Università
Ca'Foscari
Venezia

Corso di Laurea magistrale
in Economia e Finanza

Tesi di Laurea

Il rischio di longevità e i modelli di mortalità stocastici

Relatrice
Ch. Prof. Antonella Basso

Laureando
Fabio Simone
Matricola 866731

Anno Accademico
2021 / 2022

Indice

Introduzione.....

Capitolo I: Una prospettiva globale dei sistemi pensionistici e assicurativi 1

1.1 Un'introduzione ai sistemi pensionistici e alle loro finalità 1

1.2 Caratteristiche dei sistemi pensionistici..... 4

1.2.1 Sistemi PAYG e Funded 4

1.2.2 La relazione tra contributi e prestazione 6

1.2.3 Una tassonomia dei piani pensionistici, dei fondi pensioni e degli enti pensione..... 8

1.3 I pilastri dei sistemi pensionistici..... 12

1.4 Un'introduzione alle assicurazioni 16

1.4.1 L'attività assicurativa 16

1.4.2 I prodotti assicurativi..... 18

1.4.3 Notazioni attuariali..... 20

Capitolo II: Il Longevity Risk 25

2.1 Introduzione 25

2.2 Il longevity risk..... 29

2.3 Impatto finanziario del rischio di longevità..... 32

2.3.1 Valore attuale scontato delle passività 32

2.3.2 Volatilità del Funding Ratio..... 35

2.3.3 Probabilità di rovina..... 37

2.4 Longevity Risk Transfer Market..... 39

2.4.1 Il contesto di riferimento e il Longevity Risk Transfer Market 39

2.4.2 Gli stakeholder nel Longevity Risk Transfer Market..... 42

2.4.3 Soluzioni insurance-market based..... 44

2.4.4 Soluzioni capital-market based 48

Capitolo III: Modellizzazione della mortalità 59

3.1 Tavole di mortalità 59

3.1.1 Tavole di mortalità di coorte e di periodo 60

3.2. Il modello probabilistico 62

3.2.1. Notazioni base e definizioni 62

3.2.2 Il quadro probabilistico: aleatorietà nella durata di vita umana 63

3.2.3 Force of mortality e central rate of mortality 66

3.2.4 Alcuni utili indicatori 69

3.3 Leggi di mortalità 70

3.3.1 Leggi per la forza della mortalità 71

3.3.2 Leggi per la probabilità di morte annuale 72

Capitolo IV: Modelli previsionali della mortalità 75

4.1 Introduzione 75

4.2 Rappresentazione delle dinamiche nella mortalità 79

4.3 Previsioni deterministiche della mortalità 82

4.3.1 Previsione con un approccio orizzontale con procedure estrapolative 82

4.3.2 Previsione con un approccio diagonale e verticale in un contesto parametrico 86

4.4 Previsioni stocastiche della mortalità 89

4.4.1 Il modello di Lee-Carter 89

4.4.2 Il modello di Cairns-Blake-Dowd 95

4.4.3 Ulteriori sviluppi: l'effetto coorte 97

4.4.4 La famiglia dei GAPC, generalized age-period-cohort models 98

Capitolo V: Un'implementazione dei modelli GAPC su dati italiani 105

5.1 Analisi dei dati 105

5.2 Applicazione dei modelli 111

5.2.1 Fitting 112
5.2.2 Analisi dei modelli 116
5.3 Previsioni della mortalità 125
5.3.1 Modello di Lee-Carter 126
5.3.2 Modello di Cairns-Blake-Dowd 133
5.4 Analisi delle aspettative di vita 138
5.5 Calcolo attuariale di una rendita vitalizia 143
5.6 Il rischio di longevità come rischio di parametro 145
Conclusioni.....
Bibliografia.....
Sitografia .....

Elenco delle figure

Figura 1: Aspettative di vita di periodo per la popolazione sessantacinquenne maschile (linea continua) e femminile (linea tratteggiata) per diversi Paesi 26
Figura 2: Tassi di mortalità documentati (punti) e attesi (linea continua) per una data coorte. 30
Figura 3: Margini di solvibilità richiesti 38
Figura 4: Il longevity risk transfer market 42
Figura 5: Struttura dei buy-out pensionistici e delle transazioni buy-in 47
Figura 6: Cedole dell'EIB bond 52
Figura 7 : Un q-forward scambia mortalità fissa per mortalità realizzata alla scadenza del contratto 55
Figura 8: Un contratto q-forward per coprire il rischio di mortalità (a sinistra) di un life insurer e un contratto q-forward per coprire il rischio di longevità (a destra) di un piano pensionistico o annuity book. 56
Figura 9: Curva di sopravvivenza per la popolazione italiana totale nel 2021 61
Figura 10: Curva dei decessi dx per la popolazione italiana totale 2021 61
Figura 11 : Funzioni di sopravvivenza S(t) per la popolazione italiana totale nel 2021 65
Figura 12:Funzione di distribuzione $Fo(t)$, per la popolazione italiana totale nel 2021 65
Figura 13: Curva dei decessi $f0(t)$ per la popolazione italiana totale nel 2021 66
Figura 14: Forza della mortalità $\mu(x)$ per la popolazione italiana totale nel 2021 69
Figura 15: Central rate of mortality annual per la popolazione italiana totale nel 2021 69
Figura 16: Modello estrapolativo 78
Figura 17: Modelli stocastici 78
Figura 18: Stime puntuali e intervalli di confidenza nelle proiezioni stocastiche 79
Figura 19: Dall'esperienza nella mortalità alla tavola proiettata 81
Figura 20: L'approccio orizzontale 83
Figura 21: L'approccio verticale 88
Figura 22: L'approccio diagonale 88
Figura 23: Tassi di miglioramenti nella mortalità medi per età e per anno calendario nella popolazione di Inghilterra e Galles, uomini (a) e donne (b). 97

Figura 24: Tassi di mortalità per la popolazione maschile italiana. Sulla sinistra età 0-50, sulla destra 60-100..... 106
Figura 25: Tassi di mortalità per la popolazione femminile italiana. Sulla sinistra età 0-50, sulla destra 60-100..... 107
Figura 26: Tassi di miglioramento nei tassi di mortalità per la popolazione maschile italiana (come variazione percentuale rispetto al tasso di mortalità dell'età considerata dell'anno di inizio, 1920). Sulla sinistra età 0-50, sulla destra 60-100 107
Figura 27: Tassi di miglioramento nei tassi di mortalità per la popolazione femminile (come variazione percentuale rispetto al tasso di mortalità dell'età considerata dell'anno di inizio, 1920). Sulla sinistra età 0-50, sulla destra 60-100 108
Figura 28: Tassi di mortalità logaritmici per la popolazione maschile (sx), femminile (centro) e totale (dx). I colori caldi rappresentano gli anni ad inizio periodo (1920), i colori freddi gli anni alla fine del periodo considerato (2019)..... 109
Figura 29: Rappresentazione tridimensionale dei tassi di mortalità in scala logaritmica osservati per la popolazione maschile italiana 110
Figura 30: Rappresentazione tridimensionale dei tassi di mortalità in scala logaritmica osservati per la popolazione femminile italiana 110
Figura 31: Rappresentazione dei parametri "α_x" per la popolazione maschile, per quella femminile e per l'intera popolazione, utilizzando il modello di Lee-Carter. 113
Figura 32: Rappresentazione dei parametri "β_x" per la popolazione maschile, per quella femminile e per l'intera popolazione, utilizzando il modello di Lee-Carter. 113
Figura 33: Rappresentazione dei parametri "k_t" per la popolazione maschile, per quella femminile e per l'intera popolazione, utilizzando il modello di Lee-Carter.a 113
Figura 34: Rappresentazione dei parametri "$kt^{[1]}$" per la popolazione maschile, per quella femminile e per l'intera popolazione, utilizzando il modello di Cairns-Blake-Dowd. 115
Figura 35: Rappresentazione dei parametri "$kt^{[2]}$" per la popolazione maschile, per quella femminile e per l'intera popolazione, utilizzando il modello di Cairns-Blake-Dowd. 115
Figura 36: Confronto tra valori osservati e previsti dal modello di Lee-Carter dei logaritmi delle probabilità di morte per la popolazione maschile nel 1920 e nel 2019 116
Figura 37: Confronto tra valori osservati e previsti dal modello di Lee-Carter dei logaritmi delle probabilità di morte per la popolazione maschile nel 1920 e nel 2019 117

Figura 38: Confronto tra valori osservati e previsti dal modello di Cairns-Blake-Dowd dei logaritmi delle probabilità di morte per la popolazione maschile nel 1920 e nel 2019 117
Figura 39: Confronto tra valori osservati e previsti dal modello di Cairns-Blake-Dowd dei logaritmi delle probabilità di morte per la popolazione femminile nel 1920 e nel 2019 118
Figura 40: Coefficiente di determinazione per il modello di Lee-Carter per uomini (sx) e donne (dx) 119
Figura 41: Coefficiente di determinazione per il modello di Cairns-Blake-Dowd per uomini (sx) e donne (dx) 119
Figura 42: Residui del modello Lee-Carter per la popolazione maschile italiana. 121
Figura 43: Residui del modello Lee-Carter per la popolazione femminile italiana 121
Figura 44: Residui del modello Lee-Carter per l'intera popolazione italiana 122
Figura 45: Residui del modello Cairns-Blake-Dowd per la popolazione maschile italiana 122
Figura 46: Residui del modello Cairns-Blake-Dowd per la popolazione femminile italiana 123
Figura 47: Residui del modello Cairns-Blake-Dowd per la popolazione italiana totale 123
Figura 48: Residui LC della popolazione maschile (sx) e totale (dx) per anno di nascita 124
Figura 49: Residui del modello APC per la popolazione italiana totale 125
Figura 50: Funzione di autocorrelazione (sx) e di autocorrelazione parziale (dx) per la serie storica dei kt della popolazione italiana totale. 127
Figura 51: Funzione di autocorrelazione (sx) e autocorrelazione parziale per la serie storica dei kt differenziata della popolazione italiana totale..... 128
Figura 52: Valori di αx, βxe kt per la popolazione italiana maschile. Il grafico dei kt, presenta intervalli di confidenza al 95%..... 131
Figura 53: Valori di αx, βxe kt per la popolazione italiana femminile. Il grafico dei kt, presenta intervalli di confidenza al 95%..... 132
Figura 54: Valori di αx, βxe kt per la popolazione italiana totale. Il grafico dei kt, presenta intervalli di confidenza al 95%..... 132

Figura 55: Tassi di mortalità previsti per la popolazione italiana totale secondo il modello di Lee-Carter. Sull'asse x sono definite le età (60-95), sull'asse y gli anni (1920-2119). 132
Figura 56: Previsioni a 100 anni degli indici periodali del modello Cairns-Blake-Dowd applicato alla popolazione maschile italiana per età 60-95, con intervalli di confidenza all'80 e 95%. 134
Figura 57: Previsioni a 100 anni degli indici periodali del modello Cairns-Blake-Dowd applicato alla popolazione femminile italiana per età 60-95, con intervalli di confidenza all'80 e 95%. 135
Figura 58: Previsioni a 100 anni degli indici periodali del modello Cairns-Blake-Dowd applicato alla popolazione totale italiana per età 60-95, con intervalli di confidenza all'80 e 95%. 135
Figura 59: Tassi di mortalità previsti per la popolazione italiana totale secondo il modello di Cairns-Blake-Dowd. Sull'asse x sono definite le età (60-95), sull'asse y gli anni (1920-2119). 136
Figura 60: Confronto tra i tassi di mortalità previsti secondo i modelli Lee-Carter e Cairns-Blake-Dowd per la popolazione sessantacinquenne italiana maschile, femminile e totale. 136
Figura 61: Fan chart per le probabilità di morte in scala logaritmica per età x=65 (nero), x=75 (rosso), x=85 (blu) derivante dal modello Lee-Carter per la popolazione maschile (sinistra) e femminile (destra) italiana, dal 2020 al 2119. I punti mostrano i tassi di mortalità storici dal 1920 al 2019. Le ombre rappresentano gli intervalli di confidenza al 50, 80 e 95%. 137
Figura 62: Fan chart per le probabilità di morte in scala logaritmica per età x=65 (nero), x=75 (rosso), x=85 (blu) derivante dal modello Cairns-Blake-Dowd per la popolazione maschile (sinistra) e femminile (destra) italiana, dal 2020 al 2119. I punti mostrano i tassi di mortalità storici dal 1920 al 2019. Le ombre rappresentano gli intervalli di confidenza al 50, 80 e 95%. 138
Figura 63: Parametri di un bootstrap di tipo Poisson per il modello di Lee-Carter con distribuzione delle morti di tipo Poisson, applicato alla popolazione italiana maschile, età 0-100, anni 1920-2019. Le ombre rappresentano intervalli di confidenza al 50%, 80% e 95%. 148

Figura 64: Intervalli predittivi al 95% per i tassi di mortalità m_{xt} per età x = 40 (in basso), x = 60 (in centro) e x = 80 (in alto) per il modello Poisson Lee-Carter, applicato alla popolazione italiana maschile per età 0-100 e periodo 1920-2019. I punti mostrano i tassi di mortalità storici nel periodo 1920 – 2019 e le linee continue nere mostrano i valori previsti dal modello. Le linee tratteggiate rappresentano la previsione centrale, le linee nere a punti rappresentano intervalli predittivi al 95% senza rischio di parametro (solo rischio predittivo) e le linee rosse tratteggiate rappresentano intervalli al 95% con incertezza di parametro..... 148
Figura 65: Istogramma di 500 valori delle aspettative di vita di periodo all'età 65 anni nel 2119 per la popolazione maschile italiana..... 149
Figura 66: Istogramma di 500 valori attuariali di una rendita vitalizia, sottoscritta all'età di 65 anni, per la coorte nata nel 2019, per la popolazione maschile italiana ... 149

Elenco delle tabelle

Tabella 1: Statistiche descrittive del portafoglio di rendite 34
Tabella 2: Probabilità di morte ad un anno in un contesto dinamico 80
Tabella 3: Valori del parametro $\beta x^{[2],}$ cioè , $(x - x)$ nel modello di Cairns-Blake-Dowd. 115
Tabella 4: Stime dei valori del drift e della varianza residuale per la popolazione italiana totale, maschile e femminile, secondo il modello LC applicato per età 60-95 e anni 1920-2019. 130
Tabella 5: Stime dei valori del drift e della varianza residuale per la popolazione italiana totale, uomini e donne. 134
Tabella 6: Aspettative di vita di periodo a 65 anni, per la popolazione italiana maschile, secondo le previsioni Lee-Carter, Cairns-Blake-Dowd e Istat (disponibili fino al 2070). 142
Tabella 7: Aspettative di vita di periodo a 65 anni, per la popolazione italiana femminile, secondo le previsioni Lee-Carter, Cairns-Blake-Dowd e Istat (disponibili fino al 2070). 143
Tabella 8: Valore attuariale di una rendita vitalizia per un sessantacinquenne appartenente a varie coorti. 144
Tabella 9: Valore attuariale di una rendita vitalizia per una sessantacinquenne appartenente a varie coorti. 145

Introduzione

La speranza di vita costituisce un utile indicatore statistico capace di riassumere le caratteristiche di mortalità di una popolazione. Studi demografici evidenziano come l'aspettativa di vita sia triplicata nel corso della storia del genere umano, sebbene la maggior parte della crescita si sia concentrata solamente negli ultimi 150 anni: in effetti la vita media è aumentata di appena 25 anni nei 10.000 anni prima del 1850, per poi crescere di altri 25 in soli 150 anni.

Le questioni sulla longevità potrebbero avere quindi un forte impatto sulla gestione e sulla solvibilità dei piani pensionistici, tanto pubblici (tradizionalmente "Pay-As-You-Go") che privati (aziendali), e delle imprese assicurative ramo vita: è facilmente intuibile, infatti, come un incremento dell'aspettativa di vita possa comportare maggiori spese e costi, essendo maggiore l'intervallo temporale per cui la prestazione, molto spesso vitalizia, deve essere garantita.

In realtà gli effetti sui sistemi pubblici e privati sarebbero di modesta entità se i miglioramenti nella mortalità fossero pienamente anticipati: non è tanto l'incremento nell'aspettativa di vita a costituire di per sé una minaccia, quanto la combinazione di incertezza relativamente alle future tendenze nella mortalità unitamente alle variazioni attorno a tale incertezza. Tali elementi determinano allora il rischio di longevità, quindi il rischio legato alle deviazioni di natura sistematica rispetto al valore atteso previsto della mortalità futura, per natura *non-pooling*.

Il presente elaborato è strutturato in due parti distinte.
Nella prima parte, di natura qualitativa, dopo aver analizzato il contesto di riferimento del rischio legato alla longevità, costituito dai sistemi pensionistici ed assicurativi (Capitolo I), si procede con l'analisi dello stesso, fornendone una definizione, valutandone il possibile impatto finanziario e analizzando i principali strumenti finanziari utilizzati per il suo *hedging*, diffusi nel cosiddetto "Longevity Risk Transfer Market", il mercato per il trasferimento del rischio di longevità (Capitolo II).

La seconda parte, più quantitativa, mira a fornire gli strumenti utilizzati da attuari e demografi per modellare la mortalità, per ricavare tassi e tavole di mortalità proiettate e per il design e per il pricing degli strumenti di *hedging* diffusi sul mercato.

Dopo aver illustrato le principali formule di calcolo utilizzate in campo attuariale per la costruzione delle tavole di mortalità (Capitolo III), segue un'analisi dei principali metodi previsionali utilizzati, distinguendo tra modelli di previsione deterministici e modelli stocastici, analizzando in particolar modo quest'ultimi.
In particolare, grande attenzione viene rivolta ai due principali modelli stocastici utilizzati dai professionisti di settore, ossia il modello di Lee-Carter e il modello di Cairns-Blake-Dowd, con le relative estensioni; si arriva a definire infine un quadro generale che permette di considerare nel loro insieme i modelli stocastici della mortalità, denominati modelli GAPC, cioè modelli "Generalized-Age-Period-Cohort" (Capitolo IV).

L'ultimo capitolo (Capitolo V) propone un'elaborazione pratica su dati italiani dei modelli Lee-Carter e Cairns-Blake-Dowd, implementata in ambiente R.

Capitolo I: Una prospettiva globale dei sistemi pensionistici e assicurativi

1.1 Un'introduzione ai sistemi pensionistici e alle loro finalità

L'articolo 25 della Dichiarazione Universale dei Diritti Umani riassume le responsabilità dello Stato verso i propri cittadini in termini di previdenza sociale.

"Ogni individuo ha diritto ad un tenore di vita sufficiente a garantire la salute e il benessere proprio e della sua famiglia, con particolare riguardo all'alimentazione, al vestiario, all'abitazione, e alle cure mediche e ai servizi sociali necessari; ed ha diritto alla sicurezza in caso di disoccupazione, malattia, invalidità, vedovanza, vecchiaia o in altro caso di perdita di mezzi di sussistenza per circostanze indipendenti dalla sua volontà." (Assemblea Generale della Nazioni Unite, 1948).

La vecchiaia viene esplicitamente definita come un elemento di rischio per la sicurezza individuale. Lo scopo della previdenza sociale è allora quello di fornire alla popolazione un meccanismo di protezione sociale nel caso di shock individuali che possano compromettere l'abilità della stessa di guadagnarsi da vivere attraverso l'attività compiuta nel mercato del lavoro.

Tali rischi o shock possono essere tanto individuali quanto globali (macroeconomici e sociali). In generale, i rischi individuali durante la vecchiaia sono ascrivibili a insufficienti contributi durante la vita lavorativa o a circostanze imprevedibili, come la morte del percettore principale del nucleo familiare. Il primo caso può essere dovuto a numerose circostanze, in particolare l'individuo non è stato capace di provvedere sufficientemente per la propria vecchiaia a causa dell'incapacità di lavorare o a causa di un lavoro non pagato (come la crescita dei figli) o la persona ha sottostimato il contributo richiesto, a causa dell'incertezza nell'aspettativa di vita dopo il ritiro dall'attività lavorativa (quest'ultimo è noto come rischio di longevità, e sarà successivamente definito).

Con il termine sistema pensionistico possiamo allora definire quell'istituto del "Welfare State"[1] che cerca di assicurare un reddito sicuro e stabile alla popolazione anziana, così da salvaguardarla dal rischio di vecchiaia, appunto la concreta possibilità che gli anziani possano trovarsi in una condizione miseria e povertà (a causa dei rischi sopracitati) in quanto non più capaci di sostentarsi attraverso un reddito, in assenza di risparmi effettuati durante l'attività lavorativa. Secondo quanto letto nella Dichiarazione Universale, gli anziani non dovrebbero solo avere diritto a mezzi di sopravvivenza (assicurazione di sussistenza), ma anche avere la concreta possibilità di partecipare alla vita sociale della comunità e decidere lo stile di vita desiderato.
Si procede quindi ad analizzare più in dettaglio quali sono le funzioni e gli obiettivi a cui ciascun sistema pensionistico si ispira o si dovrebbe ispirare.

Dal punto di vista individuale, avere una certa sicurezza nel reddito nella vecchiaia richiede innanzitutto un meccanismo di livellamento dei consumi ("consumption smoothing"): le persone cercano di massimizzare il loro benessere non in un singolo punto nel tempo, ma nel corso del tempo; una persona che risparmia oggi lo fa perché valuta l'extra consumo nel futuro come più importante di un incremento del consumo oggi.
Uno degli obiettivi dei sistemi pensionistici è legato quindi ad una redistribuzione della ricchezza intertemporale e intrapersonale: permettere cioè, ad una singola persona, di trasferire il consumo dagli anni di età lavorativa a quelli della vecchiaia, garantendo un bilanciamento tra spese e risparmi durante le differenti fasi della vita.

Come accennato, una pensione finanziata attraverso risparmi individuali è soggetta al rischio di sopravvivere alle risorse accumulate, o al rischio di consumare in misura molto minore, rispetto a quanto possibile, le risorse per evitare quel rischio.
Se l'aspettativa di vita di una singola persona non può essere nota, quella di un gruppo di persone può essere quantomeno stimata. Allora i membri del gruppo potrebbero essere concordi nel mettere insieme i risparmi pensionistici ("pooling") e ciascuna persona potrebbe ritirare la pensione sulla base dell'aspettativa di vita del gruppo e l'ammontare totale per cui ha contribuito al pool. Vi è quindi una funzione assicurativa

[1] Vale a dire quella forma di governo in cui lo Stato cerca di promuovere il benessere economico e sociale per tutti i suoi cittadini, proteggendoli dai rischi derivanti da vecchiaia, disoccupazione, incidenti e malattie.

dei sistemi pensionistici rispetto al rischio di sopravvivere alle risorse accumulate, resa possibile attraverso il meccanismo delle rendite (la cui valutazione attuariale si fonda su stime delle probabilità di vita e morte condotte sulla popolazione), per cui un individuo scambia quanto accumulato durante l'età lavorativa per pagamenti regolari durante la restante parte della vita.

In un mondo stilizzato, le pensioni potrebbero essere lasciate allora alle decisioni volontarie del singolo e alle assicurazioni private, senza la necessità del coinvolgimento da parte del governo. In realtà esistono alcune ragioni per cui questo tipo di approccio è insufficiente; innanzitutto, un modello di questo tipo assume l'esistenza di una perfetta informazione da parte degli individui (fatta eccezione per la durata della vita umana) e nessun altro tipo di distorsione. Il mondo reale si caratterizza in realtà per fallimenti di mercato[2], informazione imperfetta da parte degli individui, oltre che per la presenza di rischi macroeconomici e sociali[3] , che non possono coperti da un'assicurazione (che può far fronte a rischi individuali, ma non a shock sistematici).
Inoltre, esiste un ampio dibattito circa la capacità degli individui di sfruttare al meglio le opportunità che il mercato offre loro e di prestare attenzione ai bisogni futuri degli altri membri della propria famiglia[4]. Questi elementi gettano allora le basi per l'intervento del governo.

