 0      | 1  | 0      | 1  | 0   | 0  |
| 3           | 1      | 4  | 1      | 3  | 1      | 1  | 1      | 2  | 1      | 0  | 1      | 1  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1   | 0  |
| 4           | 0      | 2  | 0      | 2  | 0      | 1  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 1  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0   | 0  |
| 5           | 1      | 1  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1   | 0  |
| 6           | 1      | 1  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1   | 0  |
| 7           | 1      | 1  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1   | 0  |
| 8           | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1   | 0  |
| 9           | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0   | 0  |
| 10          | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0   | 0  |
| 11          | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1   | 0  |
| 12          | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0   | 0  |
| 13          | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0   | 0  |
| 14          | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1   | 0  |
| 15          | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0   | 0  |
| 16          | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1   | 0  |
| 17          | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1   | 0  |
| 18          | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0   | 0  |
| 19          | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0   | 0  |
| 20          | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0   | 0  |
| 21          | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1   | 0  |
| 22          | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1   | 0  |
| 23          | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0   | 0  |
| 24          | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0   | 0  |
| 25          | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1   | 0  |
| 26          | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0   | 0  |
| 27          | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1   | 0  |
| 28          | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1   | 0  |
| 29          | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1   | 0  |
| 30          | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1   | 0  |
| 31          | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1   | 0  |
| 32          | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1   | 0  |
| 33          | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1   | 0  |
| 34          | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1   | 0  |
| 35          | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1   | 0  |



Tabella D.1

| Generazione  | f=0        | f=0.05     | f=0.10     | f=0.15     | f=0.20     | f=0.25     | f=0.30     | f=0.35     | f=0.40     | f=0.45     | f=0.50     |
|--------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1            | 20         | 20         | 20         | 20         | 20         | 20         | 20         | 20         | 20         | 20         | 20         |
| 2            | 40         | 38         | 38         | 36         | 32         | 32         | 30         | 28         | 26         | 22         | 20         |
| 3            | 80         | 76         | 72         | 66         | 58         | 54         | 42         | 34         | 28         | 24         | 22         |
| 4            | 0          | 6          | 16         | 28         | 32         | 34         | 30         | 26         | 22         | 20         | 20         |
| 5            | 0          | 8          | 26         | 44         | 42         | 40         | 36         | 32         | 26         | 22         | 18         |
| 6            | 0          | 0          | 2          | 4          | 10         | 12         | 26         | 30         | 26         | 22         | 22         |
| 7            | 0          | 0          | 0          | 0          | 4          | 10         | 12         | 12         | 26         | 30         | 28         |
| 8            | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 6          | 6          | 10         | 14         | 28         | 32         |
| 9            | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 2          | 8          | 8          | 16         | 26         | 30         |
| 10           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 2          | 10         | 8          | 16         | 22         | 20         |
| 11           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 4          | 16         | 6          | 22         | 26         | 20         |
| 12           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 2          | 10         | 4          | 16         | 14         | 14         |
| 13           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 4          | 16         | 8          | 22         | 18         | 14         |
| 14           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 6          | 24         | 12         | 30         | 20         | 20         |
| 15           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 2          | 16         | 10         | 30         | 24         | 26         |
| 16           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 2          | 22         | 14         | 40         | 28         | 24         |
| 17           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 10         | 8          | 34         | 32         | 28         |
| 18           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 8          | 6          | 26         | 26         | 30         |
| 19           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 12         | 8          | 26         | 30         | 32         |
| 20           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 16         | 14         | 42         | 32         | 24         |
| 21           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 20         | 18         | 56         | 42         | 30         |
| 22           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 12         | 14         | 46         | 42         | 24         |
| 23           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 6          | 10         | 20         | 34         | 24         |
| 24           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 6          | 16         | 20         | 56         | 22         |
| 25           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 10         | 18         | 24         | 54         | 20         |
| 26           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 2          | 16         | 16         | 24         | 58         | 10         |
| 27           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 20         | 28         | 62         | 16         |
| 28           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 14         | 34         | 62         | 12         |
| 29           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 6          | 26         | 76         | 18         |
| 30           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 8          | 22         | 62         | 24         |
| 31           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 8          | 28         | 60         | 22         |
| 32           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 4          | 22         | 48         | 22         |
| 33           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 2          | 28         | 36         | 26         |
| 34           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 2          | 24         | 32         | 34         |
| 35           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 2          | 18         | 38         | 28         |
| 36           | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 14         | 22         | 28         |
| elapsed time | 0.011255 s | 0.011938 s | 0.012354 s | 0.013080 s | 0.012823 s | 0.017785 s | 0.015511 s | 0.030748 s | 0.032285 s | 0.031656 s | 0.033363 s |

Tabella D.2

| Generazione  | f=0.55     | f=0.60     | f=0.65     | f=0.70     | f=0.75     | f=0.80     | f=0.85     | f=0.90     | f=0.95     | f=1        |
|--------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1            | 20         | 20         | 20         | 20         | 20         | 20         | 20         | 20         | 20         | 20         |
| 2            | 20         | 20         | 18         | 12         | 10         | 4          | 2          | 2          | 2          | 0          |
| 3            | 18         | 16         | 14         | 8          | 6          | 2          | 2          | 2          | 2          | 0          |
| 4            | 22         | 22         | 20         | 10         | 8          | 4          | 4          | 4          | 4          | 0          |
| 5            | 18         | 14         | 8          | 4          | 4          | 2          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 6            | 20         | 14         | 8          | 4          | 6          | 2          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 7            | 30         | 20         | 10         | 8          | 6          | 4          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 8            | 38         | 30         | 10         | 12         | 8          | 4          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 9            | 46         | 38         | 16         | 20         | 14         | 6          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 10           | 34         | 24         | 6          | 18         | 4          | 2          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 11           | 36         | 12         | 2          | 4          | 2          | 2          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 12           | 44         | 12         | 2          | 4          | 2          | 4          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 13           | 36         | 14         | 2          | 2          | 4          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 14           | 34         | 14         | 0          | 2          | 2          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 15           | 38         | 20         | 0          | 4          | 2          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 16           | 32         | 20         | 0          | 2          | 2          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 17           | 36         | 28         | 0          | 2          | 4          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 18           | 42         | 32         | 0          | 4          | 6          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 19           | 36         | 16         | 0          | 2          | 2          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 20           | 54         | 16         | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 21           | 44         | 10         | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 22           | 56         | 8          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 23           | 68         | 12         | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 24           | 62         | 8          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 25           | 42         | 6          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 26           | 46         | 6          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 27           | 46         | 8          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 28           | 50         | 8          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 29           | 48         | 8          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 30           | 54         | 10         | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 31           | 52         | 14         | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 32           | 56         | 14         | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 33           | 48         | 20         | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 34           | 48         | 24         | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 35           | 52         | 26         | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| 36           | 56         | 28         | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| elapsed time | 0.031803 s | 0.029626 s | 0.013951 s | 0.026011 s | 0.015342 s | 0.014068 s | 0.012976 s | 0.013504 s | 0.014361 s | 0.013504 s |