[2] Il fallimento del mercato rappresenta una situazione in cui l'allocazione di beni e servizi da parte di un mercato libero, dominato dal puro interesse dei singoli individui, non è efficiente, determinando una perdita di valore economico. L'esistenza di tali fallimenti rappresenta molto spesso la ragione per cui governi o organismi sovranazionali intervengono in un particolare mercato.
[3] Mattil (2006) offre una dettagliata analisi di fattori esogeni macroeconomici e sociali ulteriori rispetto al singolo rischio individuale. Per quanto concerne i fattori macroeconomici, si fa riferimento allo sviluppo del PIL (Prodotto Interno Lordo) di un Paese, dato che le pensioni pagate sono una percentuale del PIL di una nazione: fluttuazioni e/o riduzioni della produzione interna determinano una riduzione delle pensioni erogate.
La disoccupazione comporta il rischio di una riduzione nella forza lavoro, che di conseguenza produrrebbe meno e ci sarebbe quindi meno risorse da distribuire tra la popolazione. Inoltre, una crescente inflazione tende a svalutare i pagamenti dei contributi durante la vita lavorativa e i pagamenti delle pensioni durante la vecchiaia (la pensione vale meno in termini reali).
Quanto a fattori sociali, la struttura demografica di una popolazione (dipendente da tassi di natalità, aspettativa di vita media e flussi migratori) ha forti implicazioni per quanto concerne il livello di output prodotto e la sua ripartizione. Si sta assistendo a un aumento del working age ratio, cioè ad un aumento della quota della popolazione che consuma parte della ricchezza nazionale senza partecipare alla sua produzione.
Altro importante fattore sociale è rappresentato dalle condizioni politiche di un Paese, come la tassazione fiscale, che influenza la pensione netta, il tasso di sostituzione netto, i rendimenti dei fondi pensionistici, oltre che i fattori macroeconomici precedentemente analizzati.

[4] In effetti, basti pensare che oltre il 50% degli americani degli Americani non conosce la differenza tra un'azione e un'obbligazione (Orszag e Stiglitz, 2001).

Inoltre, l'intervento dello Stato garantirebbe equità intragenerazionale: un sistema pensionistico gestito da un'entità sovranazionale permetterebbe infatti di redistribuire risorse tra i partecipanti di una stessa generazione, così da trattare ciascun individuo secondo le proprie necessità, con la possibilità di raggiungere due importanti risultati.
Il primo è legato alla prevenzione della povertà, dato che, come si è visto, una società vorrebbe garantire ai suoi pensionati degli standard di vita adeguati durante la vecchiaia (quindi ottimali tassi di sostituzione del reddito pre-ritiro con quello post ritiro dal mondo lavorativo), mentre il secondo è un obiettivo redistributivo, legato al sovvenzionamento del livellamento dei consumi per promotori di attività socialmente desiderabili, quali l'educazione dei figli, l'assistenza dei membri della famiglia e il servizio militare.

Ancora, l'intervento statale garantirebbe (o dovrebbe garantire) equità intergenerazionale; tale obiettivo concerne la possibilità data alle future generazioni di vivere secondo standard di vita eguali, se non maggiori, rispetto alle generazioni precedenti. Ci si riferisce non solo a differenti generazioni che vivono nello stesso periodo, ma anche al susseguirsi di generazioni nel corso del tempo. Uno dei maggiori problemi su questo punto deriva dalla possibilità di una condivisione equa e sostenibile del peso finanziario legato al crescente invecchiamento della popolazione tra le generazioni: sostanzialmente ciò implica che tanto i contribuenti/lavoratori che i pensionati dovranno sopportare parte delle conseguenze finanziarie dell'invecchiamento demografico per garantire la sostenibilità a lungo termine del sistema pensionistico.

1.2 Caratteristiche dei sistemi pensionistici

1.2.1 Sistemi PAYG e Funded

Risulta innanzitutto opportuno distinguere i sistemi pensionistici in due importanti categorie: i sistemi "Pay-As-You-Go" (PAYG) e quelli "funded".
I primi prevedono che i contributi siano pagati immediatamente come prestazioni ai pensionati dello stesso periodo. Ogni generazione paga quindi la pensione della generazione precedente (c'è quindi equità intergenerazionale): non c'è alcuna raccolta,

né investimento di capitali; di conseguenza, in un certo periodo, i contributi ricevuti dallo schema pensionistico devono essere eguali alle prestazioni pensionistiche pagate[5].
Tale sistema è tipicamente gestito dallo Stato, e ha natura contrattuale, nel senso che lo Stato può ma non è obbligato ad accumulare attivi in anticipo per i diritti pensionistici futuri, e quindi può tassare i lavoratori per pagare le pensioni alla generazione che si ritira.
La maggior parte degli schemi pensionistici sono tradizionalmente di matrice PAYG. Tuttavia, la crescente spesa pensionistica, dovuta ad un progressivo invecchiamento della popolazione (somma di un aumento nell'aspettativa di vita e di una riduzione delle nascite), ha portato questi sistemi, inizialmente in surplus, a dover fronteggiare aspri deficit finanziari in molti Paesi.
L'approccio utilizzato per fronteggiare tale problema prevede un aggiustamento dei parametri di calcolo delle pensioni PAYG, come un aumento nell'età di pensionamento, requisiti di maturazione delle pensioni più stretti, aumento dei tassi contributivi e riduzione delle prestazioni. Visto l'insufficienza di tali manovre, molti Paesi si sono spostati verso una parziale o totale sostituzione dei sistemi PAYG con sistemi "funded" individuali, oppure verso sistemi a contribuzione definita nozionali[6] (si veda paragrafo 1.2.2).
Gli schemi pensionistici "funded" (o ad accumulazione di capitale) si basano sui risparmi: i contributi, pagati dagli individui durante l'attività lavorativa, vengono investiti in attività finanziarie (o fisiche), il cui rendimento viene accreditato in conti individuali o in un fondo comune. Di conseguenza, ogni generazione provvede per il proprio reddito durante l'età della pensione ed è indipendente dalle generazioni che la precedono e la seguono (non c'è equità intergenerazionale)[7].
Due sono quindi gli elementi che caratterizzano entrambi i regimi: tempo e rischio.
I lavoratori devono pagare ora per qualcosa che riceveranno in futuro (funzione di "consumption smoothing"), ma, come si è visto, esistono dei rischi, per cui può accadere che l'attuale pagamento della pensione sia inferiore a quello atteso nel

[5] In pratica, $c_t w_t E_t = p_t R_t$: nella parte sinistra dell'uguaglianza sono definiti i contributi, come prodotto del tasso di contribuzione c, come percentuale di w, ossia il salario medio di un lavoratore, e il numero di lavoratori E, in un certo periodo t. La parte destra dell'equazione si riferisce invece alla spesa pensionistica, pari al prodotto tra la pensione media p e il numero di ritirati dal mondo lavorativo R.
[6] Tale sistema comporta cambiamenti solamente per quanto riguarda la definizione delle prestazioni; quindi, può coesistere tanto con sistemi funded che PAYG.
[7] Quindi, $c_t w_t E_t(1+r_{t+1}) = p_{t+1} R_{t+1}$, dove $E_t = R_{t+1}$. "r" rappresenta il tasso di rendimento realizzato.

momento di inizio del piano pensione (ecco che si parla di "promessa" pensionistica, piuttosto che di garanzia).

1.2.2 La relazione tra contributi e prestazione

Indipendentemente dal fatto che lo schema sia "funded" piuttosto che "Pay-as-you-go", un'importante tema riguarda la relazione sussistente tra le pensioni erogate e i contributi versati dai lavoratori.
In tal senso, esistono tre principali schemi pensionistici: schemi a contribuzione definita ("defined-contribution schemes", DC), schemi a prestazione definita ("defined-benefit schemes", DB) e schemi figurativi a contribuzione definita ("notional defined-contribution schemes", NDC).

In uno schema a contribuzione definita, l'individuo, il datore di lavoro o entrambi versano in un conto personale una frazione fissa dei guadagni. Tali contributi vengono utilizzati per comprare attività finanziarie, che sono accumulate, insieme ai rendimenti, nei conti pensionistici. All'inizio della pensione, gli attivi sul conto finanziano il consumo individuale successivamente al ritiro attraverso una rendita (o una somma fissa)[8].
In uno schema pensionistico DC puro (senza redistribuzione tra individui), il consumo di una persona alla pensione è determinato da quanto accumula durante la vita lavorativa, dato un tasso d'interesse e un'aspettativa di vita stimata. Sebbene attraverso una rendita il rischio di longevità venga eliminato a prima vista, in realtà uno schema DC puro non protegge gli individui di fronte agli altri rischi, associati per esempio al variare dei tassi di rendimento reali degli attivi pensionistici, il rischio legato a fluttuazioni dei guadagni lavorativi futuri e il futuro costo delle rendite. Di conseguenza in uno schema (N)DC non c'è nessuna garanzia, se non minima, sulla rendita finale; quindi, il rischio di una pensione inadeguata ricade quasi totalmente sull'individuo. Tale schema è per definizione funded.

[8] Yari (1965) sviluppa un modello che, sulla base di ipotesi stringenti, conclude che la trasformazione in una rendita del capitale accumulato durante la vita sia la scelta ottimale per l'individuo.

In uno schema a prestazione definita, invece, la pensione di un lavoratore si basa non sulla sua accumulazione, cioè sui contributi pagati, quanto sulla sua storia salariale (gli anni di contribuzione), sulla base della durata del suo impegno lavorativo. In questo caso le contribuzioni non sono versate in un conto, quanto in un fondo, che copre un gruppo più o meno ampio di persone (come, ad esempio, gli impiegati di un'azienda in uno schema pensionistico occupazionale).
Una caratteristica distintiva riguarda il modo con cui i salari entrano nella formula di calcolo delle prestazioni; infatti, in uno schema basato sull'ultimo stipendio, le pensioni sono basate appunto sullo stipendio della persona nell'ultimo anno di lavoro, o negli anni finali, mentre invece una pensione DB differente può essere basata sul salario reale di una persona su un periodo più esteso, includendo anche l'intera carriera lavorativa.
Uno schema a prestazione definita può essere gestito dallo Stato o dai datori di lavoro (si parla di piano pensionistico pubblico e privato).
Nel primo caso i rischi macroeconomici e sociali ricadono sullo Stato, e quindi solo indirettamente sui contribuenti di oggi; i governi tendono infatti ad adeguare le prestazioni così come i contributi sulla base di aggiustamenti automatici o come risultato di specifici provvedimenti legislativi nel momento in cui non c'è un bilanciamento tra ricavi e spese (si faccia riferimento alle note 4 e 5).
In uno schema pensionistico privato (gestito da un datore di lavoro di un'azienda privata sponsor, da un fondo pensione o da un altro provider privato) a benefit definito, nessun rischio ricade direttamente sui pensionati; tuttavia, come nel caso pubblico, tali schemi potrebbero adeguare sulla base di aggiustamenti il livello delle prestazioni correnti e/o future alla luce dei risultati finanziari.
Per un piano DB (oltre che DC con garanzie), un attuario deve calcolare il valore degli attivi e il valore attuale delle passività future: se il valore delle attività è maggiore delle passività, si avrà uno schema funded (o parzialmente funded), ma come tradizionalmente accade per i piani pensionistici pubblici, non esistono attivi e di conseguenza il piano sarà unfunded (o PAYG).

Una innovazione è data dagli schemi figurativi a contribuzione definita (NDC), tipicamente gestiti dallo Stato e concettualmente simili alle pensioni a contribuzione definita pure. In tali schemi, ogni lavoratore paga un contributo pari ad una percentuale

dei suoi guadagni, che sono accreditati in un conto individuale figurativo, che serve di fatto solo per scopi contabili, in quanto lo schema non possiede i fondi investiti nei mercati finanziari. Il conto figurativo individuale al momento del ritiro sarà la somma dei contributi e dei rendimenti: il capitale iniziale sarà moltiplicato per un fattore di conversione ("g-value"), che dipende dall'aspettativa di vita al momento del ritiro, dal tasso ipotetico (figurativo) di rendimento e dalla politica di rivalutazione della pensione, tutte variabili decise dall'ente pubblico.
In pratica, un conto di riferimento viene creato in un sistema figurativo per tutti gli individui che iniziano a lavorare, in cui i contributi della previdenza sociale vengono accumulati durante l'arco di vita lavorativa. Tali contributi non sono letteralmente accreditati in uno specifico conto (non sono reali, in quanto il sistema è tipicamente PAYG), ma sono usati come linee guida per il calcolo dell'ammontare della pensione. Al momento della maturazione della pensione, si converte il capitale figurativo accumulato in una rendita, dividendo il totale del fondo figurativo per il fattore di conversione.
Tali sistemi mimano quindi gli schemi a contribuzione definita, con parametri che sono però definiti da regole governative, e sono tipicamente usati come transizione da sistemi finanziati come PAYG verso sistemi funded.

1.2.3 Una tassonomia dei piani pensionistici, dei fondi pensioni e degli enti pensione

Definiti i concetti fondamentali alla base dei sistemi pensionistici, risulta ora rilevante fornire una tassonomia dei piani pensionistici (pension plan), dei fondi pensione (pension fund) e istituzioni pensionistiche (pension entity), sulla base della classificazione dell'OECD.

I primi possono essere definiti come contratti giuridicamente vincolanti che possiedono un esplicito obiettivo di pensionamento: le prestazioni, quindi, non potranno essere erogate, a meno di significative penalizzazioni, fino a che il beneficiario non avrà raggiunto una certa età di pensionamento giuridicamente definita.
Tale contratto può essere parte di un contratto di lavoro più ampio, può essere stabilito nel regolamento o nei documenti del piano dal datore di lavoro o può essere richiesto

dalla legge. Oltre ad avere un obiettivo pensionistico esplicito, i piani pensionistici possono offrire benefici aggiuntivi, come prestazioni in caso di invalidità e malattia.

Esiste una principale distinzione tra piani pensionistici pubblici e privati.
I piani pensionistici pubblici consistono in schemi di previdenza sociale o regimi simili, dove le amministrazioni pubbliche (cioè centrali, statali e locali, compresi gli istituti di previdenza sociale) amministrano il pagamento delle prestazioni pensionistiche. Il loro scopo è fornire dei benefici minimi (fissi o legati al reddito, o "flat-rate basic schemes" e "earnings-related schemes") al momento del pensionamento per la popolazione in generale. Sono tendenzialmente PAYG, anche se, come visto, molti Paesi si sono via via spostati verso soluzioni parzialmente o totalmente funded.
Un piano pensionistico privato è diretto da un ente diverso dalle amministrazioni pubbliche che gestisce il pagamento delle prestazioni pensionistiche. I piani pensionistici privati sono gestiti dal datore di lavoro in qualità di sponsor del piano, da un ente pensionistico o da un altro provider privato. I piani pensionistici privati possono essere complementari o sostitutivi dei sistemi di previdenza sociale pubblici. I piani pensionistici privati sono di tipo funded, almeno nei Paesi dell'OECD.

All'interno dei piani pensionistici privati, si distinguono piani aziendali (occupational) e piani pensionistici personali (personal).
Per quanto concerne i primi, l'accesso a tali piani è legato al rapporto di lavoro tra l'aderente e l'ente che istituisce il piano (il plan sponsor[9]). I piani occupazionali possono essere stabiliti da datori di lavoro o gruppi di datori di lavoro (come associazioni di categoria), a volte in collaborazione con sindacati del lavoro. Generalmente, lo sponsor del piano è responsabile del versamento dei contributi ai piani pensionistici, ma può anche essere richiesto agli impiegati di contribuire.
Si distinguono piani occupazionali obbligatori (mandatory) e volontari (voluntary).
Per quanto riguarda i primi, la partecipazione a tali piani è obbligatoria per i datori di lavoro. Per legge, accordi di contrattazione a livello nazionale o di settore, i datori di lavoro sono obbligati a partecipare a un piano pensionistico. I datori di lavoro devono

[9] Uno sponsor del piano è quell'entità, di solito un'azienda o un datore di lavoro, che istituisce un piano sanitario o pensionistico, a beneficio dei dipendenti dell'organizzazione. Le responsabilità dello sponsor del piano includono la determinazione dei parametri di adesione, le scelte di investimento e, in alcuni casi, la fornitura di pagamenti di contributi sotto forma di denaro e/o azioni.

istituire e versare i contributi ai piani pensione. Se i datori di lavoro sono obbligati ad offrire un piano pensionistico aziendale, ma l'adesione dei dipendenti è su base volontaria, comunque tali piani sono considerati obbligatori.
I piani occupazionali volontari sono istituiti su base volontaria dai datori di lavoro (compresi quelli in cui vi sia l'iscrizione automatica nell'ambito di un contratto di lavoro o laddove la legge preveda l'adesione dei dipendenti a piani predisposti su base volontaria dai datori di lavoro).

Nei piani pensionistici personali, l'accesso non è legato ad un rapporto di lavoro, cioè gli individui selezionano e acquistano tali piani in maniera indipendente dai datori di lavoro, che possono comunque versare contributi ai piani pensionistici personali. Alcuni piani personali possono avere un'adesione ristretta, ad esempio ai lavoratori autonomi, ai membri di una particolare associazione di mestiere o di categoria.
Anche in questa categoria, esistono piani (personali) obbligatori e volontari. Per quanto concerne i primi, agli individui può essere richiesto di versare i contributi pensionistici a un piano pensionistico di loro scelta o a un piano pensionistico specifico, mentre in quelli volontari, le persone non sono tenute a versare obbligatoriamente i contributi in uno specifico piano.
Indipendentemente dalla tipologia di piani, questi potranno essere tanto a contribuzione definita (DC) o prestazione definita (DB). Si rimanda a quanto analizzato sopra.

Con fondo pensione (pension fund) si intende il pool dei risparmi accumulati durante la vita lavorativa degli individui. In un dato istante temporale, sono la somma dei flussi dei contributi, dei redditi da investimenti ed eventuali prestazioni pagate del datore di lavoro e dell'impiegato. I fondi pensione possono essere più o meno separati dal bilancio dello sponsor del piano. Esistono infatti fondi pensioni autonomi, non autonomi e assicurati.
I primi sono definiti come fondi pensione che sono legalmente separati dallo sponsor del piano e possono avere la forma di persona giuridica a scopo speciale (un ente pensione) o a gestione separata amministrata da istituzioni finanziarie per conto dei membri del piano/fondo. I fondi pensione che supportano piano pensionistici personali sono tipicamente autonomi. Sia nei piani aziendali che in quelli personali, i membri del piano hanno un diritto legale o altri diritti contrattuali verso gli attivi gestiti dal fondo,

rappresentanti il collaterale finanziario della promessa pensionistica. Forniscono quindi il più alto grado di protezione al beneficiario in caso di insolvenza dello sponsor.
In quelli non autonomi, un fondo pensione non è legalmente separato dallo sponsor del piano (aziendale). Le attività pensionistiche possono costituire una riserva nel bilancio dello sponsor (riserve contabili) oppure detenuti in veicoli legalmente separati ma di proprietà dello sponsor (riserve finanziarie). I membri del piano non hanno alcun diritto legale sugli attivi del fondo pensione. Tali fondi, pertanto, offrono il grado più basso di protezione in caso di insolvenza dello sponsor (che può usare gli attivi per finanziare la sua attività).
Infine, in molti Paesi, i prodotti pensionistici sono direttamente venduti da compagnie assicurative. Questi fondi pensioni "insured" sono comprati direttamente dallo sponsor per conto dei lavoratori attraverso polizze di gruppo o direttamente dagli individui e offrono un grado di protezione intermedia in caso di insolvenza tra fondi pensione autonomi e non autonomi, dal momento che gli attivi sono separati dal bilancio dello sponsor ma fusi con gli attivi dell'assicuratore.
I fondi pensione possono essere poi chiusi o aperti, se vi sono o meno restrizioni per la qualifica di membro dello stesso.

Esistono quattro tipologie di imprese generalmente coinvolte nella struttura di governance dei piani pensionistici: il gestore del piano (pension plan manager), il gestore del fondo pensione (pension fund manager), il depositario (custodian) e i revisori esterni (auditor).
Il manager del piano pensionistico è spesso costituito da una persona giuridica a scopo speciale (come un trust, una fondazione) che possiede e può controllare il fondo pensione per conto dei membri del piano pensionistico. Le funzioni del gestore del piano pensionistico consistono nella riscossione dei contributi, nella tenuta dei registri, nella gestione dei beni e nel pagamento delle prestazioni[10].
Spesso i manager del piano assumono dei manager del fondo pensione esterni, dotati di competenze specializzate nella gestione degli attivi patrimoniali, per il controllo di parte delle attività del fondo.
L'impresa depositaria è un'azienda fondamentale nella struttura di governance, il cui scopo è elaborare e gestire tutti i pagamenti e tenere in custodia i registri dei titoli per

[10] Molto spesso, questi servizi vengono delegati a provider esterni, alcuni di natura pubblica (ad esempio la riscossione dei contributi molto spesso viene eseguita dall'autorità fiscale).

ciascun manager. Inoltre, riferisce al plan manager, le sue operazioni sono soggette a controlli interni e contribuisce alle valutazioni di attivi e passivi.
Infine, i revisori esterni esaminano tutti i rendiconti finanziari, i sistemi IT, i controlli interni, e le ipotesi contabili e attuariali utilizzate dal manager del piano. L'autorità di vigilanza sulle pensioni (la COVIP in Italia) utilizza i revisori come strumento per adempiere alle proprie responsabilità.
Le imprese pensionistiche possono essere pubbliche o private e, analogamente ad altre persone giuridiche, ciò dipende dal fatto che siano soggette al diritto pubblico o privato.

1.3 I pilastri dei sistemi pensionistici

I sistemi pensionistici si caratterizzano per via delle ragioni storiche alla base della loro introduzione. In particolare, due sistemi possono essere distinti: il modello Bismarckiano[11] e quello di Beveridge[12].
Nei sistemi alla Beveridge, le prestazioni di previdenza sociale garantiscono ai cittadini un reddito di base, una pensione "flat-rate"[13] (potenzialmente "means-tested", cioè basata su specifiche condizioni di reddito) indipendente dalla loro professione e dai guadagni durante l'attività lavorativa. I cittadini sono liberi di integrare questo reddito con la previdenza professionale nell'ambito di un contratto con un datore di lavoro o attraverso la contrattazione collettiva. Tale sistema è stato messo in atto in Danimarca, Irlanda, in Olanda e nel Regno Unito. Corrisponde oggi ad un sistema flat rate PAYG, integrato da piani pensionistici privati, occupazionali (spesso obbligatori o semi-obbligatori) e personali.
Il sistema introdotto da Bismarck presuppone invece che le persone acquisiscano il diritto alle prestazioni di previdenza sociale sulla base esclusivamente del loro lavoro. Le prestazioni pensionistiche sono pertanto legate ai guadagni e alla professione. Questo sistema è stato seguito in Germania, Belgio, Francia e Italia e viene spesso integrato da una garanzia pensionistica minima per le persone che solo in parte hanno lavorato durante la loro vita.

[11] Istituito da Otto Von Bismarck, il Cancelliere di Ferro del secondo Reich.
[12] Dall'omonimo rapporto scritto nel 1942, sotto la direzione di William Beveridge, economista liberale britannico.
[13] Quindi a tasso fisso, non legato alla partecipazione al mercato del lavoro.