Tabella D.3

| Generazione | f=0 |   | f=0.05 |   | f=0.10 |   | f=0.15 |    | f=0.20 |    | f=0.25 |    | f=0.30 |    | f=0.35 |    | f=0.40 |    | f=0.45 |    | f=0.50 |    |
|-------------|-----|---|--------|---|--------|---|--------|----|--------|----|--------|----|--------|----|--------|----|--------|----|--------|----|--------|----|
|             | f   | t | f      | t | f      | t | f      | t  | f      | t  | f      | t  | f      | t  | f      | t  | f      | t  | f      | t  | f      | t  |
| 1           | 0   | 0 | 0      | 0 | 1      | 0 | 0      | 4  | 0      | 4  | 0      | 4  | 0      | 5  | 0      | 6  | 0      | 7  | 0      | 9  | 0      | 10 |
| 2           | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 2 | 0      | 3  | 0      | 3  | 0      | 5  | 0      | 9  | 0      | 11 | 0      | 12 | 0      | 10 | 0      | 9  |
| 3           | 1   | 0 | 0      | 1 | 3      | 1 | 14     | 1  | 16     | 1  | 17     | 1  | 15     | 1  | 13     | 1  | 11     | 1  | 10     | 1  | 10     |    |
| 4           | 0   | 0 | 0      | 2 | 0      | 3 | 0      | 11 | 0      | 14 | 0      | 14 | 0      | 12 | 0      | 10 | 0      | 9  | 0      | 9  | 0      | 11 |
| 5           | 1   | 0 | 0      | 1 | 1      | 1 | 2      | 1  | 5      | 1  | 6      | 1  | 13     | 1  | 15     | 1  | 13     | 1  | 11     | 1  | 11     |    |
| 6           | 1   | 0 | 0      | 1 | 0      | 1 | 0      | 1  | 2      | 1  | 5      | 1  | 6      | 1  | 6      | 1  | 13     | 1  | 15     | 1  | 14     |    |
| 7           | 1   | 0 | 0      | 1 | 0      | 1 | 0      | 1  | 0      | 1  | 3      | 1  | 3      | 1  | 5      | 1  | 7      | 1  | 14     | 1  | 16     |    |
| 8           | 1   | 0 | 0      | 1 | 0      | 1 | 0      | 1  | 0      | 1  | 0      | 1  | 4      | 1  | 4      | 1  | 8      | 1  | 13     | 1  | 15     |    |
| 9           | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 3      | 0  | 4      | 0  | 8      | 0  | 15     | 0  | 20     |    |
| 10          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 2      | 0  | 5      | 0  | 5      | 0  | 9      | 0  | 10     |    |
| 11          | 1   | 0 | 0      | 1 | 0      | 1 | 0      | 1  | 0      | 1  | 1      | 1  | 5      | 1  | 2      | 1  | 8      | 1  | 7      | 1  | 7      |    |
| 12          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 2      | 0  | 0      | 0  | 5      | 0  | 5      | 0  | 7      |    |
| 13          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 4      | 0  | 2      | 0  | 7      | 0  | 8      | 0  | 4      |    |
| 14          | 1   | 0 | 0      | 1 | 0      | 1 | 0      | 1  | 0      | 1  | 1      | 1  | 8      | 1  | 5      | 1  | 15     | 1  | 12     | 1  | 13     |    |
| 15          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 5      | 0  | 3      | 0  | 10     | 0  | 10     | 0  | 14     |    |
| 16          | 1   | 0 | 0      | 1 | 0      | 1 | 0      | 1  | 0      | 1  | 0      | 1  | 5      | 1  | 4      | 1  | 17     | 1  | 16     | 1  | 14     |    |
| 17          | 1   | 0 | 0      | 1 | 0      | 1 | 0      | 1  | 0      | 1  | 0      | 1  | 4      | 1  | 3      | 1  | 13     | 1  | 13     | 1  | 15     |    |
| 18          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 2      | 0  | 2      | 0  | 13     | 0  | 11     | 0  | 14     |    |
| 19          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 4      | 0  | 4      | 0  | 5      | 0  | 14     | 0  | 20     |    |
| 20          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 6      | 0  | 5      | 0  | 14     | 0  | 11     | 0  | 9      |    |
| 21          | 1   | 0 | 0      | 1 | 0      | 1 | 0      | 1  | 0      | 1  | 0      | 1  | 6      | 1  | 7      | 1  | 23     | 1  | 21     | 1  | 12     |    |
| 22          | 1   | 0 | 0      | 1 | 0      | 1 | 0      | 1  | 0      | 1  | 0      | 1  | 3      | 1  | 5      | 1  | 10     | 1  | 17     | 1  | 12     |    |
| 23          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 3      | 0  | 2      | 0  | 10     | 0  | 6      | 0  | 13     |    |
| 24          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 1      | 0  | 7      | 0  | 8      | 0  | 29     | 0  | 12     |    |
| 25          | 1   | 0 | 0      | 1 | 0      | 1 | 0      | 1  | 0      | 1  | 0      | 1  | 1      | 1  | 8      | 1  | 12     | 1  | 29     | 1  | 5      |    |
| 26          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 2      | 0  | 6      | 0  | 10     | 0  | 27     | 0  | 2      |    |
| 27          | 1   | 0 | 0      | 1 | 0      | 1 | 0      | 1  | 0      | 1  | 0      | 1  | 0      | 1  | 7      | 1  | 17     | 1  | 31     | 1  | 6      |    |
| 28          | 1   | 0 | 0      | 1 | 0      | 1 | 0      | 1  | 0      | 1  | 0      | 1  | 0      | 1  | 3      | 1  | 13     | 1  | 38     | 1  | 9      |    |
| 29          | 1   | 0 | 0      | 1 | 0      | 1 | 0      | 1  | 0      | 1  | 0      | 1  | 0      | 1  | 4      | 1  | 11     | 1  | 31     | 1  | 12     |    |
| 30          | 1   | 0 | 0      | 1 | 0      | 1 | 0      | 1  | 0      | 1  | 0      | 1  | 0      | 1  | 4      | 1  | 14     | 1  | 30     | 1  | 11     |    |
| 31          | 1   | 0 | 0      | 1 | 0      | 1 | 0      | 1  | 0      | 1  | 0      | 1  | 0      | 1  | 2      | 1  | 11     | 1  | 24     | 1  | 11     |    |
| 32          | 1   | 0 | 0      | 1 | 0      | 1 | 0      | 1  | 0      | 1  | 0      | 1  | 0      | 1  | 1      | 1  | 14     | 1  | 18     | 1  | 13     |    |
| 33          | 1   | 0 | 0      | 1 | 0      | 1 | 0      | 1  | 0      | 1  | 0      | 1  | 0      | 1  | 1      | 1  | 14     | 1  | 16     | 1  | 17     |    |
| 34          | 1   | 0 | 0      | 1 | 0      | 1 | 0      | 1  | 0      | 1  | 0      | 1  | 0      | 1  | 1      | 1  | 9      | 1  | 19     | 1  | 14     |    |
| 35          | 1   | 0 | 0      | 1 | 0      | 1 | 0      | 1  | 0      | 1  | 0      | 1  | 0      | 1  | 1      | 0  | 1      | 7  | 1      | 11 | 1      | 14 |