Tale regime, che fornisce un supporto più generoso rispetto a quello di Beveridge, prevede un ruolo minore per i piani privati aziendali funded.
Tale distinzione tra i due sistemi è oggi in realtà solamente arbitraria, poiché entrambi i sistemi si sono poi evoluti in modo diverso all'interno dei contesti nazionali; per esempio, i piani aziendali (occupational) si sono diffusi anche nei sistemi bismarckiani.

In letteratura, la pubblicazione della Banca Mondiale "Averting the old age crisis: policies to protect the old and promote growth" (World Bank,1994) distingue all'interno di tutti i sistemi pensionistici tre principali pilastri ("pillar"): un pilastro pubblico, uno occupazionale e un pilastro individuale volontario.
L'International Labour Office (ILO, Gillion 1999) propone invece un sistema a tre livelli ("tier"), con un primo livello per la prevenzione della povertà, un sistema PAYG pubblico obbligatorio e un terzo livello a contribuzione definita funded atto a supportare i primi due tier, entrambi di natura redistributiva. Tale distinzione spinge la Banca Mondiale ad introdurre un pilastro zero (0^{th} Pillar), con riferimento agli schemi pensionistici erogati su base universale senza condizionalità lavorativa o di reddito.
Si analizzerà in seguito l'approccio seguito dall'OECD (2005), che si distingue da quella della World Bank per essere più descrittivo nella sua natura, in assenza di scopi prescrittivi o riformistici. Anche tale classificazione distingue tre pilastri, sulla base degli obiettivi ad essi correlati.

Il primo pilastro mira ad evitare la povertà durante la vecchiaia; si fa riferimento ai piani pensionistici pubblici obbligatori PAYG, che vogliono garantire uno standard di vita minimo per tutti i pensionati. Vi è quindi un forte elemento redistributivo (equità), che può esplicarsi sotto tre differenti forme: basic, minimum e targeted.
Nel caso delle disposizioni pensionistiche di base (basic), le prestazioni erogate possono avere una duplice forma: una prestazione "residence-based" o una prestazione che è disponibile solo per coloro che hanno versato contributi nell'arco della loro carriera. Il livello della prestazione dipende dal numero di anni di residenza o contribuzione ma sono indipendenti dai livelli di guadagni durante la carriera lavorativa. In Olanda, esiste l'AOW (basispensioen), pagata dall'età di 65 anni e fornisce una prestazione basic fino al 70% del salario minimo, mentre nel Regno Unito vi è la Basic State Retirement Pension (BSP), che rappresenta una pensione a tasso fisso (indipendente dai contributi

versati) uguale per tutti i lavoratori dipendenti e autonomi disponibile dall'età di 65 anni.

Le pensioni minime (minimum) sono i regimi prevalenti nel primo pilastro, spesso legate alle targeted. Tali pensioni garantiscono un livello minimo del reddito pensionistico e sono definite nella maggior parte dei Paesi OECD. Sono di fatto legate al secondo pilastro: se l'attività lavorativa è stata scarsa o assente, tale da non permettere di raggiungere la pensione minima attraverso il tradizionale sistema legato ai guadagni, tale livello minimo sarà allora attivato. In Lussemburgo[14], ad esempio, accanto a una pensione basic pari a EUR 513.15 per mese nel 2020, vi è la pensione minimum pari a EUR 1892,77 e condizionata a 40 anni di periodi contribuitivi e non contributivi.

Le pensioni means-tested/targeted fanno riferimento a pensioni le cui prestazioni sono condizionate alle esigenze di specifici individui, con riferimento alle loro possibilità economiche piuttosto che alla loro storia contributiva. In Italia esiste per esempio l'assegno sociale, un benefit che non dipende dal pagamento delle contribuzioni ma che viene pagato alle persone in una situazione di difficoltà economica ad una certa età.

Il secondo pilastro vuole garantire invece un adeguato tasso di sostituzione del reddito.

Tecnicamente, il tasso di sostituzione è definito come il rapporto della pensione sul salario medio percepito durante la vita lavorativa o in un definito periodo della vita, e determina quindi che tenore di vita la pensione permette ai pensionati durante il pensionamento.

All'interno del secondo pilastro così definito si ritrovano i piani pensionistici legati all'occupazione lavorativa: sia piani pensionistici pubblici a prestazione definita (DB), tipicamente PAYG, come anche schemi aziendali a contribuzione definita (DC).

Tali regimi presentano un grado di redistribuzione variabile, da molto limitato nei piani occupazionali DC a molto più accentuato nei piani pubblici PAYG DB.

Una gran parte dei sistemi pensionistici pubblici sono legati ai guadagni, nel senso che la pensione dovrebbe essere commisurata ai guadagni durante la vita, prendendo quindi in considerazione sia i livelli salariali che i periodi di contribuzione. La formula per la determinazione della pensione può prendere in considerazione tanto i guadagni dell'intera vita lavorativa che gli ultimi, o quelli medi durante un certo periodo.

[14] E, similmente, in Repubblica Ceca.

La maggior parte dei Paesi UE usa i primi, mentre altri Paesi riducono i periodi contributivi solamente a certi intervalli di tempo, come Spagna e Francia. I sistemi pubblici pagano le pensioni come rendite vitalizie e sono molto spesso indicizzati all'inflazione o alla crescita dei salari, o entrambi.

Esistono quattro principali schemi pensionistici pubblici; innanzitutto, regimi a prestazione definita (DB, si veda in precedenza), con la sottocategoria dei "point system", regimi in cui la pensione viene calcolata sulla base dei punti assegnati in proporzione alla retribuzione e agli anni di contribuzione (i punti vengono sommati e moltiplicati per un valore che li converte a pagamenti). Esistono poi schemi NDC, cioè figurativi a contribuzione definita e schemi a contribuzione definita funded.

Per quanto concerne gli schemi gestiti privatamente, essi consistono in piani pensionistici privati (tipicamente aziendali) sia a contribuzione definita, che a prestazione definita[15].

Esempi di piani pensionistici di questo tipo sono rappresentati dagli Occupational Pension Schemes nel Regno Unito o dal 401(k) degli USA.

Tra i maggiori fondi pensioni aziendali nel mondo ritroviamo, ad oggi, Panasonic Holdings Corporation Pension Fund (Giappone), con un trilione e mezzo di dollari di attività gestite, Shell Asset Management Company B.V. (Olanda), con 104 miliardi di dollari di attivi, e IBM Retirement Funds (USA), con 91 miliardi di dollari.

Tali schemi assicurano un collegamento tra i guadagni realizzati durante la carriera lavorativa e le prestazioni pensionistiche. Tuttavia, a differenza di quelli pubblici, sono spesso non obbligatori.

L'esistenza di un sistema ad iscrizione obbligatoria (o semi-obbligatoria) consentirebbe a tali schemi di utilizzare economie di scala per ridurre i costi associati (di marketing, ad esempio), fornendo un prodotto molto competitivo, consentendo poi un miglioramento dei tassi di sostituzione dei primi due pilastri.

Se, da un lato, l'individuo non può scegliere il profilo di payout (cioè, se sia una rendita vitalizia, piuttosto che un capitale una-tantum o pagamenti a rate in un periodo

[15] Storicamente, come verrà evidenziato anche in seguito, molti fondi a prestazione definita nel corso degli anni Novanta hanno registrato casi di underfunding, ossia assenza di sufficienti attivi per fronteggiare le obbligazioni nei confronti dei dipendenti, con il conseguente passaggio verso sistemi a contribuzione definita

determinato), né di investimento, dall'altro tali piani sono spesso flessibili, permettendo la scelta del profilo di rischio e di portafoglio.

Infine, scopo principale del terzo pilastro è quello di offrire agli individui un'attraente opzione per migliorare il loro tasso di sostituzione pensionistico, cioè l'elemento di livellamento dei consumi. Sono chiaramente non obbligatori (voluntary) e privati, con sistemi a contribuzione definita e senza garanzia delle prestazioni finali.
Si tratta quindi di una previdenza integrativa individuale, costituita da prodotti finanziari e assicurativi (tipicamente polizze vita), "market-based", nel senso che il rendimento di tale gestione deriva esclusivamente da quello di mercato.
Esempi di terzo pilastro sono costituiti dai piani individuali pensionistici (PIP) in Italia, che forniscono un' ulteriore fonte di reddito pensionistico e sono istituiti da imprese di assicurazione, in Inghilterra dai self-invested personal pension (SIPP), che consentono agli individui di definire in autonomia le proprie decisioni di investimento sulla base di un ampio range di prodotti (come azioni, obbligazioni aziendali, ETF,…), o in Germania le cosiddette "*private Altersvorsorge"*, cioè le pensioni private, che comprendono le pensioni Riester e Rürup.
Di fatto, esiste una certa somiglianza nel design con gli schemi privati aziendali del secondo pilastro. Infatti, in alcuni Paesi (come in Danimarca), i dipendenti possono aggiungere contributi individuali ai loro schemi aziendali, trattati allo stesso modo delle contribuzioni contrattuali.
Il terzo pilastro è molto spesso caratterizzato da deducibilità fiscali delle contribuzioni, favorendone così la convenienza per i singoli risparmiatori nell'integrare i primi due pilastri.

1.4 Un'introduzione alle assicurazioni

1.4.1 L'attività assicurativa

Il verbo "assicurare", dal latino assecurare, derivato di securus, sicuro, significa "rendere sicuro, proteggere da un danno o pericolo" (Treccani). Il Codice civile, all'art 1882, definisce "l'assicurazione (…) il contratto col quale l'assicuratore, verso il pagamento di un premio, si obbliga a rivalere l'assicurato, entro i limiti convenuti, del

danno ad esso prodotto da un sinistro, ovvero a pagare un capitale o una rendita al verificarsi di un evento attinente alla vita umana". Si può facilmente intuire quindi che i concetti di assicurazione e rischio sono intrinsecamente legati.
L'impresa di assicurazione è allora quell'istituto finanziario che "assume sistematicamente una particolare tipologia di rischi che le viene trasferito dagli assicurati, il rischio puro, creando valore attraverso una gestione (…) più efficace ed efficiente rispetto ad altre alternative di gestione individuale o collettiva (Paci,2019). L'assicurazione ha quindi a che fare con la gestione delle conseguenze finanziarie derivanti da un evento rischioso (come il danno causato da un incendio ad un capannone industriale, la morte di un membro della famiglia, o una condizione di disabilità permanente e totale).

Un rischio può essere definito allora come una variabile aleatoria il cui risultato (o la cui realizzazione) è sconosciuto, per cui un insieme di possibili risultati deve essere specificato, e su questo insieme delle probabilità devono essere assegnate.
Il rischio può portare tanto ad un profitto che ad una perdita (si pensi al rischio derivante da un investimento azionario od obbligazionario), mentre il rischio puro (o rischio assicurabile) causa esclusivamente una perdita.
Un'impresa o una famiglia trasferisce tipicamente un rischio puro che si connota per avere una bassa frequenza di accadimento, ma un danno potenziale molto elevato: sono rischi considerevoli, capaci di causare costi ingenti se non l'insolvenza per le imprese e il danneggiamento dello standard di vita degli individui.
L'assunzione di rischi puri in modo sistematico consente alla compagnia di sfruttare la legge dei grandi numeri (o teorema di Bernoulli); tale legge afferma che, quando si considera un certo numero di realizzazioni di una variabile casuale (che identifica il verificarsi o meno di un sinistro), ciascuna caratterizzata da una stessa probabilità di accadimento e da una stessa gravità, la frequenza dei sinistri e il valore medio del danno tendono a coincidere con la probabilità del sinistro e con il suo valore se le realizzazioni sono indipendenti e il numero osservato tende ad infinito. Di conseguenza, sulla base della frequenza, cioè degli accadimenti verificatisi, si possono stimare gli eventi futuri, i risarcimenti nei confronti dei beneficiari, e di conseguenza calcolare i premi (cioè il "prezzo" dei prodotti assicurativi) da richiedere all'insieme degli assicurati.

Più ampio sarà il numero di eventi presi in considerazione, minore sarà l'errore di stima. Poiché la distribuzione binomiale converge all'infinito a quella normale, maggiore è la dimensione campionaria e più la curva della distribuzione si restringerà intorno alla media, con una diminuzione dunque della deviazione standard.
Quindi, attraverso il pool dei rischi ("… assume sistematicamente…"), il rischio medio sarà assai inferiore al rischio individuale ceduto, e quindi l'impresa assicurativa può sollevare il singolo dall'aleatorietà a cui è soggetto, dietro il pagamento di un premio, generalmente contenuto.

1.4.2 I prodotti assicurativi

Un contratto assicurativo può innanzitutto configurarsi come obbligatorio o libero.
Un esempio della prima categoria è rappresentato dall'assicurazione obbligatoria per gli infortuni sul lavoro (gestita in Italia dall'Inail, l'Istituto Nazionale per l'assicurazione contro gli infortuni sul lavoro); in ambito previdenziale, la cosiddetta "assicurazione sociale obbligatoria" rappresenta un istituto giuridico che prevede per gli iscritti le assicurazioni sociali per vecchiaia, invalidità e la disoccupazione involontaria (ed è gestita in Italia dall'Inps, l'Istituto nazionale della previdenza sociale).
Per quanto concerne le assicurazioni libere, sono tradizionalmente distinte in due rami: ramo vita e ramo danni[16]. Nel proseguo, si tratterà solo del primo.
L'obiettivo di una "polizza vita" (assicurazione vita, o life insurance) è quello di pagare prestazioni (o benefit) dipendenti da eventi che riguardano la vita di uno o più individui. L'ammontare può essere quantificato in vari modi, in quanto esistono polizze in cui la prestazione viene definita nel momento di stipulazione del contratto (come un ammontare costante o variabile sulla base di una regola predefinita), oppure polizze in cui i benefit dipendono da meccanismi di collegamento (come "inflation-linked benefit"

[16] All'interno di tale ramo, la classificazione dei rischi concerne infortuni (anche sul lavoro e malattie professionali), malattia, danni subiti da veicoli terrestri, ferroviari, aerei, marittimi, responsabilità civile autoveicoli (terrestri, aeromobili, veicoli marittimi, e generale, diversa delle tre precedenti), credito, cauzione, perdite pecuniarie, tutela legale e assistenza.

o “unit-linked benefit”, oppure prestazioni incrementate attraverso una partecipazione agli utili, come i meccanismi di bonus adottati nel Regno Unito).
In un contratto di assicurazione, le parti coinvolte possono essere diverse: l’assicuratore (ovvero la compagnia di assicurazione, l’ente giuridico), l’assicurato, la cui morte o sopravvivenza determina il pagamento delle prestazioni, il contraente (o l’assicurato, policyholder) che effettua il contratto e paga il premio e infine il beneficiario che riceve le prestazioni.

Esistono tre principali categorie di prodotti di assicurazione sulla vita.
Innanzitutto, esistono prodotti che offrono prestazioni in caso di sopravvivenza: è il caso vita, in cui il benefit è legato alla vita dell’assicurato. Lo scopo è quello di fornire al beneficiario (che può coincidere con il contraente e l’assicurato) importi differiti, tipicamente una somma forfettaria (o lump-sum) o una rendita (annuity). Prodotti tipici sono l’assicurazione di capitale differito (pure endowment) e le rendite vitalizie (life annuities[17]). Sono quindi prodotti con chiari obiettivi di investimento.
Ancora esistono prodotti assicurativi che offrono prestazioni in caso di decesso: è il caso morte. Tali prodotti mirano a coprire il rischio di morte e le relative conseguenze finanziarie; il benefit è di solito una somma forfettaria (le rendite sono meno comuni), pagata al beneficiario (mentre il contraente e l’assicurato possono coincidere).
L’assicurazione caso morte temporanea (term insurance) e le assicurazioni caso morte vita intera (le whole life insurance) appartengono a questa categoria.
Infine, vi sono prodotti, che combinano prestazioni in caso sia di morte che di sopravvivenza. In tali prodotti, di solito la prestazione è certa, sebbene pagata in un tempo aleatorio, e forfettaria; di solito sono coinvolti due beneficiari distinti, uno per la prestazione in caso di decesso e l’altro per la prestazione in caso di sopravvivenza.
Il prodotto tipico è l’assicurazione mista (endowment insurance).

Il pagamento dell’assicurato (il premio) può essere sia unico, cioè pagato all’emissione della polizza, oppure può essere costituito da una sequenza di premi periodici (il premio viene cioè rateizzato, e pagato solo in caso di sopravvivenza dell’individuo). In un qualsiasi momento l’assicurato dovrebbe essere in una posizione di credito (e l’assicuratore in posizione debitoria).

[17] Spesso confuse con i piani pensionistici a benefit definito, sebbene siano prodotti differenti (uno offerto da compagnie assicurative, l’altro da un’amministrazione pubblica o da un’azienda privata).

Affinché vi sia una situazione di equilibrio, i premi devono far fronte alle prestazioni e alle spese. Il rapporto che collega i premi, da un lato, alle prestazioni e alle spese, dall'altro, deve basarsi su un principio di calcolo del premio. Un principio comunemente adottato nell'assicurazione vita è il principio di equità (equivalence principle), per cui il premio che deve essere pagato dagli assicurati deve essere pari al valore attuariale (valore attuale atteso) delle prestazioni (e delle spese). Tale premio sarà detto premio equo.

Con riferimento ad un generico contratto di assicurazione sulla vita, si definisca Y, il valore attuale aleatorio dei benefit, P il singolo premio e Z il valore attuale aleatorio del risultato dell'assicuratore (profitto o perdita), quindi Z= P-Y. Il principio di equivalenza assume che E[Z]=0, pertanto P=E[Y], cioè il premio è il valore attuariale (valore attuale atteso) delle prestazioni[18]aleatorie future.

Gli ingredienti per il calcolo del premio consistono allora in un tasso di interesse ("i" nelle notazioni), per il calcolo del valore attuale delle prestazioni, un'opportuna base statistica (tipicamente ricavabile da tavole di mortalità, come si vedrà nel terzo capitolo) e la quota delle spese dell'assicuratore, che determinano come risultato il premio attuariale, cioè calcolato secondo principi finanziari e statistici.

1.4.3 Notazioni attuariali

Rendite in caso di sopravvivenza

Il valore attuariale di 1 unità monetaria pagabile al tempo *m* se l'assicurato (attualmente di età x) è vivo in quel momento, è pari a:

$$ {}_mE_x = (1+i)^{-m} \quad {}_mp_x \text{[19]} \qquad (1) $$

[18] A questo viene di solito aggiunto un safety loading (o caricamento di sicurezza, m), spesso incluso direttamente nel premio al fine di garantire alla compagnia assicurativa un risultato atteso positivo, ovvero un profitto, e per consentirle di poter affrontare situazioni avverse, in particolare legate ai rendimenti degli investimenti, e alle caratteristiche di variabilità nella mortalità degli assicurati. Quindi Π=P+m, e E[Z]=P-E[Y]=m.

[19] ${}_mp_x$ rappresenta la probabilità di un individuo di età x di essere in vita al tempo x+m, calcolabile utilizzando una tavola di mortalità.

Tale beneficio caratterizza un'assicurazione di capitale differito (pure endowment insurance).

Si consideri poi una sequenza di importi unitari pagati all'inizio di ogni anno finché l'assicurato è in vita. Il beneficio è fornito dalla rendita vitalizia (whole life annuity), il cui valore attuariale è:

$$\ddot{a}_x = \sum_{h=0}^{\omega-x} {}_hE_x \qquad (2)$$

Se gli importi annuali sono pagabili per un massimo di m anni, si parlerà di rendita vitalizia temporanea (temporary life annuity). Il valore attuariale è dato da:

$$\ddot{a}_{x:m\}} = \sum_{h=0}^{m-1} {}_hE_x \qquad (3)$$

Se gli importi annuali sono pagabili fintanto che l'assicurato è in vita, ma a partire da un tempo futuro r, abbiamo la rendita vitalizia differita (deferred life annuity). Il valore attuariale è:

$$r \mid \ddot{a}_x = \sum_{h=r}^{\omega-x} {}_hE_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:r\rceil} \qquad (4)$$

Formule equivalenti sono ottenibili in caso di sequenze di importi unitari, pagabili alla fine di ogni anno, quindi rendite vitalizie posticipate.

È opportuno notare come il pricing delle rendite vitalizie dipenda da diversi fattori di rischio. In particolare:

- Età al momento della sottoscrizione della polizza.
- Genere; il pattern per età della mortalità è differente tra maschi e femmine.
- Obbligatorietà; le rendite volontarie denotano un prodotto assicurativo comprato come conseguenza di una scelta individuale, esercitata su base volontaria (ecco perché rientrano nel terzo pilastro del sistema pensionistico), mentre quelle pensionistiche si riferiscono a prestazioni pagate a persone come conseguenza della loro appartenenza a piani pensionistici pubblici o privati occupazionali. La differenza è rilevante, in quanto quelle volontarie sono comprate da persone con

un'alta aspettativa di vita, e di conseguenza la tendenza nella mortalità per i sottoscrittori di rendite volontarie è diversa da quello della popolazione (si parla di effetto di selezione avversa, dal punto di vista dell'assicuratore).

- Informazioni disponibili all'assicuratore circa l'aspettativa di vita del sottoscrittore della polizza; l'assicuratore può offrire prezzi minori a persone con aspettativa di vita più bassa (come le rendite per invalidi o per persone con problemi di salute certificati).

Rendita in caso di morte

Il valore attuariale di un importo unitario pagabile al tempo h in caso di morte dell'assicurato nello stesso anno è pari a:

$$h \mid 1A_x = (1+i)^{-(h+1)} \quad {}_{h|1}q_x{}^{20}$$

(5)

Il valore attuariale di un importo unitario pagabile alla fine dell'anno di decesso, se ciò avviene entro m anni, è:

$${}_mA_x = \sum_{h=0}^{m-1} h \mid 1\, A_x$$

(6)

Tale prestazione è fornita dall'assicurazione caso morte temporanea (term insurance)
Se invece l'importo è pagabile in qualsiasi momento si verifichi il decesso, abbiamo l'assicurazione sulla vita intera (whole life insurance); il suo valore attuariale è dato da

$$A_x = \sum_{h=0}^{\omega-x} h \mid 1A_x$$

(7)

La prestazione in caso morte può essere limitata a intervalli di tempo che iniziano dopo che un dato periodo r (periodo di differimento) è trascorso dall'emissione della polizza. Si ha:

[20] ${}_{h|k}q_x$ rappresenta la probabilità di un individuo di età x di morire tra il tempo x+h e x+h+k.

$$r \mid mA_x = \sum_{h=r}^{r+m-1} h \mid 1 \quad A_x$$

(8)

Combinando le prestazioni fornite dall'assicurazione di capitale differito (pure endowment) e dall'assicurazione caso morte temporanea (term insurance), si ottiene la prestazione fornita dall'assicurazione mista semplice (endowment insurance), il cui valore attuariale è:

$$A_{x,m\rceil} = \quad {}_mE_x + \quad {}_mA_x$$

(9)

Capitolo II: Il Longevity Risk

2.1 Introduzione

Secondo Pitacco et al. (2009), l'aspettativa di vita alla nascita per i primi esseri umani doveva probabilmente aggirarsi tra i 20 e 30 anni, alla luce dei reperti archeologici e resti scheletrici ritrovati dagli studiosi. I primi dati di mortalità raccolti su di un collettivo in scala nazionale risalgono al 1750 nei paesi del nord Europa. Allora, l'aspettativa di vita era di circa 40 anni, per poi crescere a 45 a metà Ottocento.
Rapidi miglioramenti nella mortalità interessarono il Novecento, cosicché, per la metà del XX secolo l'aspettativa di vita era di approssimativamente di 60-65 anni. Con l'inizio del nuovo millennio, l'aspettativa alla nascita ha raggiunto circa i 70 anni.
In pratica, la speranza di vita si è triplicata nel corso della storia umana, sebbene la maggior crescita si sia concentrata negli ultimi 150 anni: la vita media è aumentata di appena 25 anni nei 10.000 prima del 1850, per poi crescere di altri 25 anni in soli 150.
In Italia, solo negli ultimi 15 anni la speranza di vita a 65 anni è aumentata di due, da 18 anni e 7 mesi a 20 e 6 mesi.
La figura 1 evidenzia le aspettative di vita di periodo per la popolazione sessantacinquenne dal 1920 al 2019 per alcuni tra i più longevi paesi nel mondo[21] secondo la classifica stilata dall'Organizzazione Mondiale della Sanità.