Tabella D.4

| Generazione | f=0.55 |    | f=0.60 |    | f=0.65 |    | f=0.70 |    | f=0.75 |    | f=0.80 |    | f=0.85 |    | f=0.90 |    | f=0.95 |    | f=1 |    |
|-------------|--------|----|--------|----|--------|----|--------|----|--------|----|--------|----|--------|----|--------|----|--------|----|-----|----|
|             | x      | t  | x      | t  | x      | t  | x      | t  | x      | t  | x      | t  | x      | t  | x      | t  | x      | t  | x   | t  |
| 1           | 0      | 10 | 0      | 10 | 0      | 11 | 0      | 14 | 0      | 15 | 0      | 18 | 0      | 19 | 0      | 19 | 0      | 19 | 0   | 20 |
| 2           | 0      | 11 | 0      | 12 | 0      | 11 | 0      | 8  | 0      | 7  | 0      | 3  | 0      | 1  | 0      | 1  | 0      | 1  | 0   | 0  |
| 3           | 1      | 11 | 1      | 11 | 1      | 10 | 1      | 5  | 1      | 4  | 1      | 2  | 1      | 2  | 1      | 2  | 1      | 2  | 1   | 0  |
| 4           | 0      | 13 | 0      | 15 | 0      | 16 | 0      | 8  | 0      | 6  | 0      | 3  | 0      | 4  | 0      | 4  | 0      | 4  | 0   | 0  |
| 5           | 1      | 10 | 1      | 7  | 1      | 4  | 1      | 2  | 1      | 3  | 1      | 1  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1   | 0  |
| 6           | 1      | 15 | 1      | 10 | 1      | 5  | 1      | 4  | 1      | 3  | 1      | 2  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1   | 0  |
| 7           | 1      | 19 | 1      | 15 | 1      | 5  | 1      | 6  | 1      | 4  | 1      | 2  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1   | 0  |
| 8           | 1      | 23 | 1      | 19 | 1      | 8  | 1      | 10 | 1      | 7  | 1      | 3  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1   | 0  |
| 9           | 0      | 29 | 0      | 26 | 0      | 13 | 0      | 11 | 0      | 12 | 0      | 5  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0   | 0  |
| 10          | 0      | 16 | 0      | 18 | 0      | 5  | 0      | 16 | 0      | 3  | 0      | 1  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0   | 0  |
| 11          | 1      | 22 | 1      | 6  | 1      | 1  | 1      | 2  | 1      | 1  | 1      | 2  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1   | 0  |
| 12          | 0      | 26 | 0      | 5  | 0      | 1  | 0      | 3  | 0      | 0  | 0      | 4  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0   | 0  |
| 13          | 0      | 19 | 0      | 7  | 0      | 2  | 0      | 1  | 0      | 3  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0   | 0  |
| 14          | 1      | 19 | 1      | 10 | 1      | 0  | 1      | 2  | 1      | 1  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1   | 0  |
| 15          | 0      | 22 | 0      | 10 | 0      | 0  | 0      | 3  | 0      | 1  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0   | 0  |
| 16          | 1      | 18 | 1      | 14 | 1      | 0  | 1      | 1  | 1      | 2  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1   | 0  |
| 17          | 1      | 21 | 1      | 16 | 1      | 0  | 1      | 2  | 1      | 3  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1   | 0  |
| 18          | 0      | 24 | 0      | 24 | 0      | 0  | 0      | 3  | 0      | 5  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0   | 0  |
| 19          | 0      | 9  | 0      | 8  | 0      | 0  | 0      | 2  | 0      | 2  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0   | 0  |
| 20          | 0      | 32 | 0      | 11 | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0   | 0  |
| 21          | 1      | 28 | 1      | 4  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1   | 0  |
| 22          | 1      | 34 | 1      | 6  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1   | 0  |
| 23          | 0      | 37 | 0      | 8  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0   | 0  |
| 24          | 0      | 41 | 0      | 5  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0   | 0  |
| 25          | 1      | 23 | 1      | 3  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1   | 0  |
| 26          | 0      | 23 | 0      | 2  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0      | 0  | 0   | 0  |
| 27          | 1      | 25 | 1      | 4  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1   | 0  |
| 28          | 1      | 24 | 1      | 4  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1   | 0  |
| 29          | 1      | 27 | 1      | 5  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1   | 0  |
| 30          | 1      | 26 | 1      | 7  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1   | 0  |
| 31          | 1      | 28 | 1      | 7  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1   | 0  |
| 32          | 1      | 24 | 1      | 10 | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1   | 0  |
| 33          | 1      | 24 | 1      | 12 | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1   | 0  |
| 34          | 1      | 26 | 1      | 13 | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1   | 0  |
| 35          | 1      | 28 | 1      | 14 | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1      | 0  | 1   | 0  |