Sembrerebbe non esserci evidenza che tali miglioramenti nella longevità possano fermarsi, sebbene esistano pareri contrastanti a riguardo.[22]
Come evidenziato dal rapporto "Pensions at a Glance 2021" (OECD,2021)[23], il ritmo in questo progressivo invecchiamento non accenna a diminuire, e anzi sarà piuttosto rapido

[21] Sono considerati i Paesi per cui i dati di mortalità risultavano disponibili all'interno dell' Human Mortality Database.
[22] È la secolare disputa sull'esistenza o meno di un limite alla vita umana. Un'analisi compiuta da Belzile et al. (2022) alla business university HEC Montreal in Canada, suggerisce come tale controversia derivi da metodi non corretti di analisi statistica, con alcuni dataset che fissano un'età limite tra i 130 e i 180 anni, mentre altri addirittura non evidenziano alcun limite alla durata della vita umana.
[23] Ossia l'"Organisation for Economic Cooperation and Development", organizzazione intergovernativa con 38 stati aderenti, che si pone come obiettivo il progresso economico e il commerciale mondiale.

fino al 2060, quando dovrebbe cominciare a rallentare sostanzialmente (sebbene proiezioni così lontane nel tempo tendano ad essere soggette a grandi incertezze).

Nel report, si evidenzia come l'età mediana era di 41 anni nel 2020, 8 anni superiore rispetto al 1990 e ci si attende un suo ulteriore incremento di 6 anni al 2050.

Una genesi del fenomeno evidenzia come la prima parte del XX secolo sia stata caratterizzata da un significativo miglioramento nella mortalità infantile, derivante da un crescente sviluppo nella sanità pubblica e nella nutrizione, mentre nella seconda metà del secolo guadagni nell'aspettativa di vita sono associabili a decrementi della mortalità ad età più avanzate (dovute a riduzioni nelle morti per malattie cardiovascolari e cancro). Risulta essere la popolazione del mondo occidentale quella che ha subito la maggiore transizione nella mortalità nell'ultimo secolo, correlata sia ad una crescente sopravvivenza ad età avanzate, ma anche accompagnata da una minore natalità e una minore fertilità.

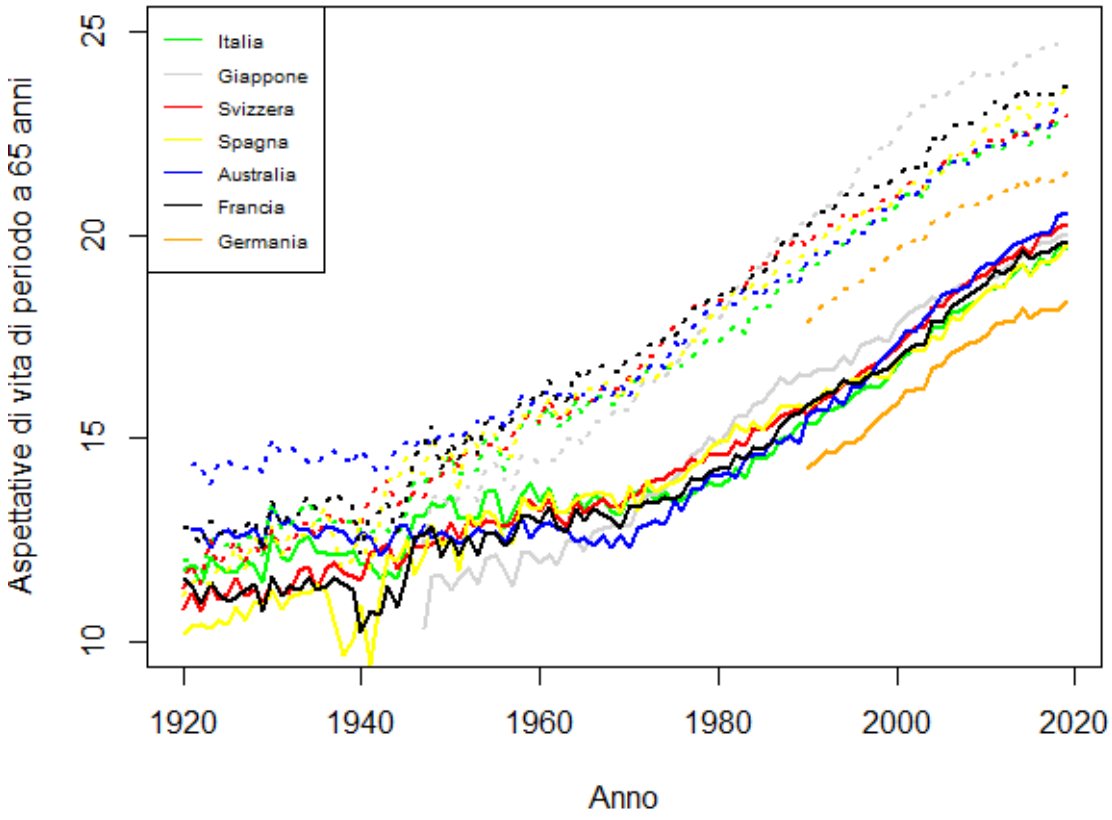


Figura 1: Aspettative di vita di periodo per la popolazione sessantacinquenne maschile (linea continua) e femminile (linea tratteggiata) per diversi Paesi

In tale contesto demografico, le questioni sulla longevità rivestono un ruolo assai importante, dal momento che incidono innanzitutto sulle decisioni dei governi, che devono finanziare le promesse a coloro che smettono di lavorare attraverso le pensioni e l'assistenza sanitaria con una riduzione della base imponibile. Il problema nasce dal fatto che la maggior parte dei paesi industrializzati sono organizzati su sistemi previdenziali fondati sul metodo Pay-As-You-Go (PAYG); secondo tale schema, come abbiamo visto, le risorse necessarie per il pagamento delle pensioni derivano dalle contribuzioni della generazione correntemente attiva. Risulta evidente che un progressivo invecchiamento della popolazione pone una minaccia a tale sistema, sia per una diminuzione della base fiscale che per l'allungamento del periodo di pagamento delle prestazioni. Le rilevazioni più recenti evidenziano come il numero di persone più vecchie di 65 anni [24] per 100 persone in età lavorativa (il cosiddetto "old age to working-age ratio") sia salito da 21 nel 1990 a 31 nel 2020 in media nei Paesi dell'OECD e nei prossimi 30 anni ci si aspetta che raggiunga i 53. Tale rapporto misura la pressione sul segmento della popolazione attualmente impiegata e mostra come tali individui sopportano un crescente fardello nel sostenere l'invecchiamento della popolazione.

Allo stesso modo, il rischio di longevità (o *longevity risk)* impatta le aziende sponsor di piani pensionistici privati (occupazionali) a prestazione definita, che finanziano le pensioni (oltre che gli obblighi di assicurazione sanitaria a ex-dipendenti maturati negli anni) e le aziende assicurative che vendono rendite vitalizie[25].

Il rischio di longevità colpisce allora indirettamente gli individui, che potrebbero vedersi ridotta la capacità di fare affidamento alle pensioni governative o legate appunto agli sponsor aziendali, con la conseguenza di un crescente rischio legato alla sopravvivenza alle risorse accumulate per la vecchiaia (legato poi ad un rischio di non autosufficienza in età avanzata).

Poiché la crescente longevità ha l'effetto di far lievitare i costi di finanziamento delle pensioni a prestazione definita, molte aziende si sono ormai spostate verso fondi a prestazione definita chiusi oppure verso fondi a contribuzione definita.[26]

[24] L'età media di pensionamento in Europa si aggira in effetti attorno ai 64,4 anni, secondo le ultime statistiche dell'OCSE.

[25] Si rimanda al capitolo I.

[26] Numerosi sono i casi di underfunding dei fondi a prestazione definita negli USA e nel Regno Unito.

L'effetto della longevità sulle compagnie assicurative è tale da determinare errori nel pricing e nel calcolo delle riserve, con una riduzione significativa dei profitti.
Sebbene gli incrementi nelle aspettative di vita possano porre un peso sui sistemi pubblici e privati, non lo farebbero in realtà se tali incrementi fossero pienamente anticipati (cioè se i governi e gli sponsor dei piani pensionistici richiedessero maggiori contributi pensionistici e alzassero le età del pensionamento, cosa che è ben osservabile nella realtà di ogni Paese). Quindi non è l'incremento nell'aspettativa di vita ad essere di per sé una minaccia sulla vitalità dei sistemi pensionistici, quanto la combinazione di incertezza circa le tendenze nell'incremento delle aspettative di vita, e le variazioni attorno a questa incertezza nel trend. Questo è di fatto il rischio legato alla longevità (si veda paragrafo 2.2), e solo di recente la natura stocastica dei tassi di mortalità è stata riconosciuta.

Un'ulteriore criticità del problema emerge dai decrescenti tassi di sostituzione (il "*replacement rate*" rappresenta la percentuale del reddito prepensionamento che i pensionati possono aspettarsi di beneficiare durante la pensione): eccetto poche nazioni, tali tassi sono meno del 50%.

L'insostenibilità dell'intero sistema è evidente guardando alle stime dei dati: Biffis e Blake (2009) riportano che ogni anno di aspettativa di vita addizionale si stima aggiunga almeno il 3% al valore attuale delle passività pensionistiche in Inghilterra, mentre Swiss Re Europe riferisce come tale anno addizionale possa incrementare le *pension liabilities* del 4-5%; secondo Coughlan et al. (2008), se i tassi di mortalità diminuissero di appena l'1% rispetto alle aspettative dei fondi pensione o fornitori di rendite (annuity), l'impatto sul costo di erogazione di una pensione per un sessantacinquenne varierebbe dal 3 al 5%, mentre per un quarantacinquenne in età lavorativa dal 7 all'11%.
Dal punto di vista dei fondi pensioni e delle compagnie assicurative che forniscono contratti di rendite, spesso a copertura vitalizia, devono essere implementate opportune soluzione di longevity risk management, al fine di ridurre e/o eliminare tale rischio.
Per invece attenuarne l'impatto sui singoli individuali, sono fondamentali future riforme per l'adeguamento delle pensioni obbligatorie, con parametri di compensazione da ricercarsi nella capacità dei sistemi di prevenire povertà, garantendo durata del

percepimento e tasso di sostituzione. Attuali soluzioni alternative sono da ricercare nel nostro Paese nei sistemi pensionistici privati, in particolare a capitalizzazione, in grado di integrare il sistema pubblico obbligatorio ed in generale nel secondo (privato) e terzo pilastro del sistema previdenziale.

2.2 Il longevity risk

La sfida maggiore non consiste nella semplice valutazione della tendenza (decrescente) della mortalità, bensì nel fatto che è il futuro sviluppo dell'aspettativa di vita ad essere incerto, e l'incertezza è una fonte di rischio. Infatti, sebbene gli andamenti passati suggeriscano che ulteriori cambiamenti nei tassi di mortalità debbano essere presi in considerazione, è evidente una certa perplessità riguardante lo stesso futuro sviluppo della mortalità. Le decisioni riguardanti le riforme delle pensioni e dei sistemi assicurativi dovrebbero tenere in conto gli effetti di tale particolare incertezza sul calcolo del costo delle pensioni. Tali interventi potranno poi sì mitigare, ma non eliminare del tutto, gli effetti del rischio di mortalità, e pertanto esisterà sempre un rischio residuale, che dovrà essere opportunamente preso in considerazione.

Mentre il focus dei regolatori è sempre stato sul concetto di rischio legato agli investimenti finanziari, c'è oggi una crescente consapevolezza che un'accurata quantificazione e un puntuale management del rischio legato alle passività pensionistiche e assicurative è egualmente importante (si veda la Direttiva 2009/138/CE, Solvency 2).

La stessa, all'articolo 105, 3(b), definisce il rischio di longevità come "the risk of loss, or of adverse change in the value of insurance liabilities, resulting from changes in the level, trend, or volatility of mortality rates, where a decrease in the mortality rate leads to an increase in the value of insurance liabilities (*longevity risk*)", e di conseguenza "The capital requirement for longevity risk referred to (…) shall be equal to the loss in basic own funds of insurance and reinsurance undertakings that would result from an instantaneous permanent decrease of 20% in the mortality rates used for the calculation of technical provisions", pertanto, tale rischio viene legato alla perdita economica originata da un istantaneo, ma permanente, decremento nei tassi di mortalità usati per il computo delle riserve tecniche. Il rischio di longevità sembrerebbe essere quindi

trattato sulla base di una valutazione di rischio condotta in un orizzonte temporale di un anno, sebbene per natura il *longevity risk* sia un rischio in realtà di lungo termine.
Prassi di risk management necessitano pertanto di essere sviluppate in modo da prendere in esame opportunamente l'incertezza sul *long-term trend* della mortalità.

Più in dettaglio, il rischio legato alla mortalità[27] può emergere in differenti modi, ed in particolare tre casi possono essere contemplati (si faccia riferimento alla Figura 2):

a) Un individuo potrebbe vivere più o meno a lungo rispetto alla durata di vita media nella popolazione a cui appartiene. In termini di frequenza di morti nella popolazione, ciò potrebbe risultare in tassi di mortalità osservati più alti rispetto a quelli attesi in alcuni anni e più bassi in altri, senza una apparente tendenza in tali deviazioni.
b) L'aspettativa di vita media di una popolazione potrebbe essere differente da quella attesa. In termini di frequenza di morti, questo significa che i tassi di mortalità osservati nel tempo nella popolazione sono sistematicamente al di sopra o al di sotto rispetto a quelli derivanti dalle tavole di mortalità.
c) I tassi di mortalità in una popolazione potrebbero subire salti improvvisi, a causa di eventi estremi quali epidemie, importanti cambiamenti climatici, disastri naturali e così via.

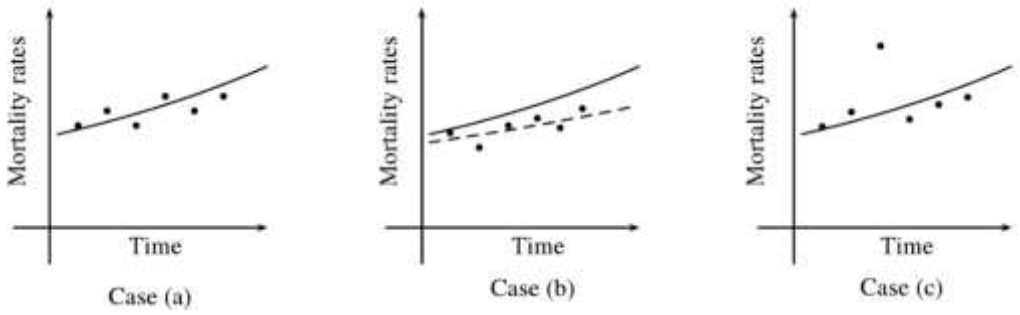


Figura 2: Tassi di mortalità documentati (punti) e attesi (linea continua) per una data coorte.

Fonte: Pitacco et al., 2009.

[27] Il termine rischio di mortalità denota una mortalità più alta di quella attesa e genera pertanto conseguenze negative per l'assicuratore che offre prodotti caso morte, che si troverà a pagare importi più alti di quelli previsto. Il termine rischio di longevità si riferisce invece ad una mortalità più bassa di quella anticipata, con un *downside risk* per l'assicuratore che fornisce benefit in caso di sopravvivenza (come rendita vitalizie o pure-endowment)

Il caso a) rappresenta la situazione di possibili deviazioni attorno ai tassi attesi; il rischio di mortalità che emerge da tale situazione è un rischio di fluttuazioni casuali. Tale rischio, caratteristico del business assicurativo e noto come *process risk*, concerne la posizione individuale, e come tale si riduce nel momento in cui tale posizione diventa insignificante rispetto al portafoglio complessivo. I risultati della teoria del rischio affermano come la gravità di tale rischio decresca nel momento in cui la dimensione di portafoglio aumenta (pooling). Ecco perché il rischio di *random fluctuations* è anche noto come *pooling risk*, o rischio idiosincratico.

Nel caso b), le deviazioni sono rispetto al valore atteso, e hanno una natura sistematica. Questo potrebbe risultare sia per una errata specificazione del modello di mortalità rilevante (cioè il pattern temporale differisce da quello previsto in linea teorica) o per una valutazione parziale dei parametri rilevanti (ad esempio per una mancanza di dati). Il primo aspetto è chiamato *model risk*, mentre il secondo *parameter risk.*

Il termine "rischio di incertezza" fa allora riferimento sia al rischio di modello che a quello di parametro congiuntamente, quindi incertezza nella rappresentazione di un fenomeno. Quando vengono prese in considerazione età adulte, il rischio di incertezza emerge in particolare come una non anticipata riduzione nei tassi di mortalità: questo è il *longevity risk*. Tale rischio, concernente la mortalità aggregata, non può essere limitato incrementando la dimensione di portafoglio, perché al contrario il suo impatto aumenta all'aumentare della dimensione di portafoglio, dal momento che le deviazioni concernono tutti gli assicurati nella stessa direzione. Tale rischio è allora noto come *non-pooling risk*, o rischio di deviazioni sistemiche.

Infine, il caso c) denota un rischio catastrofico, ossia un rischio di breve periodo che concerne improvvise cadute/aumenti nelle frequenze di morte (ossia la definizione contenuta in Solvency 2, precedentemente analizzata, per il rischio di longevità). Anche tale rischio è non-pooling e concerne la mortalità aggregata, tuttavia effetti di diversificazione possono comunque essere realizzati.

Nella seguente trattazione verrà preso in considerazione il longevity risk, come definito al punto b).

2.3 Impatto finanziario del rischio di longevità

Numerosi studi evidenziano l'importanza del rischio di longevità per fondi pensione e aziende assicurative, distinguendosi sotto due principali categorie: analisi di come tale rischio viene quantificato e analisi sul come la distribuzione di probabilità della mortalità futura viene modellata. Per quanto concerne il secondo punto, si rimanda al quarto capitolo, in cui verranno discussi i principali modelli predittivi, a partire dal più noto e usato modello di Lee-Carter.

Invece, concentrandosi sul primo, un approccio spesso utilizzato per quantificare il rischio di longevità in un portafoglio di rendite vitalizie consiste nel determinare il suo effetto sulla distribuzione di probabilità del valore attuale dei pagamenti futuri per una data struttura a termine dei tassi di interesse (si veda Oliveri 2001, Brouhns et al. 2002, Dowd et al. 2006 e Cossette et al. 2007). Ancora, una parte della letteratura si concentra sugli effetti del longevity risk sulla probabilità di una scarsa dotazione patrimoniale (funding ratio) per un fondo pensione (Oliveri e Pitacco 2003, Hari et al 2008), l'effetto sulla probabilità di rovina per un portafoglio di rendite (Olivieri e Pitacco, 2003).

Nel caso del singolo individuo, alcuni studi si concentrano sugli effetti del rischio di sopravvivenza alle risorse accumulate. (Trzpiot e Majewska, 2015).

2.3.1 Valore attuale scontato delle passività

Olivieri (2001) si concentra sul quantificare il longevity risk in un portafoglio di rendite vitalizie determinando il suo effetto sulla distribuzione di probabilità del valore attuale dei futuri pagamenti. Secondo Olivieri (2001), le probabilità di morte ad un anno seguono la legge di mortalità di Heligman-Pollard[28]. In questo paragrafo si segue invece l'approccio di De Waegenaere et al. (2010), che replica i risultati di Olivieri (2010) assumendo però rischio di processo e di parametro sulla base del modello di Lee-Carter[29], e contemplando le varianti proposte da Brouhns et al. (2002) e Cairns (2007) per le valutazioni sul rischio di modello. I risultati sono calcolati sui dati della popolazione olandese.

[28] Si rimanda al capitolo 3, paragrafo IV.
[29] Si rimanda al capitolo 4.

Per un fissato anno t, si considerino N *annuitants* (beneficiari di un'*annuity*, cioè di una rendita), tutti di età x=65 anni al tempo t. La rendita ripaga un euro ogni anno che il beneficiario sopravvive.

Il valore attuariale di un'annuity al tempo-t, definita Y_i, che paga il beneficiario i-esimo negli anni t+τ, con τ≥1 e un tasso d'interesse pari a r=0.04 è data da:

$$Yi = \sum_{\tau \geq 1} \frac{1}{(1+r)^{\tau}} \; 1_{i,\, t+\tau}$$

(10)

dove $1_{i,\, t+\tau}$ è una variabile dummy che è pari a 1 nel caso in cui l'*annuitant i* sia ancora vivo al tempo t+τ e 0 altrimenti.

Si assuma inizialmente che i futuri tassi di morte siano noti con certezza (quindi esiste un rischio di mortalità a livello individuale, ma non il longevity risk); possiamo allora calcolare il valore atteso del valore attuale Y_i, per un dato i, con $a_{65,\, t}$ (m) per la popolazione maschile e $a_{65,\, t}$ (f) per quella femminile., dove $a_{x,t}$ è pari a:

$$a_{x,t}^{(g)} = \sum_{\tau \geq 1} \mathbb{E}\left[1_{i,t+\tau}\right] \frac{1}{(1+r)^{\tau}} = \sum_{\tau \geq 1} {}_{\tau}p_{x,t}^{(g)} \frac{1}{(1+r)^{\tau}}$$

(11)

Assumendo Y_i indipendenti ed unicamente distribuiti (ipotesi definita come i.i.d), con valore atteso $E(Y_i)$ e varianza pari a $\sigma^2 = \text{Var}\,(Y_i)$, allora la varianza di $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i$ risulta pari a:

$$Var\,(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i) = \frac{\sigma 2}{N}$$

(12)

Nel caso in cui N tenda ad infinito, la varianza si annulla.

Allora le probabilità di morte (e le corrispondenti probabilità di sopravvivenza) rappresentano il rischio di mortalità a livello individuale, che però può essere eliminato dalla compagnia assicurativa o dal fondo attraverso la messa in pooling degli attivi.

Si assuma ora l'esistenza del rischio di longevità; condizionatamente ai tassi futuri di mortalità, dati dall'insieme $\mathcal{F}_t = \left\{q_{x,t+\tau} \middle| \tau_{\geq 0}\right\}$ ha senso trattare gli Y_i come indipendenti, con ora media $\mu(\mathcal{F}_t)$ e varianza $\sigma^2\,(\mathcal{F}_t\,)$, entrambi dipendenti da $\mathcal{F}_t$. Calcolando la varianza non condizionale di $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i$, dobbiamo tenere ora in considerazione che $\mathcal{F}_t$ sono casuali a causa del rischio di longevità. Si ritrova che:

$$\text{Var}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i\right) = \mathbb{E}\left(\text{Var}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i\right) \mid \mathcal{F}_t\right) + \text{Var}\left(\mathbb{E}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i\right) \mid \mathcal{F}_t\right)$$

(13)

Pertanto,

$$\text{Var}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i\right) = \mathbb{E}\big(\sigma^2(\mathcal{F}_t)\big)/N + \text{Var}\left(\mu(\mathcal{F}_t)\right)$$

(14)

Il primo termine nella parte destra dell'equazione corrisponde all'effetto pooling, e quindi svanisce all'aumentare di N. Tuttavia, il secondo termine è indipendente da N.
Allora l'effetto pooling non risulta più sufficiente ad eliminare il rischio di mortalità: il rischio di longevità rimane.
Trattando di un più generale portafoglio di rendite, il valore atteso totale $\mathcal{Y}$ sarà pari a $\sum_{i=1}^{N} Y_i$. Si assuma che, condizionatamente a $\mathcal{F} = \{q_{x,t+\tau} | \tau_{\geq 0}\}$, le Y_i siano distribuite indipendentemente. Si riportano i calcoli nella seguente Tabella 1.

	Males			Females		
	$N=1$	$N=100$	$N=1000$	$N=1$	$N=100$	$N=1000$
$\mathbb{E}(\mathcal{Y})$	11.024	1102.365	11023.654	12.897	1289.737	12897.374
$\mathbb{E}(\text{Var}(\mathcal{Y}\|\mathcal{F}_t))$	19.604	1960.397	19603.968	17.963	1796.332	17963.316
$\text{Var}(\mathbb{E}(\mathcal{Y}\|\mathcal{F}_t))$	0.031	312.609	31260.878	0.057	567.703	56770.266
$\text{Var}(\mathcal{Y})$	19.635	2273.006	50864.845	18.020	2364.034	74733.582
γ	0.40197	0.04325	0.02046	0.32914	0.0377	0.0212

Tabella 1: Statistiche descrittive del portafoglio di rendite

Fonte: De Waegenaere et al. (2010)

La prima riga riporta i valori attesi per il portafoglio di rendite, sia per il caso maschile che femminile, per differenti dimensioni di portafoglio. Le successive tre righe presentano le varianze di questi portafogli, secondo la scomposizione (5):

$$\text{Var}\,(\mathcal{Y}) = \mathbb{E}(\text{Var}(\mathcal{Y} \mid \mathcal{F}_t)) + \text{Var}\left(\mathbb{E}(\mathcal{Y} \mid \mathcal{F}_t)\right)$$

(15)

Come detto sopra, il primo termine sulla parte destra dell'equazione corrisponde al rischio di portafoglio senza longevity risk, mentre il secondo termine è dovuto alla presenza di tale rischio. Dato che tale termine cresce per $(N)^2$ (dove N identifica la dimensione del portafoglio) all'aumentare di N[30], per portafogli di grandi dimensioni tale termine dominerà il rischio totale di portafoglio.

L'ultima riga riporta il coefficiente di variazione, descritto come il rapporto tra la deviazione standard di $\mathcal{Y}$ e il suo valore atteso. Nella letteratura attuariale, tale rapporto rappresenta una misura di rischio "relativa", il rischio per un'unità di perdita.

Con rischio di longevità, otterremmo:

$$\gamma = \left(\frac{1}{N}\frac{\mathbb{E}(\mathrm{Var}(Y_i \mid \mathcal{F}_t))}{\mathbb{E}(Y_i)} + \frac{\mathrm{Var}\big(\mathbb{E}(Y_i \mid \mathcal{F}_t)\big)}{\mathbb{E}^2(Y_i)}\right)^{1/2} \qquad (16)$$

Tale equazione mostra come, per grandi dimensioni N, il rischio di longevità domina il rischio totale, e tende inoltre a non scomparire, con un limite per N tendente ad infinito pari a 0.0160 per i maschi e 0.0185 per le femmine.

Tali evidenze hanno importanti conseguenze in termini di risk management: come già anticipato nel paragrafo 2.1, il rischio di mortalità individuale (e quindi di fluttuazioni casuali della mortalità) può essere ridotto incrementando le dimensioni di portafoglio, come la tradizionale pratica assicuratrice suggerisce; con il rischio di longevità, invece, incrementare la dimensione del portfolio non riduce l'impatto del rischio di longevità, e quindi altri strumenti di gestione del rischio devono essere applicati.

2.3.2 Volatilità del Funding Ratio

L'approccio descritto sopra presenta l'inconveniente di essere un approccio *"liability only"*: ignora l'impatto del rischio finanziario sul *longevity risk.*

Si discute allora un approccio alternativo, in cui la quantificazione del longevity risk viene effettuata analizzando il suo effetto sulla distribuzione di probabilità del funding ratio ad una certa data futura.

Il funding ratio viene definito come il rapporto tra il valore delle attività e il valore delle passività (per quanto riguarda il denominatore, viene seguito l'approccio del regolatore,

[30] $\mathrm{Var}\left(\mathbb{E}(\mathcal{Y} \mid \mathcal{F}_t)\right) = N^2\mathrm{Var}\left(\mathbb{E}(Y_i \mid \mathcal{F}_t)\right)$

che richiede che le passività siano valutate al cosiddetto fair-value, sebbene ciò rimanga comunque una questione controversa).

Hàri et al. (2008) usano un'analisi di simulazione per determinare le caratteristiche distributive del funding ratio all'inizio dell'anno t+T, per le scadenze T=1 e T=5, dato che il funding ratio all'anno *t* è pari a 1. Considerano un fondo pensione con N beneficiari, aventi diritto a una rendita vitalizia (differita) a partire dai 65 anni d'età, all'inizio dell'anno t=2004, e quantificano l'incertezza nei futuri funding ratios per varie strategie di investimento, sulla base di portafogli con diverse dimensioni. Assumono che i beneficiari entrino all'età x_0=25 e vadano in pensione a x=65.

L'analisi viene condotta sui dati della popolazione olandese, sulla base di un approccio run-off (cioè considerano una situazione dove non ci sono nuovi entranti nel fondo, né diritti sono costruiti né premi pagati dopo il tempo t), con il valore equo delle passività calcolato attraverso le best estimates[31].

I principali risultati sono i seguenti:

- anche tale studio evidenzia come, aumentando le dimensioni del fondo, il rischio di mortalità individuale diminuisce e decresce verso zero, per l'effetto pooling. Al contrario, il rischio di longevità non diventa trascurabile, essendo indipendente dalla dimensione del portafoglio.
- se il rischio finanziario venisse perfettamente coperto (cosicché l'incertezza nella durata di vita futura rappresenterebbe l'unica fonte di incertezza) allora i fondi pensioni sarebbero esposti ad un sostanziale grado di incertezza. In effetti, per un fondo grande (con un numero di partecipanti superiore ai diecimila), la deviazione standard del funding ratio in un orizzonte temporale di 5 anni è pari al 5,3% del valore atteso[32].
- se invece anche il rischio di mercato venisse considerato, il contributo del longevity risk al rischio complessivo diventa meno importante. La significatività del longevity risk decresce se la frazione di investimenti in azioni nel portafoglio di attività aumenta.

[31] $BEL_\tau := \sum_{s\geq 1} \mathbb{E}_\tau[\tilde{L}_{\tau+s}] \cdot P_\tau^{(s)}$, in pratica una media dei flussi di cassa futuri, ponderata per le probabilità, sulla base della struttura a termine dei tassi di interesse.

[32] Deviazioni sistematiche e non sistematiche dai tassi di sopravvivenza attesi implicano che i "buffer" (cioè i requisiti di capitale aggiuntivi) devono essere della misura del 7%-8% del valore iniziale delle passività per ridurre la probabilità di underfunding al 2,5% su un orizzonte temporale di 5 anni.

2.3.3 Probabilità di rovina

L'approccio sopra seguito richiede di effettuare assunzioni sul fair-value delle passività: risulta improbabile che il prezzo delle passività *longevity-linked* equivalga al *best estimate value*, dato che questo potrebbe sottostimare il prezzo al quale un fondo pensione potrebbe vendere le sue passività.

Un approccio alternativo consiste nel determinare l'effetto del rischio di longevità sulla probabilità di rovina per una compagnia assicurativa o per un fondo pensione.

La probabilità di rovina può essere definita come il percentile della distribuzione di probabilità del risultato casuale $Z^{[P]}$[33] , tale per cui il capitale è esaurito (cioè $P(Z^{[P]}<-M$, dove M rappresenta l'ammontare di capitale allocato al portafoglio).

Olivieri e Pitacco (2003) studiano i requisiti di solvibilità per portafogli di rendite, dove la solvibilità viene definita, seguendo un approccio stocastico, come l'abilità di far fronte, con un'assegnata probabilità (ovviamente alta), alle passività randomiche, descritte da una struttura di probabilità realistica (basata sull'esperienza reale).

Vengono analizzati i requisiti di solvibilità seguendo una duplice accezione: requisiti di solvenza *reserve-based*, dove la solvenza si realizza nel momento in cui il valore degli attivi risulta maggiore o uguale al valore della riserva di portafoglio, e requisiti *obligations-based*, per cui una compagnia di assicurazioni è giudicata solvente al tempo *t* se a quel tempo è capace di far fronte agli obblighi futuri.

L'analisi viene condotta utilizzando la legge di mortalità di Heligman-Pollard[34] sulla base sia di un approccio deterministico, implementato usando una data funzione di sopravvivenza proiettata (approccio che considera solo un rischio di fluttuazioni casuali) che di un approccio stocastico, in cui viene utilizzato un set di funzioni di sopravvivenza proiettate, a cui vengono assegnati diversi "degree of belief"[35], così da evidenziare un certo grado di incertezza nelle tendenza future della mortalità (emerge allora il rischio di deviazioni sistematiche, vale a dire il rischio di longevità).

Emerge chiaramente come, per una data scelta dei parametri (dimensione di portafoglio, tasso d'interesse, probabilità di rovina…), una comparazione tra il caso deterministico e quello stocastico mostra un forte aumento dei margini di solvibilità richiesti nel secondo

[33] $Z^{[P]}$ può essere definito come la $\Pi^{[P]} - X^{[P]}$, cioè la differenza tra i premi e le spese pagate.

[34] $\frac{qx}{px} = GH^x$, si rimanda al terzo capitolo.

[35] Ossia diverse probabilità di accadimento.

caso. Questo è dovuto al fatto che un approccio stocastico permette, come detto, di analizzare non solo il rischio di fluttuazioni casuali, ma anche di *sistematic deviations*.

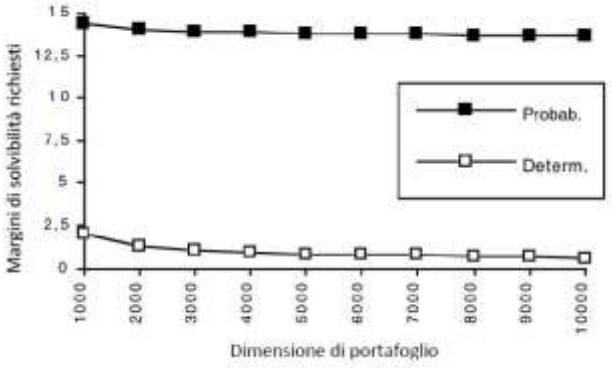


Figura 3: Margini di solvibilità richiesti
Fonte: Pitacco (2002)

Trzpiot e Majewska (2015) studiano gli effetti del rischio di longevità sulla sostenibilità di una pensione per la popolazione polacca, utilizzando un moto browniano per descrivere il comportamento casuale dei benefit futuri. Mostrano come, sotto una strategia di investimento del fondo conservativa (con basso rischio e rendimento, tipicamente 1% di rendimenti medi e 5% di standard deviation), un uomo polacco di età 65 anni, sulla base di uno spending rate del 6% (ciò significa che dato un conto pensionistico di $500.000, verranno erogati al pensionato $30.000 annui), affronta il rischio di una pensione non sostenibile (cioè il rischio di sopravvivere alle risorse accumulate durante l'attività lavorativa e quindi sfruttate durante la fase di *payout,* o di decumulo) del 23,3%, mentre una donna della stessa età ha una probabilità persino più alta, pari al 35%. In pratica, per la popolazione polacca, un quinto della popolazione maschile e un terzo di quella femminile si ritrovano in "rovina" prima della morte. Se invece strategie più rischiose venissero adottate (con media dei rendimenti pari al 4.5% e deviazione standard pari al 10%), le probabilità di rovina diminuirebbero considerevolmente, scendendo al 9,8% per i maschi e al 14,2% per le femmine. Un simile risultato era in effetti stato evidenziato nel paragrafo sulla volatilità del funding ratio, per cui il rischio legato agli investimenti finanziari tende a sovrastare quello di longevità per strategie sui titoli azionari (tendenzialmente più rischiose).

2.4 Longevity Risk Transfer Market

2.4.1 Il contesto di riferimento e il Longevity Risk Transfer Market

Riprendendo quanto visto in precedenza, le dimensioni del mercato globale del rischio di longevità per le passività pensionistiche sono ragguardevoli; Michaelson e Mulholland (2014) le stimano a circa $60 trilioni e $80 trilioni[36]. I due ricercatori calcolano successivamente le dimensioni del *longevity risk* sottostanti a queste passività. Ogni anno addizionale di aspettativa di vita non anticipata all'età di 65 anni, corrispondente all'incirca ad un incremento dello 0,8% nei miglioramenti nella mortalità o a una riduzione del 13% nei tassi di mortalità, e può incrementare le passività pensionistiche del 4-5% (Swiss Re Europe, 2012). Risk Management Solutions (RMS) computa la deviazione standard di uno shock sostenuto (per oltre 10 anni), impattante i miglioramenti della mortalità annuali relativamente alle aspettative, a circa lo 0,8%.
Michaelson e Mulholland usano tali stime e ricavano come le passività legate alla longevità potrebbero aumentare del 10-12,5% come risultato di miglioramenti nella mortalità non previsti. Date passività pensionistiche aggregate globali di circa $60-$80 trilioni, queste potrebbero essere tra i $6 e i $8 trilioni più alte.

Dato questo quadro d'insieme, risulta evidente l'esistenza di una criticità derivante dal rischio relativo al progressivo invecchiamento della popolazione, che deve essere opportunamente gestita. La soluzione più semplice per un fondo pensione consiste nell'accettare il rischio internamente come business risk. Ancora, le aziende minacciate dal "longevity risk" possono "diversificare i loro rischi di longevità", cioè bilanciare i

[36] Tali dati comprendono, per la maggior parte, attivi cumulati dei sistemi pensionistici privati sulla base dei dati OECD (32,1 trilioni, di cui il 67,9% costituito da fondi pensione) e gli obblighi non finanziati per i partecipanti passati e attuali negli Stati Uniti (24,3 trilioni). I dati dei sistemi di previdenza sociale pubblici non vengono stimati, seppur gli studiosi riconoscono essere sicuramente sostanziali.
L'OECD definisce i private *pension system asset* come tutte le forme di investimento privato il cui valore è associato a un piano pensionistico sul quale i diritti di proprietà sono fatti valere da unità istituzionali, individualmente o collettivamente, mentre *pension funds'assets* (il 67,9% di 32,1 trilioni) come le attività comprate attraverso i contributi al piano pensionistico per lo scopo esclusivo di finanziare i *benefit* dei piani previdenziali.

loro portafogli sfruttando coperture naturali ("natural hedge") attraverso attività di fornitura di rendite e assicurazioni caso morte.
Oppure le aziende lo possono spostare sui singoli individui: si è già accennato al progressivo abbandono dei piani "defined benefit (DB)" verso piani "defined contribution (DC)" in UK e USA, come anche la chiusura di piani DB a nuovi membri.
Un'altra modalità adottata consiste nell'offrire ai membri del piano una somma forfettaria una tantum in cambio dei loro diritti al piano pensionistico.
Queste ultime azioni limitano solamente la crescita del problema, e non lo colpiscono alla radice, dato che comunque le aziende sponsor si troverebbero in difficoltà per i benefit già maturati. Inoltre, spostare il rischio sui singoli individui comporta il semplice trasferimento del problema sul mercato assicurativo delle rendite, dato che, come detto, il rischio impatta soprattutto sugli individui (che potrebbero soffrire una mancanza di risorse durante la vecchiaia e, per evitare tale rischio, dovrebbero sottoscrivere prodotti assicurativi sulla vita). Come sottolineato dal Basel Committee on Banking Supervision (2013), tali mercati risultano abbastanza piccoli, a causa della mancanza di strumenti di copertura per l'hedging del rischio di longevità; strumenti che, a partire da inizio secolo, cominciano a diffondersi, portando allo sviluppo del *longevity risk transfer market.*

Possiamo pertanto definire il mercato per il trasferimento del longevity risk (o *longevity risk transfer market*) come parte del più ampio *life market*, e comprende transazioni di diversa specie, in particolare pension buy-outs, pension buy-ins, bulk annuity, accordi di riassicurazione, oltre che titoli e derivati *mortality-linked* (includendo, tra gli altri, longevity bond, longevity swap, q-Forwards, S-Forwards, oltre che numerosi altri prodotti dell'ingegneria finanziaria).
Queste operazioni sono classificate come transazioni *macro-longevity*, dal momento che si occupano delle passività dei piani pensionistici aziendali e *annuity books* (si veda in seguito). A grandi linee, si distinguono operazioni *insurance-market based*, che si avvalgono di contratti assicurativi o riassicurativi ed operazioni *capital-market based*, cioè operazioni che implicano il trasferimento del rischio di longevità al mercato dei capitali (e in cui ritroviamo i titoli mortality-linked citati in precedenza).

Altri segmenti del life market comprendono *mortality catastrophe* bond e swap [37], *life securitization*[38] e transazioni "*life settlement*"[39].

Riprendendo Michaelson e Mulholland, Pigott e Walker (2016) elencano i principali stati per passività pensionistiche nel settore privato: USA ($14,46 trilioni), UK ($2,685 trilioni), Australia ($1,639 trilioni), Canada ($1,298 trilioni), Olanda ($1,282 trilioni) e Giappone ($1,221 trilioni).

Tuttavia, secondo gli studiosi, solo UK, USA, Canada e Olanda hanno le condizioni per lo sviluppo di un mercato per il trasferimento del *longevity risk*[40], e anche Kessler (2019) riporta come in tali Paesi si sia effettivamente concentrata l'ondata di innovazione per lo sviluppo di soluzioni per l'abbassamento del livello di rischio dei fondi pensioni.

Tali condizioni riguardano bassi tassi d'interesse, i quali, incrementando il valore attuale dei pagamenti pensionistici più distanti nel tempo, enfatizzano il rischio associato alla longevità nei piani pensionistici; aggiornamenti costanti nelle proiezioni sulla *longevity* e sulla *mortality* da parte della comunità attuariale; maggiori trasparenze contabili nella valutazione di attività e passività pensionistiche; maggiori poteri d'intervento da parte delle autorità di regolamentazioni delle pensioni.

In effetti, il mercato cominciò a decollare proprio nel Regno Unito nel 2006, con l'autorizzazione all'esercizio di Paternoster, un assicuratore monolinea creato appositamente per acquisire piano pensioni DB inglesi, e ciò che fu lì realizzato venne osservato con vivo interesse nella restante parte del mondo, specialmente in Nord America. Il 2012 fu l'anno spartiacque per il mercato americano, con le gigantesche transazioni di General Motor ($26 miliardi) e Verizon ($7,5 miliardi), il primo un buy-out parziale, mentre il secondo un buy-in. Anche il mercato canadese cominciò ad

[37] Operazioni di trasferimento del rischio di un aumento catastrofico nella mortalità, a causa di pandemie o disastri naturali.

[38] Le *life securitization* costituiscono accordi di trasferimento dei rischi associati a particolari blocchi del business assicurativo al mercato dei capitali nella forma di titoli.

[39] Un accordo di *life settlement* consiste nella vendita di una polizza assicurativa (term insurance) ad una terza persona per un importo maggiore del valore di riscatto, ma minore del benefit in caso di morte. Il terzo soggetto assume l'obbligo associato al pagamento dei premi e riceve gli eventuali pagamenti dei benefit nel momento in cui l'assicurato muore. La cartolarizzazione di tali operazioni iniziò nel 2004 e tali pool sono stati generalmente piccoli, contenendo polizze di al massimo poche centinaia di individui e da qui il termine "*micro-longevity market*".

[40] Si precisa che i dati risalgono al 2016. Le condizioni attuali sono chiaramente diverse.

espandersi ad inizio decennio, e al 2019 vantava oltre 26 miliardi di passività pensionistiche trasferite a partire dal 2007.

Nella successiva decade, numerosi mercati più piccoli cominciarono a beneficiare delle maggiori innovazioni sviluppate in UK e USA, tra cui Australia, Germania e Svizzera.

Accanto ai fondi pensioni, anche le compagnie assicurative in Canada, Olanda e Regno Unito utilizzarono i progressi finanziari compiuti nello sviluppo di soluzioni di risk management per i blocchi di rendite.

In definitiva, questi avanzamenti nella gestione del rischio pensionistico e di rendita assicurata hanno posto le basi per una crescita nel *longevity risk transfer market* a livello globale.

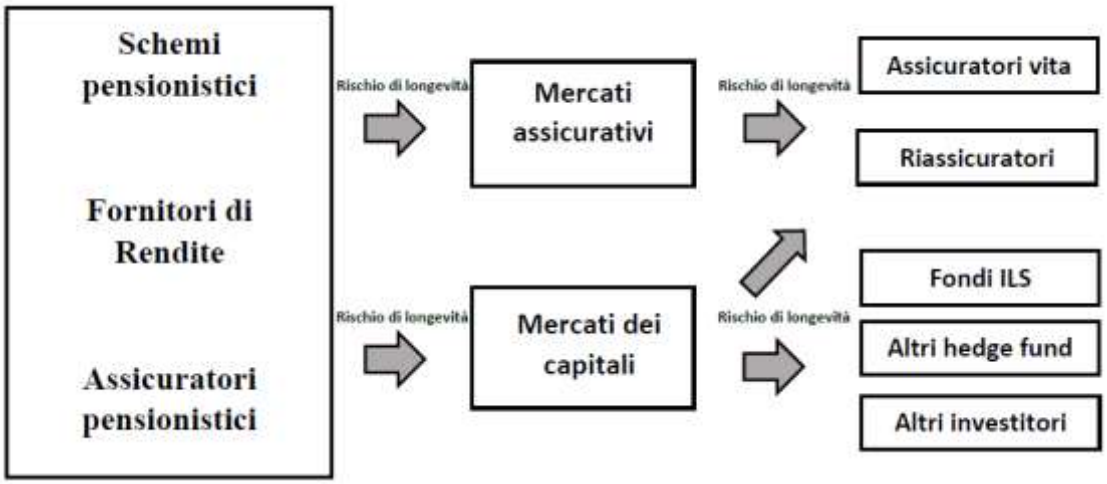


Figura 4: Il longevity risk transfer market

Fonte: Coughlan G.e al (2012).

2.4.2 Gli stakeholder nel Longevity Risk Transfer Market

Risulta ora interessante soffermarsi sugli attori operanti all'interno di questo mercato, esaminando le principali categorie di stakeholder.