**Tabella E.1**

| Generazione         | f=0        | f=0.05     | f=0.10     | f=0.15     | f=0.20     | f=0.25     | f=0.30        |
|---------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|---------------|
| 1                   | 10         | 10         | 10         | 10         | 10         | 10         | 10            |
| 2                   | 40         | 36         | 36         | 36         | 32         | 32         | 32            |
| 3                   | 160        | 144        | 144        | 132        | 108        | 100        | 84            |
| 4                   | 0          | 20         | 56         | 88         | 112        | 128        | 116           |
| 5                   | 0          | 76         | 204        | 308        | 376        | 392        | 324           |
| 6                   | 0          | 16         | 80         | 164        | 304        | 380        | 372           |
| 7                   | 0          | 4          | 16         | 140        | 324        | 444        | 524           |
| 8                   | 0          | 0          | 0          | 116        | 224        | 384        | 512           |
| 9                   | 0          | 0          | 0          | 52         | 168        | 384        | 620           |
| 10                  | 0          | 0          | 0          | 176        | 536        | 1,192      | 1,748         |
| 11                  | 0          | 0          | 0          | 600        | 1,764      | 3,652      | 4,992         |
| 12                  | 0          | 0          | 0          | 344        | 1,312      | 3,632      | 6,184         |
| 13                  | 0          | 0          | 0          | 1,212      | 4,172      | 10,836     | 17,324        |
| 14                  | 0          | 0          | 0          | 4,124      | 13,236     | 32,300     | 48,412        |
| 15                  | 0          | 0          | 0          | 2,468      | 10,608     | 32,532     | 58,220        |
| 16                  | 0          | 0          | 0          | 8,288      | 33,904     | 97,696     | 162,884       |
| 17                  | 0          | 0          | 0          | 4,940      | 27,372     | 97,544     | 194,716       |
| 18                  | 0          | 0          | 0          | 3,148      | 21,516     | 96,932     | 233,180       |
| 19                  | 0          | 0          | 0          | 10,684     | 69,032     | 291,156    | 654,500       |
| 20                  | 0          | 0          | 0          | 36,460     | 221,088    | 874,652    | 1,832,456     |
| 21                  | 0          | 0          | 0          | 123,808    | 708,464    | 2,624,000  | 5,129,516     |
| 22                  | 0          | 0          | 0          | 73,272     | 565,536    | 2,625,500  | 6,156,352     |
| 23                  | 0          | 0          | 0          | 43,840     | 453,020    | 2,626,844  | 7,392,068     |
| 24                  | 0          | 0          | 0          | 149,320    | 1,449,744  | 7,881,876  | 20,705,116    |
| 25                  | 0          | 0          | 0          | 508,080    | 4,636,416  | 23,638,696 | 57,984,848    |
| 26                  | 0          | 0          | 0          | 303,788    | 3,712,180  | 23,619,932 | 69,618,560    |
| 27                  | 0          | 0          | 0          | 1,032,520  | 11,879,772 | 70,832,424 | 194,902,136   |
| 28                  | 0          | 0          | 0          | 620,388    | 9,505,032  | 70,856,876 | 233,895,188   |
| 29                  | 0          | 0          | 0          | 373,116    | 7,596,328  | 70,873,896 | 280,650,700   |
| 30                  | 0          | 0          | 0          | 224,500    | 6,071,960  | 70,876,032 | 336,777,452   |
| 31                  | 0          | 0          | 0          | 135,752    | 4,863,192  | 70,873,928 | 404,169,400   |
| 32                  | 0          | 0          | 0          | 81,900     | 3,894,844  | 70,862,872 | 484,968,892   |
| 33                  | 0          | 0          | 0          | 48,700     | 3,120,980  | 70,837,800 | 581,954,180   |
| 34                  | 0          | 0          | 0          | 28,896     | 2,501,472  | 70,846,204 | 698,393,716   |
| 35                  | 0          | 0          | 0          | 17,244     | 2,000,296  | 70,830,708 | 838,072,612   |
| 36                  | 0          | 0          | 0          | 10,120     | 1,604,728  | 70,827,660 | 1,056,000,000 |
| <b>elapsed time</b> | 0.015827 s | 0.015683 s | 0.017678 s | 0.065694 s | 0.639721 s | 6.638302 s | 39.842771 s   |