Una classe naturale di stakeholder è rappresentata dagli *hedger*, cioè coloro che hanno una particolare esposizione verso il rischio di longevità e desiderano eliminare quel rischio (forniscono quindi l'offerta di *longevity risk*). Come accennato in precedenza, fondi pensioni a prestazione definita e fornitori di rendite guadagnano meno o perdono se la mortalità migliora di più di quanto anticipato (si troverebbero di fronte a maggiori prestazioni da pagare rispetto a quelli previsti), mentre le compagnie di assicurazione sulla vita, che forniscono polizze term life oppure Whole-of-life insurance, tendono a

guadagnare di più (minore è la mortalità e minori saranno i pagamenti dovuti in caso di morte del beneficiario), e viceversa. In molti casi fornitori di rendite e assicuratori sulla vita fanno parte della stessa azienda assicurativa vita; pertanto, le rendite e i *life books* forniscono almeno una parziale copertura naturale ("natural hedge"). Alternativamente, soggetti con esposizioni non desiderate possono rivolgersi a riassicuratori o istituzioni del mercato dei capitali (come si vedrà in seguito).

Esistono poi gli investitori, cioè quelle entità che si assumono il rischio di longevità e ricevono un premio per esso (forniscono quindi la domanda al mercato). Innanzitutto, ci sono assicuratori e riassicuratori che operano attraverso i mercati assicurativi. Tali organizzazioni sono disposte a vendere protezione dalla longevità come parte del proprio business model (per esempio sottoscrivendo rendite).
Esistono poi investitori di medio-lungo termine, che utilizzano il mercato dei capitali. Questi includono investitori in ILS (insurance-linked securities), hedge funds e altri investitori a più lungo termine, come fondi sovrani, dotazioni finanziarie e *family office*: tutte queste entità ricercano attività che hanno una bassa correlazione (basso beta e un potenziale alfa positivo) con gli esistenti strumenti finanziari. Ci sono poi altre istituzioni compratori naturali di longevity risk, come le industrie farmaceutiche e le case di cura a lungo termine (long term care house).

Un mercato di titoli legati alla longevità potrebbe attrarre gli speculatori, ossia investitori a breve termine che scommettono sulla direzione del prezzo dei singoli titoli.
Il coinvolgimento attivo di speculatori risulta peraltro importante, dato che permette di generare liquidità di mercato come sottoprodotto della loro attività di trading, di fatto essenziale per il successo dei mercati di future e di opzioni.
Arbitraggisti cercano poi di sfruttare anomalie di pricing nei titoli per ricavare profitti privi di rischio. Affinché l'attività di arbitraggio possa funzionare in modo efficiente, è necessario che vi siano relazioni di prezzo ben stabilite tra i titoli. Tuttavia, il longevity market è ad oggi non sufficientemente sviluppato per la creazione di tali opportunità di arbitraggio.

Il governo ha poi molte ragioni per essere interessato al *longevity risk transfer market*. Potrebbe desiderare promuovere tali mercati per assistere le istituzioni finanziarie che

hanno un rischio di longevità, riducendo la probabilità che grandi aziende possano dichiarare fallimento a causa dei loro fondi pensioni; è la stessa società, nel suo complesso, a godere dei benefici derivanti da una maggiore stabilità nell'economia.
I governi medesimi potrebbero anche essere interessati a gestire la loro esposizione al rischio di longevità, dal momento che, come abbiamo visto, sono significativi portatori di tale rischio per via di sistemi previdenziali pay-as-you-go.

Infine, un ruolo fondamentale è ricoperto dai regolatori finanziari, i quali hanno due obiettivi principali: da una parte l'accrescimento della stabilità finanziaria[41] attraverso la promozione di un mercato equo ed efficiente, e dall'altra garantire che i clienti retail possano ottenere contratti equi (secondo quanto riportato dalla U.K. Financial Services Authority[42]).

2.4.3 Soluzioni insurance-market based

Le soluzioni più tradizionali e note di gestione del rischio di longevità non desiderato in un piano pensionistico a prestazione definita o in un portafoglio di rendite consistono nella vendita della passività attraverso un contratto assicurativo o riassicurativo.
Si tratta di *pension buy-out* (o cessazione della pensione) o, in un contesto assicurativo, di *group/bulk annuity transfer*, quindi trasferimento di rendite in blocco.
Più di recente, anche *buy-in* pensionistici e longevity swap (noti anche come *longevity insurance*) sono stati classificati tra le soluzioni insurance-based per il trasferimento del longevity risk.

Una comune operazione di buy-out pensionistico prevede il trasferimento delle attività e delle passività ad un assicuratore vita regolato[43] (che si caratterizza per una maggiore competenza nelle previsioni e nel management dei cashflow longevity linked).
Si ipotizzi il seguente esempio.

[41] E, dal momento che il rischio di longevità non può essere completamente coperto, Solvency 2 richiede che le imprese assicurative rispettino determinati requisiti di capitale (Blake et al., 2014).
[42] Analogamente in Italia, il Testo Unico della Finanza (cioè il Decreto legislativo 24 febbraio 1998, n. 58) cita all'art.5, comma 1 gli obiettivi dell'attività di vigilanza, richiamando alla lettera c, la stabilità e il buon funzionamento del sistema finanziario.
[43] Tipicamente dall'FSA (Financial Services Authority) in UK.

Un'azienda presenta attivi pari ad A e passività pari a L, valutate su base continuativa dall'attuario del piano. Nel momento in cui le attività del fondo sono insufficienti a coprire le passività, cioè A<L, l'azienda riconosce un deficit pari ad L-A. Se invece A>L, l'azienda sarebbe in surplus. Gli assicuratori vita conducono allora dei processi di due-diligence per la valutazione delle passività, facendo delle assunzioni tipicamente più prudenti (sui miglioramenti della mortalità futuri, tassi d'inflazione e rendimenti di mercato) rispetto a quelle dei piani pensione, e di conseguenza molto spesso risulterà che L'>L per i passivi.

Tali incrementi nella valutazione delle passività determinano deficit o ridotti surplus nel momento in cui l'azienda si rivolge all'assicuratore per la definizione dell'operazione.

Nel caso di deficit, l'azienda prende a prestito l'ammontare L'-A e lo paga all'assicuratore per effettuare il buy-out dei suoi attivi pensionistici e delle passività; la transazione permette quindi al datore di lavoro di scaricare le passività pensionistiche dal suo bilancio patrimoniale. Il vantaggio è sicuramente quello di evitare volatilità negli attivi e nelle passività, pagamenti di commissioni al management del piano e ogni altra tassa addebitata (si pensi ad esempio a quelle relative al Pension Protection Fund, PPF, che protegge i membri di schemi pensionistici a prestazione definita nel Regno Unito dal 2005 e che sono addebitate a tutti gli schemi a prestazione definita idonei).

Dal punto di vista dei membri del piano, le pensioni sono garantite in toto, subordinatamente ovviamente alla solvibilità dell'assicuratore vita.

Il principale svantaggio dei buy-out pensionistici lo si ritrova negli alti costi associati, dovuti per lo più ad una regolamentazione sempre più stringente per le compagnie assicurative (Solvency 2), al fatto che un eventuale underfunding richiederebbe, come visto, il pagamento iniziale di una somma dall'azienda sponsor per raggiungere la piena capitalizzazione prima di essere venduta. Un altro aspetto spesso negativo è relativo al timing, dal momento che, una volta effettuata l'acquisizione, non può essere rinegoziata, e alla possibile insolvenza delle aziende assicurative.

Ecco perché si sono diffuse soluzioni alternative ai cosiddetti full buy-out, come i buy-out parziali o i non-insured buy-out. I primi possono avere forme diverse e coinvolgono il trasferimento delle passività originate da un sottogruppo di membri (per esempio relativamente alle pensioni differite, pensioni in pagamento…) o pagabili in un limitato orizzonte temporale (ad esempio, passività con scadenza sopra i dieci anni).

I secondi invece rappresentano operazioni di trasferimento delle passività pensionistiche a istituzioni che non sono aziende assicurative regolate, mantenendo così il piano pensionistico all'interno del regime normativo delle pensioni. In pratica tali operazioni consistono nel vendere l'entità contenente il piano pensione ad un'altra azienda che assume la responsabilità per quel piano (un esempio è rappresentato da Citigroup, che ha acquisito l'azienda sponsor del fondo pensione Thomson Regional Newspapers nell'agosto 2007).

Le operazioni di buy-in comportano invece l'acquisto massiccio di rendite da parte del piano pensionistico per coprire i rischi associati a un sottoinsieme di passività del piano, tipicamente relativi ai membri ritirati dall'attività lavorativa. In pratica lo sponsor del piano paga un premio iniziale all'assicuratore che successivamente esegue pagamenti periodici allo sponsor del fondo pensione uguali a quelli fatti da quest'ultimo ai suoi membri.

Quindi i contratti di rendita assicurativa diventano di fatto un attivo del piano e vanno a coprire le specifiche caratteristiche di mortalità del piano suddetto in termini di età, genere e importi pensionistici.

Tipicamente i buy-in rappresentano una tappa intermedia verso un futuro buy-out totale e permettono allo sponsor del fondo pensione il vantaggio di una immunizzazione totale di una porzione delle sue passività per un prezzo inferiore rispetto a quello richiesto per un buy-out completo.

Poiché, come detto, il contratto di rendita diventa un attivo del piano pensionistico, piuttosto che dei membri del piano, le passività pensionistiche rimangono nel bilancio patrimoniale dello sponsor (non vengono eliminate come nel caso del buy-out).

Di conseguenza, i partecipanti al piano sono ancora esposti al rischio di insolvenza dello sponsor se il piano risulta in deficit e indirettamente al rischio di insolvenza della compagnia assicurativa.

Un esempio di buy-in nel Regno Unito è il *pensioner* buy-in, nel quale le passività associate con i pensionati che stanno attualmente ricevendo le pensioni sono eguagliate con delle rendite.

La figura 5 riassume le principali caratteristiche di buy-out e buy-in.

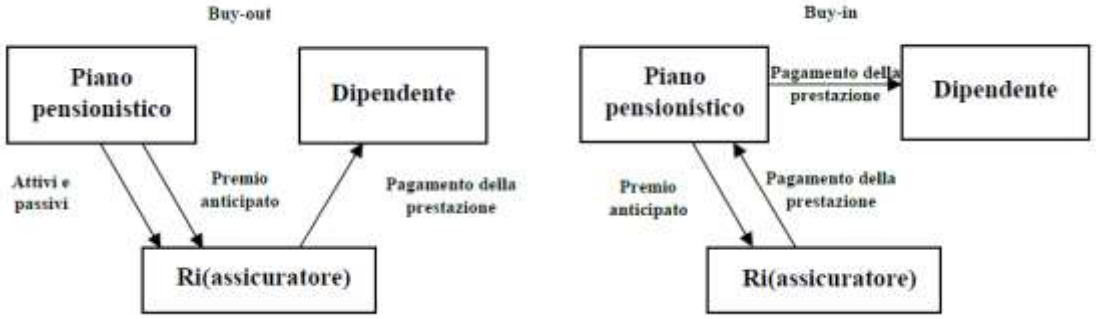


Figura 5: Struttura dei buy-out pensionistici e delle transazioni buy-in

Fonte: Basel Committee on Banking Supervision (2013).

Una terza efficace soluzione consiste nel contratto di *longevity insurance* o *insurance-based* longevity swap. Questa rappresenta effettivamente una versione spostata nel comparto assicurativo del capital-market based longevity swap (poi discusso).

La struttura tipica coinvolge un compratore ("buyer") dello swap, che paga una serie di flussi di cassa fissi al fornitore ("provider") e riceve in cambio una serie di flussi di cassa *floating*, legati alla esperienza nella mortalità realizzata dal compratore.

Quest'ultima serie viene poi utilizzata per pagare le pensioni, di cui l'acquirente del suddetto swap (l'hedger del longevity risk) è responsabile.

Nessun attivo viene trasferito e il piano pensionistico trattiene internamente i rischi di investimento associati all'attivo di portafoglio. Il vantaggio di tali contratti è quello di rimuovere il rischio di longevità senza la necessità di un pagamento anticipato dallo sponsor e consente agli amministratori del piano pensionistico di conservare il controllo dell'asset allocation.

Quindi, se i pensionati vivono più a lungo di quanto atteso, i maggiori importi pensionistici di cui il fondo pensione è responsabile vengono compensati dai maggiori pagamenti che lo stesso riceve dal fornitore del longevity swap. Pertanto, lo swap offre al piano pensionistico una lunga scadenza e una copertura dei flussi di cassa personalizzata.

Il primo longevity swap annunciato pubblicamente ha avuto luogo nell'aprile 2007 tra Swiss Re e Friends' Provident, un assicuratore vita del Regno Unito. L'accodo prevedeva lo scambio di pagamenti basati su 78.000 contratti di rendita pensionistica dal valore di 1,7 miliardi di sterline.

Sebbene i longevity swap esistano dagli anni Novanta del XX secolo, sono stati soggetti ad un processo di trasformazione in termini di struttura guidato dalla loro versione capital- market based.

Sussistono poi differenti modi con cui invece una compagnia assicurativa o riassicurativa può trasferire l'insieme di rischi associati con l'esposizione alle rendite. In particolare, ciò può essere realizzato in modo totalmente analogo a quanto detto per i fondi pensioni, attraverso buy-out, in cui le polizze individuali sono trasferite a un nuovo assicuratore. Alternativamente esistono anche trasferimenti di rischio parziali, come gli accordi di riassicurazione "quota-share", in cui il riassicuratore accetta una percentuale di ogni singolo rischio all'interno di un blocco di annuity.
A differenza del buy-in, che trasferisce il 100% del rischio associato ad un sottogruppo di individui, il contratto riassicurativo quota-share trasferisce solo una percentuale del rischio associato ad ogni singola polizza individuale.

2.4.4 Soluzioni capital-market based

Il mercato dei capitali rappresenta un canale alternativo più recente rispetto agli accordi assicurativi o riassicurativi per il trasferimento del longevity risk.
Loeys et al. (2007) definisce i requisiti necessari affinché un nuovo mercato dei capitali possa instaurarsi con successo; in particolare, deve fornire una copertura effettiva ("effective hedging") verso uno stato del mondo economicamente importante ("economically important") e che non può essere coperto attraverso strumenti di mercato esistenti ("ineffectiveness of existing hedging instruments"), e deve utilizzare contratti omogenei e trasparenti ("homogeneous and transparent") per consentire lo scambio tra agenti.

Per poter essere efficace, è necessario che uno strumento del mercato dei capitali soddisfi tanto le esigenze degli hedger che quelle degli speculatori (o traders). I primi richiedono efficacia di copertura, mentre i secondi liquidità. La liquidità concerne contratti standardizzati.

Esiste quindi un trade-off tra liquidità ed efficacia dell'hedging, tale per cui il numero di contratti standardizzati scambiati deve garantire sia un'efficacia nella copertura che un'adeguata liquidità.

Per ottenere un certo grado di liquidità, il mercato dovrà poi adottare indici di mortalità (o di sopravvivenza) basati sulla popolazione di riferimento nazionale (index hedge)[44]; tuttavia, le compagnie di assicurazione sulla vita e i fondi pensione molto spesso fronteggiano un rischio di longevità specifico, caratteristico del gruppo socioeconomico assicurato e diverso rispetto a quello della popolazione totale (ciò richiederebbe un customized hedge). Ecco allora che l'hedger potrebbe trovarsi di fronte ad un "rischio base"[45], che mina in partel'efficacia dello strumento di copertura.

Esistono cinque diversi fattori causali sottostanti alle differenze nella longevità:

1. Genere. L'aspettativa di vita per le donne è tipicamente maggiore rispetto a quella degli uomini. Fonti Istat riportano un'aspettativa di vita di 80,135 anni per i maschi e 84,691 per le femmine nel 2021.
2. Posizione geografica. I dati dell'Istat riportano ad esempio che, al 2021, in Italia, la regione con l'aspettativa di vita alla nascita maggiore è l'Umbria, con 81,1 anni mentre quella con l'aspettativa minore è la Valle d'Aosta, con 78,2.
3. Classe sociale. L'Office for National Statistics evidenzia una positiva correlazione tra l'aspettativa di vita e la classe sociale di appartenenza per la popolazione in Inghilterra e Galles.
4. Reddito/ricchezza. Cairns (2017) mostra un'aspettativa di vita positivamente correlata alla ricchezza per la popolazione maschile danese, di età 65 anni.
5. Anno di nascita (effetto coorte). C'è una certa evidenza di effetto coorte in alcuni Paesi (anche in Italia, come vedremo): tale effetto spiega l'esistenza di una relazione tra aspettativa di vita e anno di nascita, per cui certe coorti hanno un'aspettativa di vita alla nascita più alta rispetto alle coorti in entrambi i lati.

   Ad esempio, la coorte "d'oro" di maschi nati intorno al 1930 in UK esibisce miglioramenti nella mortalità annuali più alti rispetto alle coorti adiacenti, con

[44] La prima soluzione di successo per creare tali indici, dopo un primo iniziale fallimento del Longevity Index sviluppato per la popolazione statunitense da Credit Suisse nel 2005, risale al 2007, quando J.P.Morgan lanciò LifeMetrics Indices. Tali indici comprendono dati sulla mortalità disponibili al pubblico a livello della popolazione e suddivisi per età e sesso, in diversi Paesi (Regno Unito, Stati Uniti, Olanda e Germania).

[45] Quindi il rischio associato ad un hedging imperfetto, in cui i movimenti del sottostante non sono perfettamente correlati con i movimenti dello strumento di copertura.

possibili spiegazioni legate a progressi nelle diete alimentari, oltre che alla nascita del National Health Service nel 1948.

Per giustificare l'istituzione di un mercato per il trading del rischio di longevità, i bisogni collettivi dei suoi utenti devono essere di una grande portata. Come già trattato in precedenza, tale aspetto trova sicuramente riscontro nelle principali indagini compiute (Swiss Re (2011)).
A differenza delle soluzioni insurance-based, per le quali il costo di vendita del rischio di longevità raggruppa anche i costi di vendita degli altri rischi, l'instaurarsi di un efficiente mercato dei capitali consentirebbe ai suoi principali hedger (compagnie assicurative vita e fondi pensione) di separare i rischi, migliorando la trasparenza e accrescendo la consapevolezza del vero costo (prezzo) del rischio di longevity.
Inoltre, permetterebbe di risolvere i problemi di capacità insiti nell'industria assicurativa e riassicurativa, incapace da sola di trasferire per intero il rischio di longevità.
Di conseguenza, il coinvolgimento dei mercati dei capitali aiuterebbe a ridurre il costo di gestione del longevity risk. Questo perché porterebbe ad un incremento nella capacità, ma anche una maggiore trasparenza sul pricing, oltre che una maggiore liquidità (grazie all'attività degli speculatori).

Per quanto concerne l'inefficacia di strumenti esistenti, non avrebbe senso stabilire una nuova classe di strumenti di copertura per coprire un rischio se tale rischio potesse essere coperto con strumenti esistenti. Loeys et al. (2007) conclude che il mercato esistente non fornisce alcun hedging effettivo per il rischio di longevità e mortalità.

L'ultimo requisito richiede infine omogeneità e trasparenza negli strumenti finanziari emessi.

Longevity Bond

Una delle prime soluzioni proposte per creare un mercato dei capitali risale ad inizio anni duemila, con gli studi sui longevity bond (o survivor bond) da parte di Blake e Burrows (2001), Blake et al. (2006) e Cairns et al. (2006).
Si tratta di *life annuity (o amortizing) bond* che pagano cedole proporzionali al numero di persone viventi alla data di pagamento della cedola di una prefissata coorte, ad

esempio quella dei sessantacinquenni maschi vivi alla data di emissione del bond. Man mano che questa coorte muore, l'ammontare delle cedole decresce ma continua il pagamento delle stesse a tempo determinato (nel caso dei longevity bond) o fino alla morte dell'intera coorte (survivor bond). Se ad esempio, dopo un anno, l'1.5% della popolazione di riferimento muore, il secondo pagamento della cedola sarà il 98,5% della prima e così via.

In tal modo, il titolare del bond sarà protetto dal rischio di longevità, in quanto, se più persone sopravvivono, il bond pagherà di più mentre se meno persone sopravviveranno, il bond pagherà di meno.

Definiamo $S_{t,x}$ l'indice di sopravvivenza (o survivor index) come la frazione di una iniziale popolazione di riferimento predefinita, di età x all'anno t=0,che ancora vive al tempo futuro t. Si precisa che $q_{s,x}$ è il tasso di mortalità tra le epoche s e s+1 per i membri della popolazione di riferimento di età x al tempo t=0 e ancora vivi al tempo s. Allora l'indice di sopravvivenza potrà essere definito come segue.

$S_{t,x} = (1-q_{0,x})(1-q_{1,x})\ldots(1-q_{t-1,x})$.

Il primo tentativo di emissione di un longevity bond risale al novembre 2004, quando l'EIB (la Banca d'Investimento Europea) tentò di lanciare un longevity bond con scadenza a 25 anni con un prezzo di emissione di £540 milioni e una cedola iniziale di £50 milioni. Il pagamento delle cedole si basava sulla realizzazione dell'indice di sopravvivenza costruito sul gruppo di sessantacinquenni maschi inglesi e gallesi e prodotto dall'UK Government Actuary's Department (GAD). In pratica f_t (S_t)=£50 milioni x S_t per t=1, 2,…T con T=25.

Il gestore (lo structurer/manager) del bond era BNP Paribas, che assumeva il rischio di longevità, che poi riassicurava attraverso PartnerRe.

Il gruppo target di investitori era rappresentato dai fondi pensione UK, con portafogli caratterizzati quindi da polizze di rendita (annuity).

Lo scopo del bond era fornire una protezione nei confronti del rischio di longevità dei bond *holder*: in pratica l'emittente (EIB) avrebbe guadagnato se S_t fosse stato minore rispetto a quanto anticipato, mentre gli holder (i compratori) se maggiore di quanto previsto (longevity risk).

La Figura 6 mostra appunto come una diminuzione della mortalità (mortalità inferiore a quella prevista) porta le cedole a diminuire in misura minore rispetto a quanto anticipato e viceversa.

Dopo circa un anno dall'annuncio, il longevity bond di EIB non aveva generato una domanda sufficiente per il lancio e venne ritirato.

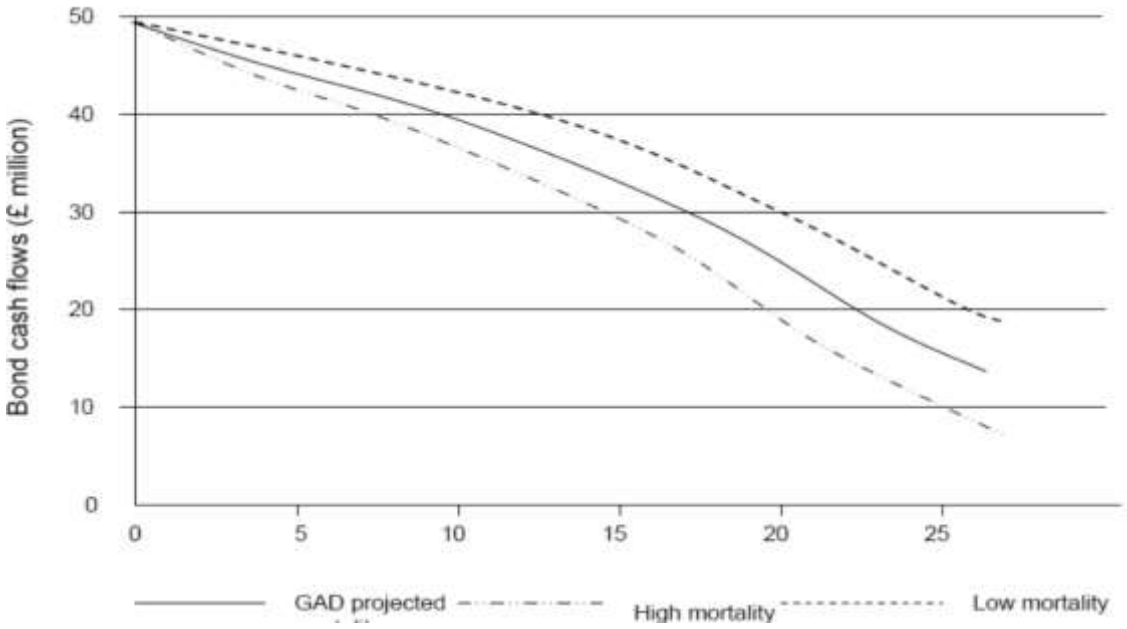


Figura 6: Cedole dell'EIB bond

Fonte: Blake D.et al. (2008)

Il bond di EIB/BNP fallì per un certo numero di ragioni.

Innanzitutto, tale obbligazione mostrava delle debolezze a livello di progetto: il rischio base era considerato essere troppo grande. Inoltre, il pricing lasciava parecchi dubbi agli investitori: c'era infatti la preoccupazione che il capitale up-front fosse troppo grande rispetto ai rischi che il bond copriva, non lasciando risorse per la copertura degli altri rischi.

Vi erano poi questioni istituzionali: la dimensione era troppo piccola per creare una liquidità di mercato, tant'è che i market maker temevano che non avrebbero ottenuto profitti dalla sua negoziazione.

Il principale problema era però che il longevity bond era un concetto nuovo, con cui di fatto nessun player di mercato aveva familiarità.

Due però furono le principali lezioni imparate da questo fallimento: la necessità di costruire opportuni indici di mortalità contro i quali gli strumenti potevano essere scambiati, dal momento che il singolo benchmark considerato da EIB era considerato inadeguato (si rimanda alla nota 18) e lo sviluppo di modelli di previsione della mortalità, in quanto le proiezioni del GAD inglese usate per il design del bond erano costruite su modelli non divulgati e soggetti ad aggiustamenti non precisati in modo trasparente.
In merito a quest'ultimo punto, la carenza fu poi risolta grazie allo sviluppo e alla pubblicazione di differenti modelli di mortalità e alla diffusione di software per il calcolo attuariale e previsionale (a partire dal LifeMetrics tool di J.P. Morgan). Il tema verrà approfondito nel quarto capitolo.

Si citano, a mero scopo informativo, i mortality bond, obbligazioni a breve scadenza i cui pagamenti sono legati ad un indice di mortalità. Tali bond, simili alle obbligazioni catastrofali, sono sviluppati per coprire principalmente il *brevity risk*, ossia il rischio associabile ad eventi estremi, come pandemie, e non il longevity risk, oggetto della trattazione. Il primo bond emesso di questo tipo è il mortality bond di Swiss Re, noto come Vita I, emesso nel dicembre 2003 e valutato seguendo la teoria dei valori estremi di Beelders e Colarossi (2004), seguito poi da un bond di tipo catastrofale a 8 anni, legato a spread nella longevità, emesso sempre da Swiss Re nel 2010.

Lo scarso successo dei longevity bond portò a reindirizzare, negli anni successivi, gli sforzi di progettazione verso il mercato dei derivati, di cui si forniscono alcuni esempi particolarmente significativi.

Capital-Market Based Longevity (o Survivor) Swaps

Riprendendo quanto definito in precedenza nel caso dell' insurance-market based longevity swap, con "swap" si intende un accordo con cui due controparti concordano nello scambiare uno o più futuri flussi di cassa, almeno uno dei quali è casuale.
Un survivor swap, indipendentemente dal fatto che sia insurance-market based o capital market based, è tale se prevede almeno un pagamento aleatorio dipendente dalla mortalità, legato ad un tasso di sopravvivenza, o survival rate.

Il primo longevity swap basato sul mercato dei capitali risale al 2008 tra J.P.Morgan e Canada Life nel Regno Unito. Trattasi un longevity swap dal valore di £500 milioni con una scadenza a 40 anni legato all'esperienza nella mortalità attuale di 125.000 beneficiari nel portafoglio di rendite che doveva essere coperto. Questa transazione portò per la prima volta investitori del mercato dei capitali nel mercato della longevity, dal momento che il longevity risk, passato da Canada Life a J.P.Morgan, venne poi rivenduto agli investitori.
I survivor swap consentono allora agli investitori di impiegare capitali su strumenti con una bassa correlazione col mercato (in termini di Capital Asset Pricing Model, strumenti con basso beta), permettendo quindi di ridurre il rischio complessivo di portafoglio.
Allo stesso tempo altri soggetti (le stesse imprese assicurative) potrebbero speculare su tali strumenti, sulla base di prospettive future della mortalità previste, con l'idea diincrementare i propri guadagni, costruendo strategie di trading studiate ad-hoc.

In totale, tra il giugno 2009 e dicembre 2020 sono stati realizzati 61 longevity swap (sia attraverso banche, che attraverso (ri)assicuratori), per un totale di $104,8 miliardi.
Si faccia riferimento a Longevity risk and capital markets: The 2019-20 update (Blake D., Cairns A., 2021) per una completa analisi delle principali operazioni di trasferimento del rischio di longevità avvenute negli ultimi 15 anni, oltre che al sito artemis.bm, che analizza tutte le operazioni nel longevity risk transfer market, oltre che quelle relative ad altre tipologie di rischio, specie quello catastrofale.

q-Forwards (o Mortality Forwards) e S-Forwards (o Survivor Forwads)

Un contratto "mortality forward rate" è altresì noto come "q-forward", dal momento che la lettera "q" rappresenta il simbolo standard nel campo attuariale per definire il tasso di mortalità e viene definito da Coughlan (2007) come "the simplest type of longevity and mortality derivative".
In effetti i q-forward rappresentano i blocchi di base che, combinati con altri, posso dar vita ad altri derivati vita più complessi: portafoglio di q forward possono essere usati per coprire l'esposizione al rischio di longevità di un insieme di rendite per un piano pensione.

Un q forward è un accordo tra due parti per scambiare a una data futura (la maturity, o scadenza del contratto) un certo ammontare proporzionale al tasso di mortalità realizzato di una data popolazione (o sottopopolazione) in cambio di un ammontare proporzionale a un tasso di mortalità fisso, su cui ambo le parti hanno aderito alla data di concepimento dell'accordo.

In altre parole, un q-forward è uno swap zero coupon che scambia mortalità fissa per mortalità realizzata a scadenza (si veda la Figura 7).

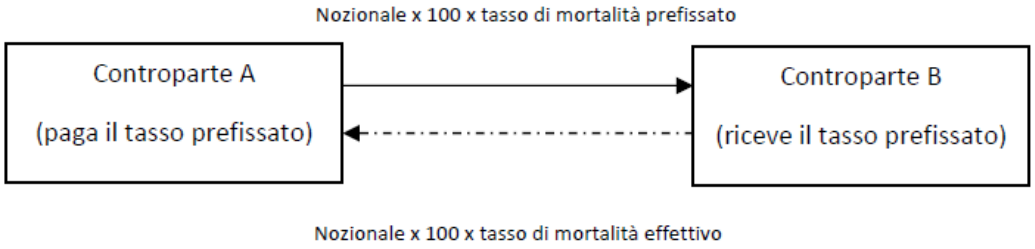


Figura 7 : Un q-forward scambia mortalità fissa per mortalità realizzata alla scadenza del contratto

Fonte: Coughlan G. et al. (2008).

Il tasso di riferimento per la definizione del contratto è il tasso di mortalità realizzato come determinato da un indice adatto (come gli indici LifeMetrics).
In un mercato equo, il tasso di mortalità fisso rappresenta il tasso di mortalità "forward" della popolazione di riferimento. Se il q-forward è correttamente prezzato, nessuno scambio di pagamenti ha luogo all'inizio del contratto.
Alla scadenza avverrà invece la liquidazione dello stesso come pagamento netto proporzionale alla differenza tra il tasso di mortalità fisso e quello realizzato: se il tasso di riferimento nell'anno di riferimento, ossia il valore più recente dell'indice adottato che riflette il tasso di mortalità realizzato in un certo anno (l'anno di riferimento appunto), è minore del tasso fisso (e quindi c'è evidenza di una mortalità più bassa) allora la liquidazione è positiva e il piano pensionistico riceve il pagamento per compensare un incremento nel valore delle sue passività (a causa del rischio di longevità).

Se invece il tasso di riferimento è maggiore del tasso fisso (segno quindi di una mortalità più alta) allora la liquidazione è negativa, e il piano pensione effettua il pagamento al fornitore dell'hedge, uscita monetaria che sarà però compensata dalla caduta nel valore delle passività (a causa del rischio di mortalità, l'opposto del longevity risk).

Se lo scopo è coprire il rischio di mortalità (quindi tassi di mortalità maggiori di quelli attesi, che determinerebbero un aumento dei benefici caso morte da pagare per un'impresa assicuratrice che vende polizze term o life), allora l'impresa assicuratrice dovrebbe entrare nel contratto q-forward nel quale paga il tasso di mortalità fisso e riceve quello realizzato; alla scadenza pertanto riceverà un ammontare che aumenta all'aumentare dei tassi di mortalità per compensare passività più alte nel portafoglio vita.
Si veda la Figura 8, nel riquadro di sinistra.
Se invece l'obiettivo è eliminare il rischio di longevità (tassi di mortalità realizzati inferiori rispetto a quelli attesi), allora il fondo pensione o l'impresa assicuratrice che vende polizze di rendita (annuity) dovrebbe entrare in un contratto q-forward in cui riceve i tassi di mortalità fissi e paga quelli realizzati; alla scadenza l'hedge pagherà all'impresa assicurativa un ammontare che aumenta al diminuire dei tassi di mortalità per compensare il crescente valore delle passività. Si veda Figura 8, nel riquadro di destra.

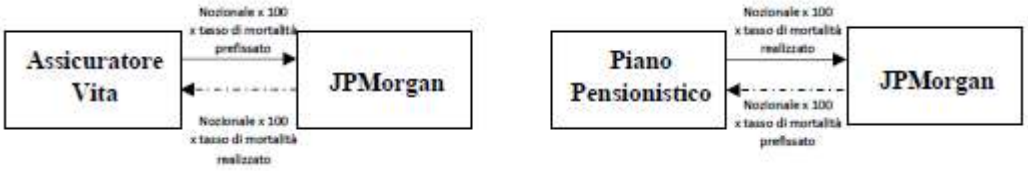


Figura 8: Un contratto q-forward per coprire il rischio di mortalità (a sinistra) di un life insurer e un contratto q-forward per coprire il rischio di longevità (a destra) di un piano pensionistico o annuity book.

Fonte: Coughlan G. et al. (2008).

Un contratto S-forward o survivor forward è di fatto simile al q-forward, con la differenza che si basa sulla realizzazione di un indice di sopravvivenza ($S_{t,x}$), che può essere derivato dai tassi di mortalità.

Nel mondo reale non esiste un mercato completo dei contratti q-forward: la copertura dovrebbe essere costruita sulla base di contratti q-forward con un range limitato di età (ad esempio, con fasce di età di 10 anni) e scadenze (al massimo fino a 15-20 anni).
Un esempio di q-forward risale al gennaio 2008: Lucida PLC, un'impresa dedita a buy-out pensionistici era l'hedger, con J.P.Morgan che si impegnò a fornire la copertura.
Quest'ultima operazione venne realizzata come un "value hedge": l'obiettivo era infatti quello di coprire il valore delle passività dell'hedger alla data di scadenza dello swap. Sebbene lo swap avesse durata di 10 anni, permetteva di coprire il rischio di longevità nei flussi di cassa dell'hedger oltre i 10 anni. Invece l'operazione vista in precedenza tra J.P. Morgan e Canada Life consisteva in un "cash flow hedge", realizzato per coprire il rischio di longevità in ciascuno dei flussi di cassa dell'hedger e i pagamenti netti venivano fatti periodo per periodo.

Quando il mercato per il trasferimento del rischio di longevità cominciò nel 2006, numerose banche d'investimento, tra cui J.P. Morgan, si impegnarono attivamente per il suo sviluppo, grazie anche ai loro collegamenti con i principali investitori sui mercati.
Tuttavia, la crisi finanziaria del 2008 e il conseguente Dodd-Frank Act portò numerose banche d'affari a ritirarsi dal mercato. Le poche banche con filiali nel campo assicurativo, come Goldman Sachs e Deutsche Bank, furono di lì a poco costrette a ritirarsi.
Nonostante i numerosi passi avanti compiuti nella letteratura attuariale e le numerose soluzioni ideate per consentire un avvicinamento degli investitori istituzionali, il mercato dello scorso decennio è stato per lo più dominato da soluzioni insurance-market based. Tuttavia, il problema capacitivo dell'industria riassicurativa rimane e questo richiede nuove sorgenti per capitali esterni.
Una delle più recenti soluzioni riguarda i cosiddetti reinsurance sidecar, che costituiscono una modalità di condivisione del rischio con nuovi investitori.
Tale operazione si caratterizza per l'istituzione di una SPV (special purpose vehicle, il sidecar), capitalizzata da fondi assicurativi specializzati, che riassicura pre-concordati gruppi di polizze assicurative di un (ri)assicuratore (il cedente) attraverso raccolte di fondi sul mercato dei capitali, permettendo quindi agli investitori di guadagnare dai rendimenti che derivano da quelle attività. Tali istituzioni sono completamente garantite, nel senso che c'è sempre una disponibilità di fondi per pagare i beneficiari e

hanno durata limitata, tipicamente un anno. Un esempio di tale operazione risale al 2017, quando Athene entrò in un accordo riassicurativo con Voya Financial per la copertura di $19 miliardi di passività legate a rendite, con capitale fornito da investitori di private equity.

Capitolo III: Modellizzazione della mortalità

3.1 Tavole di mortalità

L'andamento della mortalità può essere specificato, in termini quantitativi, utilizzando vari strumenti, tra cui le cosiddette life table (o tavole di mortalità), che costituiscono le basi per il calcolo dei premi nei prodotti assicurativi.

Le tavole di mortalità sono rappresentate da una sequenza decrescente di elementi, l_0, l_1, l_2…, l_ω, dove il generico l_x rappresenta, per una certa età intera x, il numero stimato di persone ancora vive a quell'età in una certa popolazione specificata.
L'elemento l_0 viene chiamato radice della tavola di mortalità ed esprime il numero iniziale di individui di età 0, normalmente pari a 100000.
Le età sono definite come x=0,1, 2… ω, dove ω rappresenta l'età massima raggiungibile, o età limite, per cui $l_\omega > 0$ e $l\ l_{\omega+1} = 0$.
Iniziando da l_x , può essere definito il numero di morti per l'età x, denotato come d_x ,per x=0,1,2,… ω:

$$d_x = l_x - l_{x+1} \tag{17}$$

Si può notare che:

$$\sum_{x=0}^{\omega} d_x = l_0 \tag{18}$$

La quantità q_x rappresenta la probabilità di un individuo di età x di morire entro 1 anno, e può essere definita come:

$$q_x = \frac{d_x}{\ell_x} \tag{19}$$

È bene poi precisare l'esistenza di due tipologie di tavole di mortalità: le tavole di mortalità di coorte (Cohort Life Tables) e le tavole di mortalità di periodo (Period Tables).

3.1.1 Tavole di mortalità di coorte e di periodo

La tavola di mortalità di coorte rappresenta una tipologia di tavola in cui si osserva direttamente, come evidenza statistica, la sequenza l_0, l_1, l_2…, l_ω , cioè il numero di persone vive all'età 1,2,… ω iniziando proprio da una coorte iniziale consistente in l_0 nuovi nati, cioè la coorte di persone nate in un certo anno di osservazione t. L'osservazione viene fatta per anno di nascita, attraverso osservazioni longitudinali del numero di individui sopravvissuti. È proprio la sequenza l_0, l_1, l_2…, l_ω a rappresentare la tavola di mortalità di coorte. Se ω è l'età limite, allora la costruzione della tavola richiederà ω+1 anni.

Le tavole di periodo sono costruite osservando direttamente la frequenza di morte per le varie età all'interno di un certo periodo, per esempio un anno. Le osservazioni sono quindi effettuate per anno di morte. Si assuma che la frequenza di morte all'età x sia una stima della probabilità di morte q_x . Allora, per x=0,1, 2,… ω-1, si definisca:

$$l_{x+1} = l_x(1 - q_x)$$

(20)

Assegnata la radice e l'età massima, la sequenza l_0, l_1, l_2…, l_ω (cioè la tavola di mortalità di periodo) viene computata attraverso la formula (20) e l_x rappresenta il numero atteso di sopravvissuti da una coorte sintetica inizialmente costituita da l_0 individui.

La metodologia sopra riportata assume come ipotesi che la tendenza della mortalità non cambierà durante gli anni. Come evidenziato nel capitolo II, la mortalità umana sta diminuendo velocemente e un'ipotesi di mortalità statica non può essere assunta come ipotesi fondamentale nel lungo periodo. Ecco perché, nelle assicurazioni vita, l'uso di tavole di periodo viene limitato a quei prodotti di breve o media durata (come le assicurazioni caso morte temporanea).

Le rendite vitalizie e i piani pensionistici, invece, richiedono tavole di mortalità proiettate, costruite sulla base delle tendenze di mortalità osservate empiricamente.

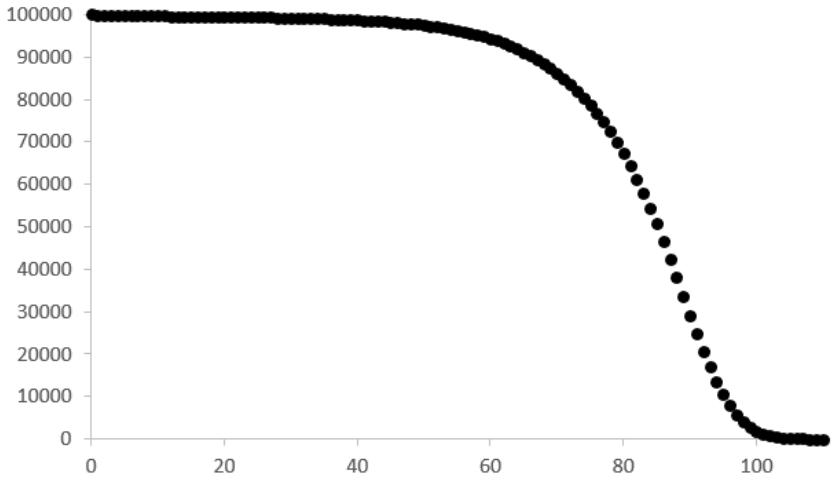


Figura 9: Curva di sopravvivenza per la popolazione italiana totale nel 2021

Fonte: Elaborazione personale su dati Istat

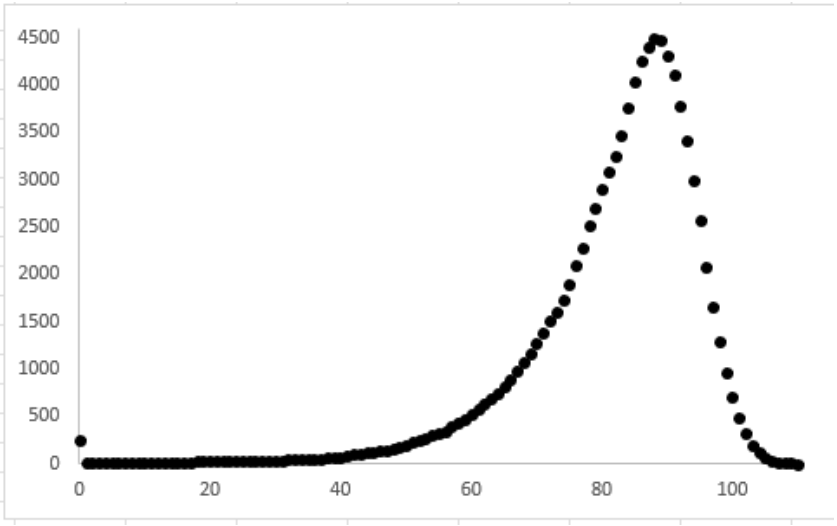


Figura 10: Curva dei decessi dx per la popolazione italiana totale 2021

Fonte: Elaborazione personale su dati Istat

La curva di sopravvivenza (figura 9) presenta sull'asse y il valore di l_x (numero di morti di età x) e l'età x sull'asse x.

La curva dei decessi (figura 10) presenta sull'asse y il valore di d_x (numero di decessi di età x) e il valore dell'età x sull'asse x.

Ci sono alcune caratteristiche che si possono osservare nella curva dei decessi:

- La mortalità infantile;

- Il salto di mortalità in età giovane-adulta, dovuto principalmente a decessi accidentali (sebbene poco visibile);
- L'età di massima mortalità (alla vecchiaia).

Si può inoltre notare che il punto con la mortalità più alta è dove la curva dei decessi si flette ed è di circa 88 anni per la popolazione in Italia nel 2021.

3.2. Il modello probabilistico

Si cercherà ora di formalizzare il modello probabilistico sottostante alla aleatorietà della durata di vita di un individuo, utile per modellizzare i rischi legati alle mortalità, seguendo l'impostazione di Pitacco et al. (2009).

3.2.1. Notazioni base e definizioni

La probabilità più semplice, usata in questo contesto, è la probabilità annuale di sopravvivenza p_x , che può essere definita come segue:

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \tag{21}$$

La probabilità annuale di morte invece è pari a:

$$q_x = 1 - p_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{(1_x - l_{x+1})}{l_x} \tag{22}$$

La probabilità di sopravvivenza di un individuo con una età pari a x per t anni, cioè la probabilità per un individuo di x anni di raggiungere l'età x+k, viene definita come ${}_kp_x$ e, utilizzando i concetti visti precedentemente per le tavole di mortalità, può essere calcolata come:

$${}_kp_x = \frac{l_{x+k}}{l_x} \tag{23}$$

La formula (23) può essere anche trattata come il prodotto delle probabilità annuali, ed è quindi definibile come:

$$ {}_{t}p_{x=} = \prod_{s=1}^{n} p_{x+s} $$

(24)

Un altro concetto rilevante riguarda la probabilità di morte per un individuo di una generica età x entro k anni (quindi la probabilità di non raggiungere l'età x+k), uguale a:

$$ {}_{k}q_{x=} = 1 - {}_{k}p_{x} = \frac{d_{x+k}}{l_x} = \frac{(l_x - 1_{x+k})}{1_x} $$

(25)

In aggiunta a queste probabilità di base, possiamo inoltre trovare le probabilità di morte tra l'epoca h e l'epoca h+k, calcolabili come segue:

$$ h \mid kq_x = \quad {}_{h}p_x \; {}_{k}q_{x+h} = \frac{l_{x+h} - l_{x+h+k}}{l_x} $$

(26)

È possibile infine esprimere la probabilità di morte q_x come $q_x = \phi_x/(1 + \phi_x)$, dove ϕ_x rappresenta le cosiddette "mortality odds", cioè $\phi_x = \frac{q_x}{p_x}$.

Il vantaggio di utilizzare le mortality odds, invece delle probabilità di morte, è legato al fatto che le prime sono sempre positive (>0), mentre le q_x sono vincolate ad essere comprese tra 0 e 1.

3.2.2 Il quadro probabilistico: aleatorietà nella durata di vita umana

Si prendono ora in considerazione le tavole di mortalità di periodo e si tratta il tempo come continuo; quindi, sia l'età x che il tempo t sono valutati come numeri reali.