**Tabella E.2**

|   |
|---|
| <pre> ??? Error using ==&gt; rand Out of memory. Type HELP MEMORY for your options.  Error in ==&gt; binornd at 39     r = sum(rand([sizeOut,n]) &lt; p, ndimsOut+1);  Error in ==&gt; modello_ottimizzato at 26     t(k) = binornd(n(k),f); %vettore di tipi (valley o plateau) </pre> |
|---|

Tabella E.3

| Generazione | f=0 |   | f=0.05 |   | f=0.10 |    | f=0.15 |         | f=0.20 |           | f=0.25 |            | f=0.30 |             |
|-------------|-----|---|--------|---|--------|----|--------|---------|--------|-----------|--------|------------|--------|-------------|
|             | r   | t | r      | t | r      | t  | r      | t       | r      | t         | r      | t          | r      | t           |
| 1           | 0   | 0 | 0      | 0 | 1      | 0  | 1      | 0       | 0      | 2         | 0      | 2          | 0      | 2           |
| 2           | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 3       | 0      | 5         | 0      | 7          | 0      | 11          |
| 3           | 1   | 0 | 1      | 5 | 1      | 14 | 1      | 22      | 1      | 28        | 1      | 32         | 1      | 29          |
| 4           | 0   | 0 | 0      | 1 | 0      | 5  | 0      | 11      | 0      | 18        | 0      | 30         | 0      | 35          |
| 5           | 1   | 0 | 1      | 4 | 1      | 20 | 1      | 41      | 1      | 76        | 1      | 95         | 1      | 93          |
| 6           | 1   | 0 | 1      | 1 | 1      | 4  | 1      | 35      | 1      | 81        | 1      | 111        | 1      | 131         |
| 7           | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 29      | 1      | 56        | 1      | 96         | 1      | 128         |
| 8           | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 13      | 1      | 42        | 1      | 96         | 1      | 155         |
| 9           | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 8       | 0      | 34        | 0      | 86         | 0      | 183         |
| 10          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 26      | 0      | 95        | 0      | 279        | 0      | 500         |
| 11          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 86      | 1      | 328       | 1      | 908        | 1      | 1,546       |
| 12          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 41      | 0      | 269       | 0      | 923        | 0      | 1,853       |
| 13          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 181     | 0      | 863       | 0      | 2,761      | 0      | 5,221       |
| 14          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 617     | 1      | 2,652     | 1      | 8,133      | 1      | 14,555      |
| 15          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 396     | 0      | 2,132     | 0      | 8,108      | 0      | 17,499      |
| 16          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 1,235   | 1      | 6,843     | 1      | 24,386     | 1      | 48,679      |
| 17          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 787     | 1      | 5,379     | 1      | 24,233     | 1      | 58,295      |
| 18          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 477     | 0      | 4,258     | 0      | 24,143     | 0      | 69,555      |
| 19          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 1,569   | 0      | 13,760    | 0      | 72,493     | 0      | 196,386     |
| 20          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 5,508   | 0      | 43,972    | 0      | 218,652    | 0      | 550,077     |
| 21          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 18,318  | 1      | 141,384   | 1      | 656,375    | 1      | 1,539,088   |
| 22          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 10,960  | 1      | 113,255   | 1      | 656,711    | 1      | 1,848,017   |
| 23          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 6,510   | 0      | 90,584    | 0      | 656,375    | 0      | 2,215,789   |
| 24          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 22,300  | 0      | 290,640   | 0      | 1,972,202  | 0      | 6,208,904   |
| 25          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 75,947  | 1      | 928,045   | 1      | 5,904,983  | 1      | 17,404,640  |
| 26          | 0   | 0 | 0      | 0 | 0      | 0  | 0      | 45,658  | 0      | 742,237   | 0      | 5,911,826  | 0      | 20,893,026  |
| 27          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 155,097 | 1      | 2,376,258 | 1      | 17,714,219 | 1      | 58,473,797  |
| 28          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 93,279  | 1      | 1,899,082 | 1      | 17,718,474 | 1      | 70,162,675  |
| 29          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 56,125  | 1      | 1,517,990 | 1      | 17,719,008 | 1      | 84,194,363  |
| 30          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 33,938  | 1      | 1,215,798 | 1      | 17,718,482 | 1      | 101,042,350 |
| 31          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 20,475  | 1      | 973,711   | 1      | 17,715,718 | 1      | 121,242,223 |
| 32          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 12,175  | 1      | 780,245   | 1      | 17,709,450 | 1      | 145,488,545 |
| 33          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 7,224   | 1      | 625,368   | 1      | 17,711,551 | 1      | 174,598,429 |
| 34          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 4,311   | 1      | 500,074   | 1      | 17,707,677 | 1      | 209,518,153 |
| 35          | 1   | 0 | 1      | 0 | 1      | 0  | 1      | 2,530   | 1      | 401,182   | 1      | 17,706,915 | 1      | 251,405,073 |

## ***Riferimenti bibliografici***

Airoldi Giuseppe, Brunetti Giorgio, Coda Vittorio, *Corso di economia aziendale*, Il Mulino, 2005, cap. 1.

Ball Ray (traduzione italiana in Vaciago-Verga, 1995), *What Do We Know about Stock Market «Efficiency»?*, 1989.

Barucci Emilio, *Teoria dei Mercati Finanziari - Equilibrio, Efficienza, Informazione*, Il Mulino, 2000, capp. 1-7-8.

Besanko David A., Braeutigam Ronald R. (edizione italiana a cura di Cipriani G. P. e Coccoresse P.), *Microeconomia*, McGraw-Hill, 2009.

Biffis Paolo, *Il settore bancario*, EIF-e.Book, IV edizione, 2011.

Bodie Zvi, Kane Alex, Marcus Alan J., *Investments*, 9<sup>th</sup> edition, McGraw-Hill, 2011.

Borghetti Alessandro (a cura di), Corazza Marco, *Dispensa per il Corso di Introduzione alla Programmazione in Ambiente Matlab*, Università Ca' Foscari Venezia, Facoltà di Economia, novembre-dicembre 2010.

Brennan Thomas J., Lo Andrew W., *An Evolutionary Model of Bounded Rationality and Intelligence*, PLOS ONE, November 2012, Vol. 7, Issue 11, e50310.

Brennan Thomas J., Lo Andrew W., *An Evolutionary Model of Bounded Rationality and Intelligence: Supporting Text S1*, November 2012.

Buchanan Allen, *Etica, Efficienza, Mercato*, Liguori Editore, 1992, introduzione e cap. 2.

Elton Edwin J., Gruber Martin J., Brown Stephen J., Goetzmann William N. (edizione italiana a cura di D'Arcangelis A. M. e Gabbi G.), *Teorie di Portafoglio e Analisi degli Investimenti*, Apogeo, 2007.

Fama Eugene F., *The Behavior of Stock Market Prices*, Journal of Business, vol. 38, no. 1 (January 1965), pp. 34-105.

Fama Eugene F., *Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work*, Journal of Finance, vol. 25 (May 1970) pp. 383-417.

Fama Eugene F., *Reply*, The Journal of Finance, vol. 31, no. 1 (March 1976), pp. 143-145.

Farmer J. Dooyne, Lo Andrew W., *Frontiers of Finance: Evolution and efficient markets*, (session presented at the 10<sup>th</sup> symposium on Frontiers of Sciences on November 19-21, 1998), Proc. Natl. Acad. Sci. USA, vol. 96 (August 1999) pp. 9991-9992.

Garbade Kenneth, *Teoria dei Mercati Finanziari*, Il Mulino, 1994, cap. 10.

Grossman Sanford, *On the Efficiency of Competitive Stock Markets Where Trades Have Diverse Information*, *Journal of Finance*, vol. 31, issue 2 (May 1976), pp. 573-585.

Grossman Sanford J., Stiglitz Joseph E., *On the Impossibility of Informationally Efficient Markets*, *The American Economic Review*, vol. 70 (June 1980), pp. 393-408.

Guidara Francesco, *La Comunicazione Finanziaria*, Egea, 2011.

Hoover Susan, *Irrational Decisions and the Biology of Behavioral Finance*, CFA Institute, 20 November 2014.

Hull John C. (ed. italiana a cura di E. Barone), *Opzioni, futures e altri derivati*, Pearson, VIII edizione, 2012.

Linciano Nadia, *Errori cognitivi e instabilità delle preferenze nelle scelte di investimento dei risparmiatori retail: le indicazioni di policy della finanza comportamentale*, CONSOB Quaderni di Finanza Studi e Ricerche, n. 66, gennaio 2010.

Lo Andrew W., MacKinlay Craig A., *Stock Market Prices Do Not Follow Random Walks: Evidence from a Simple Specification Test*, NBER Working Paper no. 2168, February 1987.

Lo Andrew W., Repin Dmitry V., *The psychophysiology of Real-Time Financial Risk Processing*, *Journal of Cognitive Neuroscience*, MIT, vol. 14, no. 3 (2002), pp. 323-339.

Lo Andrew W., *Bubble, Rubble, Finance In Trouble?*, *Journal of Psychology and Financial Markets*, vol. 3 (2002), pp. 76-86.

Lo Andrew W., *The Adaptive Market Hypothesis - market efficiency from an evolutionary perspective*, *The Journal of Portfolio Management*, 30<sup>th</sup> anniversary issue, (2004), pp. 15-29.

Lo Andrew W., *Reconciling Efficient Markets with Behavioral Finance: The Adaptive Market Hypothesis*, *Journal of Investment Consulting*, vol. 7, no. 2 (March 2005), pp. 21-44.

Lo Andrew W., Mueller Mark T., *WARNING: Physics Envy May Be Hazardous to Your Wealth!*, *Journal of Investment Management*, vol. 8, no. 2 (March 2010), pp. 13-63.

Lo Andrew W., *Adaptive Markets and the New World Order*, *Financial Analysts Journal*, CFA Institute, vol. 68, no. 2 (May 2012), pp. 18-29.



Mishkin Frederic S., Eakins Stanley G., Forestieri Giancarlo, *Istituzioni e mercati finanziari*, Pearson, III edizione, 2012, cap. 6.

Rigoni Ugo, *Finanza Comportamentale e Gestione del Risparmio*, G. Giappichelli Editore - Torino, 2006, capp. 1-2.

Ross Stephen A., *Neoclassical Finance*, Princeton University Press, 2005, cap. 3.

Simon Herbert A., *On the Behavioral and Rational Foundations of Economic Theory*, paper no. 115, Department of Psychology, Carnegie-Mellon University, December 1983.

Slovik Patrick, *Market uncertainty and market instability*, IFC Bulletin no. 34, pp. 430-435.

Tobin James, (traduzione italiana in Vaciago-Verga, 1995), *On the Efficiency of the Financial System*, Lloyds Bank Review, 1984.

Vaciago Giacomo, Verga Giovanni (a cura di), *Efficienza e Stabilità dei Mercati Finanziari*, Il Mulino, 1995, parte seconda.

Zhang Ruixun, Brennan Thomas J., Lo Andrew W., *Group Selection as Behavioral Adaptation to Systematic Risk*, PLOS ONE, October 2014, Vol. 9, Issue 10, e110848.

## **Ringraziamenti**

*Ringrazio i miei genitori Graziano e Ornella, che mi hanno dato la grande opportunità di compiere questo percorso universitario, giunto al suo traguardo e mio fratello Enrico che, con il suo modo scorbutico, mi sprona continuamente.*

*Ringrazio Emanuele che, nonostante gli impegni e le distanze, mi ha supportato e sopportato durante i periodi di prova, con tanto amore, pazienza e dedizione.*

*Ringrazio Eleonora, Giulia, Laura, Laura e Luca, le persone splendide con le quali sono maturata e ho condiviso tanti momenti di vita; amici veri, che al giorno d'oggi rappresentano una rarità da incontrare.*

*Ringrazio Eliana e Rossella, amiche d'infanzia e compagne di tante avventure e di percorsi che hanno contraddistinto gli anni dell'adolescenza e non solo.*

*Ringrazio Sabrina, mia collega di studi, per il sostegno che mi ha sempre dimostrato e con cui ho maggiormente condiviso "gioie e dolori" accademici.*

*Infine ringrazio tutti i docenti che, con i loro insegnamenti e personalità, mi hanno trasmesso la passione verso le materie, la ricerca e lo studio; e l'Università Ca' Foscari di Venezia che mi ha dato, come ad altri studenti, l'opportunità di fare delle esperienze all'estero, così importanti per me, di cui serberò sempre un vivo ricordo.*