Partendo da T_0 , che rappresenta la durata di vita rimanente per un individuo di età 0, un neonato, può essere definita T_x , la variabile casuale che rappresenta la vita rimanente per un individuo di età x. Cioè:

$$ T_x = T_0 - x \mid T_0 > x $$

(27)

Da queste definizioni, può essere costruita la funzione di sopravvivenza S(x) (survival function), cioè la probabilità di sopravvivere t anni per un individuo di età 0, come segue:

$$S(\mathrm{t}) =_t p_0 = \mathrm{Prob}\ (\mathrm{T}_0 > \mathrm{t})$$

(28)

Un'altra interessante funzione è rappresentata dalla funzione di distribuzione di T_0, che rappresenta la probabilità per un neonato di morire entro t anni, e viene definita come:

$$\mathrm{F}_0(\mathrm{t}) =_\mathrm{t} \mathrm{q}_0 = \mathrm{Prob}(\mathrm{T}_0 < \mathrm{t}) = 1 - \mathrm{S}(\mathrm{t}) = \int_0^t f_0(u)\mathrm{d}u$$

(29)

La funzione densità di probabilità (pdf, "probability density function") allora, $\mathrm{f}_0(\mathrm{t})$, è la derivata di $\mathrm{F}_\mathrm{o}(\mathrm{t})$; questa funzione è spesso definita come curva dei decessi (curve of deaths).

$$\mathrm{f}_0(\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{dF}_\mathrm{o}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}} = -\frac{\mathrm{dS}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}}$$

(30)

La figura 13 descrive il comportamento della funzione $\mathrm{f}_0(\mathrm{t})$. La funzione (30) giustifica il legame tra la curva dei decessi e quella di sopravvivenza.

Il punto di massimo nella curva di sopravvivenza è il punto modale nella curva dei decessi.

Spostandosi verso l'età di vita rimanente per una generica età x, T_x (x>0), le seguenti relazioni collegano la funzione di distribuzione e la funzione densità di probabilità di T_x, con le funzioni analoghe relative a T_0.

$$F_x(t) = \mathbb{P}[T_x < t] = \frac{\mathbb{P}[x < T_0 \leq x + t]}{\mathbb{P}[T_0 > x]} = \frac{F_0(x+t) - F_0(x)}{S(x)}$$

(31)

$$f_x(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_x(t) = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_0(x+t)}{S(x)} = \frac{f_0(x+t)}{S(x)}$$

(32)

Dalle funzioni $F_x(t)$ e $f_x(t)$ e dalla $\mathrm{F}_\mathrm{o}(\mathrm{t})$ e $\mathrm{f}_0(\mathrm{t})$, tutte le probabilità utilizzate per i calcoli attuariali possono essere ricavate. In particolare,

$${}_tp_x = 1 - F_x(t) = \int_t^{+\infty} f_x(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{S(x)} \int_t^{+\infty} f_0(x+u)\mathrm{d}u$$

(33)

Si offrono ora degli esempi grafici delle funzioni di sopravvivenza e della curva dei decessi.

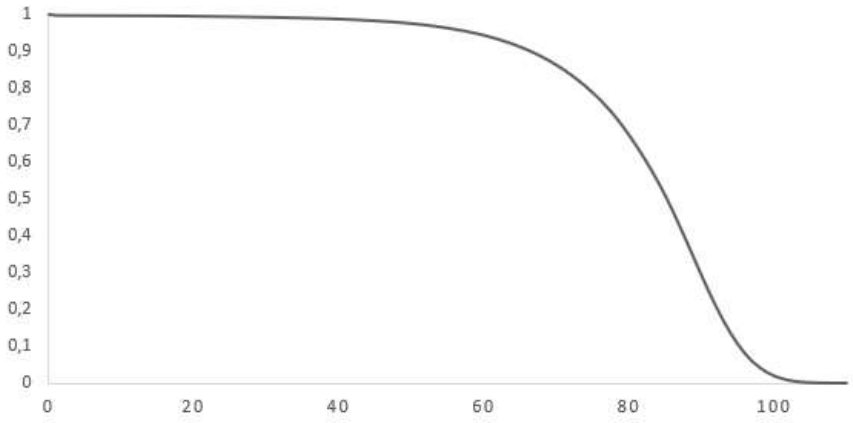


Figura 11 : Funzioni di sopravvivenza S(t) per la popolazione italiana totale nel 2021

Fonte: Elaborazione personale su dati Istat

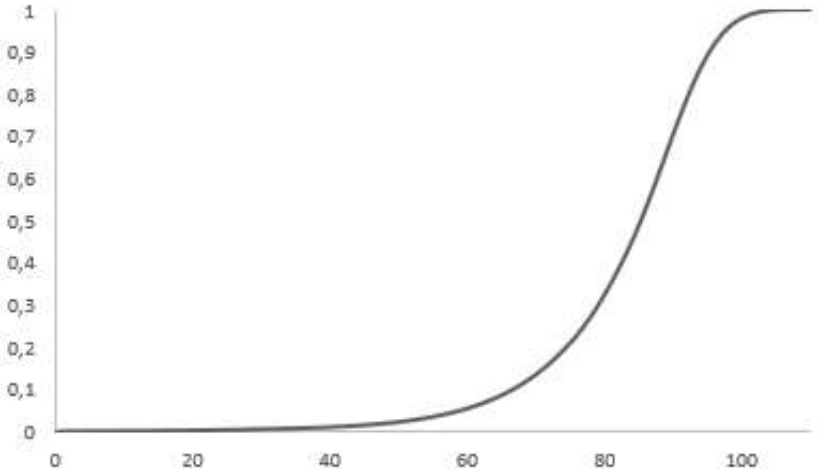


Figura 12:Funzione di distribuzione $F_o(t)$, per la popolazione italiana totale nel 2021

Fonte: Elaborazione personale su dati Istat

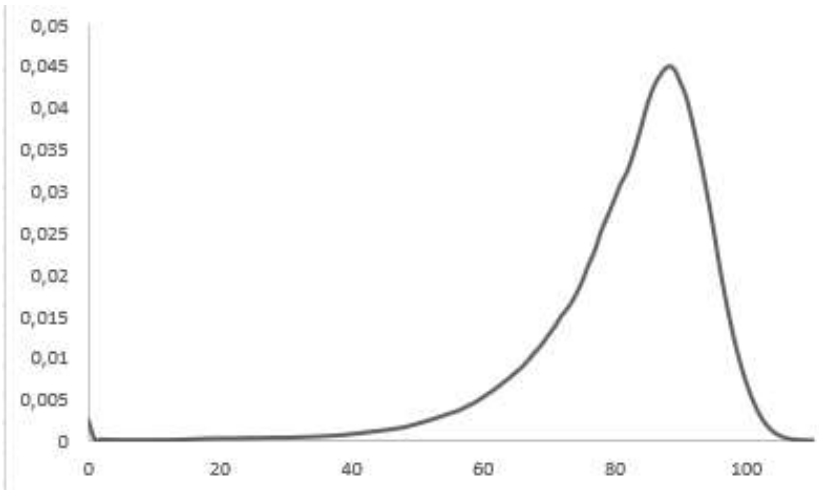


Figura 13: Curva dei decessi $f_0(t)$ per la popolazione italiana totale nel 2021

Fonte: Elaborazione personale su dati Istat

3.2.3 Force of mortality e central rate of mortality

Ci si riferisca ora ad un individuo di età x, e si consideri la probabilità che tale individuo muoia prima del compimento dell'età x+t (con x e t numeri reali), cioè ${}_tq_x$. La forza di mortalità viene definita come segue:

$$\mu_x = \lim_{t \searrow 0} \frac{\mathbb{P}[T_x \leq t]}{t} = \lim_{t \searrow 0} \frac{{}_tq_x}{t}$$

(34)

Rappresenta quindi il tasso di mortalità istantaneo ad una data età x (e viene altresì definita come funzione di rischio o "failure rate"). Da

$$\mathbb{P}[T_x \leq t] = F_x(t) = \frac{F_0(x+t) - F_0(x)}{S(x)}$$

(35)

si ottiene

$$\mu_x = \lim_{t \searrow 0} \frac{F_0(x+t) - F_0(x)}{tS(x)} = \frac{f_0(x)}{S(x)}$$

(36)

Oppure

$$\mu_x = \frac{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S(x)}{S(x)} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\, S(x)$$

(37)

Poiché la forza della mortalità deriva da un'assegnata funzione di sopravvivenza S(x), non aggiunge alcuna informazione riguardante il pattern per età della mortalità.

Al contrario, il ruolo della forza della mortalità è fornire uno strumento per indagare il comportamento della mortalità individuale in funzione dell'età raggiunta (si veda modello di Gompertz).

Dalla (37), poiché S(0)=1, si ottiene che:

$$S(x) = \exp\left\{-\int_0^x \mu_u \mathrm{d}u\right\}$$

(38)

La funzione di sopravvivenza S(x) può essere quindi ottenuta una volta che la forza della mortalità è stata definita.

Il comportamento della force of mortality nell'intervallo temporale (x,x+1) può riassunto dal central death rate all'eta x, m_x . La definizione è la seguente:

$$m_x = \frac{\int_0^1 S(x+u)\mu_{x+u}\mathrm{d}u}{\int_0^1 S(x+u)\mathrm{d}u} = \frac{S(x)-S(x+1)}{\int_0^1 S(x+u)\mathrm{d}u}$$

(39)

Quindi m_x può essere vista, all'interno di uno spazio continuo per età, come la media aritmetica ponderata della forza di mortalità tra x e x+1, dove la funzione di ponderazione è rappresentata dalla probabilità di essere vivi all'età x+u, con $0<u\leq 1$, espressa in termini della funzione di sopravvivenza S(x+u). In pratica, definisce il comportamento della forza della mortalità in un periodo di un anno. Usando un'opportuna trasformazione, si ottiene che:

$$\tilde{m}_x = \frac{S(x)-S(x+1)}{(S(x)+S(x+1))/2}$$

(40)

Quindi, può essere dimostrato che:

$$\tilde{m}_x = 2\frac{1-p_x}{1+p_x} = \frac{2q_x}{2-q_x}$$

(41)

O, analogamente:

$$\tilde{q}_x = \frac{m_x}{1 + 0.5m_x}$$

(42)

Si assuma che una tavola di mortalità sia disponibile. Come si possono ottenere le probabilità di morte e sopravvivenza per tutti i tempi t e le età x, dato che all'interno delle tavole di mortalità solo valori interi delle grandezze considerate (età e tempo) sono disponibili? Un'assunzione comune nella pratica attuariale è quella relativa alla "constant force of mortality"[46] (Pitacco et al., 2009). Si assuma che, per 0<t≤1

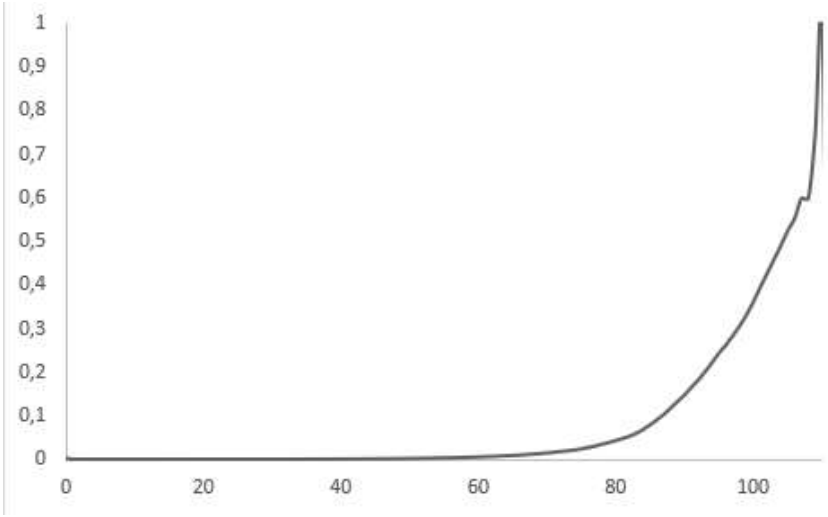
$$\mu_{x+t} = \mu_{(x)}$$

(43)

Dove $\mu_{(x)}$ rappresenta un valore stimato. Segue che ${}_tp_x = \mathrm{e}^{-t\mu(x)}$, cioè l'assunzione di una forza di mortalità costante a tratti, frequentemente adottata nella pratica attuariale. Dalla (40) si ottiene che:

$$m_x = \mu_{(x)}$$

(44)



[46] Altri metodi di approssimazione consistono nell'ipotizzare una distribuzione uniforme delle morti tra x e x+1, per cui ${}_tq_x = tq_x$; di conseguenza è dimostrabile come $\mu_{x+t} = \frac{q_x}{1-tq_x}$, cioè è una funzione crescente nell'intervallo 0<t<1.
Altro metodo consiste nella cosiddetta "ipotesi di Balducci", per cui ${}_tq_x = \frac{tq_x}{1-(1-t)q_x}$, da cui si può ricavare $\mu_{x+t} = \frac{q_x}{1-(1-t)q_x}$, quindi μ_{x+t} è una funzione decrescente nell'intervallo 0<t<1.

Figura 14: Forza della mortalità $\mu_{(x)}$ per la popolazione italiana totale nel 2021

Fonte: Elaborazione personale su dati Istat

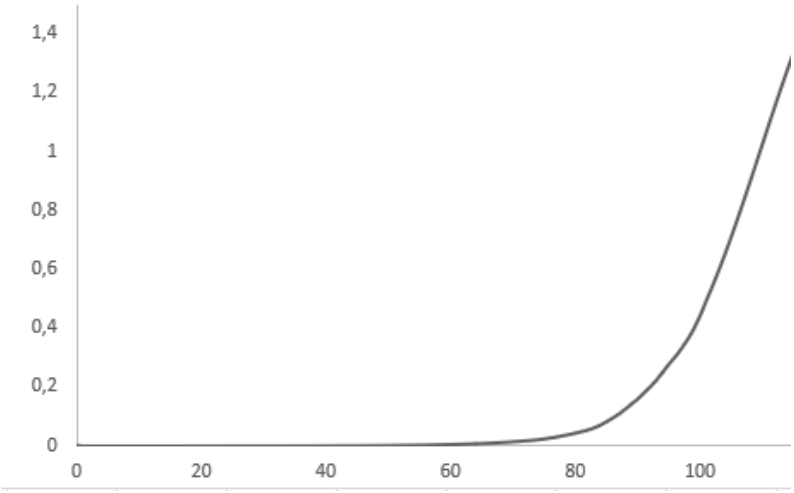


Figura 15: Central rate of mortality annual per la popolazione italiana totale nel 2021

Fonte: Elaborazione personale su dati Istat

3.2.4 Alcuni utili indicatori

In questo paragrafo, verranno evidenziati alcuni indici, che sintetizzano importanti informazioni circa la distribuzione di probabilità della durata di vita.

In un contesto continuo per età, l'aspettativa di vita ("life expectancy") per un nuovo nato viene definita come segue:

$$\bar{e}_0 = \mathbb{E}[T_0] = \int_0^\infty t f_0(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty S(t)\mathrm{d}t \qquad (45)$$

Tale definizione può essere estesa per tutte le età reali x. Quindi l'aspettativa di vita rimanente all'età x è pari a:

$$\bar{e}_x = \mathbb{E}[T_x] = \int_0^\infty t f_x(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{S(x)}\int_0^\infty S(x+t)\mathrm{d}t$$[47]

[47] Si noti che la definizione di $\bar{e}_x$ è basata sulla distribuzione di probabilità condizionata all'essere in vita all'età x. Se x=0, si prende in considerazione la $f_0(t)$, e quindi la mortalità a tutte le età contribuisce al valore di $\bar{e}_0$, in particolare la mortalità infantile. Al contrario, se x>0, la pdf condizionale $f_x(t)$ viene utilizzata, e quindi il pattern della mortalità per età oltre l'età x ("che è stata raggiunta") determina il valore di $\bar{e}_x$.

(46)

Per un individuo di età x, l'età attesa alla morte è data da x+$\bar{e}_x$.

In un contesto discreto, è utile l'approssimazione (45), cioè l'aspettativa di vita troncata all'età x, denotata con e_x .

$$e_x = \mathbb{E}[K_x] = \sum_{k=0}^{\omega-x} k_{k|1}q_x = \sum_{k=1}^{\omega-x} {}_kp_x$$

(47)

Esistono poi alcuni indicatori, che forniscono misure di posizione (location measure) della distribuzione di probabilità, in particolare:

- Il valore modale (in età adulta) della curva dei decessi, Mod[T_0], chiamato anche punto di Lexis, ovvero il punto dove c'è il maggiore numero di morti.
- Il valore mediano della distribuzione di probabilità di T_0 , Med[T_0], o età mediana alla morte.

Altri ancora vanno a riassumere la dispersione della distribuzione di probabilità della durata di vita, per esempio:

- La varianza della durata di vita aleatoria, cioè Var[T_0], o la deviazione standard σ_0 ($\sqrt{\text{Var}\,[T_0]}$).
- Il coefficiente di variazione, definita come:

$$\mathbb{C}[T_0] = \frac{\sqrt{\mathbb{V}\text{ar}\,[T_0]}}{\mathbb{E}[T_0]} = \frac{\sigma_0}{\bar{e}_0}$$

(48)

che rappresenta una sorta di misura relativa di rischiosità.

3.3 Leggi di mortalità

Sin dal '700, numerosi sforzi sono stati compiuti da demografi e attuari per poter definire leggi analitiche che potessero fittare le tendenze nella mortalità per età. La formulazione di leggi permette infatti di ottenere un grande vantaggio: dal momento che le tendenze per età della mortalità sono riassunte da un piccolo numero di parametri (da due a dieci, nelle leggi usate comunemente dai professionisti), viene ridotta la dimensionalità del problema, dal momento che gli oltre 120 parametri di una tavola di

mortalità vengono sostituiti da un ristretto novero di elementi, senza eccessivi deficit informativi.
Si possono distinguere leggi di mortalità che vengono costruite sulla forza della mortalità, e altre che sfruttano le probabilità di morte.

3.3.1 Leggi per la forza della mortalità

Un certo numero di leggi di mortalità utilizza la forza della mortalità $\mu_{(x)}$, sebbene la formulazione originale venne effettuata in termini diversi, ad esempio attraverso le l_x delle tavole di mortalità.
La legge di Gompertz venne proposta nel 1825 come segue:

$$\mu_x = Bc^x = \alpha e^{\beta x}$$

(49)

Tale modello assume pertanto un incremento esponenziale della forza di mortalità per età x, ed è utilizzata per rappresentare la progressione nella mortalità ad età avanzate.
Una generalizzazione della legge di Gompertz, la si ritrova nella (prima) legge di Makeham, proposta nel 1867; in particolare:

$$\mu_x = A + Bc^x$$

(50)

Il termine costante A(>0) rappresenta la mortalità in età non senescente, a causa per esempio di incidenti.
La seconda legge di Makeham, formulata nel 1890, costituisce un'ulteriore generazione della legge di Gompertz, ed è formulata come segue:

$$\mu_x = A + Hx + Bc^x$$

(51)

La legge di Thiele venne proposta nel 1871, e può rappresentare le tendenze nella mortalità per tutto l'intervallo temporale di vita di un individuo. La definizione formale è la seguente:

$$\mu_x = Ae^{-Bx} + Ce^{-D(x-E)^2} + FG^x$$

(52)

Il primo termine decresce man mano che l'età aumenta, e rappresenta la mortalità infantile. Il secondo termine, che ha una forma a campana, rappresenta la gobba della

mortalità (a causa di incidenti in età giovanile o lavorativa). Infine, il terzo termine rappresenta la mortalità per anzianità.

Infine, grande importanza rivestono le due leggi di Perks, con distribuzione logistica, che rappresentano l'andamento della mortalità in età molto avanzata.

$$\mu_x = \frac{\alpha e^{\beta x} + \gamma}{\delta e^{\beta x} + 1} \tag{53}$$

$$\mu_x = \frac{\alpha e^{\beta x} + \gamma}{\delta e^{\beta x} + \epsilon c^{-\beta x} + 1} \tag{54}$$

3.3.2 Leggi per la probabilità di morte annuale

Sotto tale categoria si ricomprendono sia leggi proposte in termini di probabilità di morte, sia in termini di "mortality odds". Per esempio, nel 1971 Beard propose la seguente legge:

$$q_x = A + \frac{Bc^x}{Ec^{-2x} + 1 + Dc^x} \tag{55}$$

Mentre Barnett, nel 1974:

$$\phi_x = A - Hx + Bc^x \tag{56}$$

Nel 1980, Heligman e Pollard proposero una classe di leggi con l'obiettivo di rappresentare i pattern per età della mortalità durante l'intero arco temporale di vita (come la legge di Thiele). La prima legge di Heligman-Pollard è:

$$\phi_x = A^{(x+B)^C} + Dc^{-E(\ln x - \ln F)^2} + GH^x \tag{57}$$

Si noti come il primo termine nella (59) descrive la mortalità infantile, il secondo termine la mortalità in età giovanile, mentre il terzo la mortalità senescente.
La seconda legge è definita in termini di q_x:

$$q_x = A^{(x+B)^C} + De^{-E(\ln x - \ln F)^2} + \frac{GH^x}{1 + GH^x} \tag{58}$$

In entrambi i casi, ad età avanzate, abbiamo:

$$q_x \approx \frac{GH^x}{1 + GH^x}$$

(59)

Tali modelli costituiscono di fatto degli approcci di graduazione di tipo parametrico, e il loro uso nella previsione della mortalità è molto limitato (Booth et al., 2008).

Le tecniche di graduazione sono tipicamente applicate a dati di mortalità grezzi derivanti dall'osservazione statistica, di modo che vadano ad esibire un cambiamento progressivo per età senza salti improvvisi, che non possono essere spiegati dall'intuizione o dall'esperienza passata. Un approccio di tipo parametrico alla graduazione prevede l'adozione di una forma funzionale (una delle leggi di mortalità sopra evidenziate, come la legge di Makeham piuttosto che quella di Helingman-Pollard), e i parametri rilevanti sono stimati al fine di trovare i valori di tali parametri che meglio si adattano ai dati, per esempio i tassi di mortalità, attraverso varie metodologie, come il metodo dei minimi quadrati.

Approcci di tipo non parametrico non prevedono l'adozione di una specifica forma funzionale. Importanti risultati in questo senso sono il metodo delle medie mobili ponderate e il modello Whittaker-Henderson[48].

[48] Tale approccio alla graduazione è basato sulla minimizzazione di una funzione obiettivo. Dati dei valori grezzi, empirici, z_n , y_n rappresenta il corrispondente valore graduato. La funzione obiettivo (che deve essere minimizzata) è la seguente:

$$F(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{h=1}^{n} w_h (y_h - z_h)^2 + \lambda \sum_{h=1}^{n-k} (\Delta^k y_h)^2$$

Dove:

- $w_1, w_2, \dots, w_n$ sono i pesi assegnati alle deviazioni quadrate
- $\Delta^k y_h$ rappresenta la differenza k-esima di y_h, cioè $\Delta^k y_h = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} y_{h+k-i}$
- λ è un parametro costante

Il primo termine nella parte destra dell'equazione è una misura di discrepanza tra valori osservati e graduati. La scelta dei pesi permette di attribuire più o meno importanza alle deviazioni quadrate relativamente alla h-esima osservazione.

Il secondo termine rappresenta il grado di approssimazione nel set di valori graduati (k è tipicamente 2,3 oppure 4).

Infine, valori maggiori di λ rappresentano una maggiore preferenza per un comportamento "smooth" dei valori graduati, mentre valori più bassi mostrano un maggiore interesse nella fedeltà dei valori graduati rispetto a quelli osservati.

Capitolo IV: Modelli previsionali della mortalità

4.1 Introduzione

Il presente capitolo mira a descrivere vari metodi, proposti da attuari e demografi, per realizzare proiezioni della mortalità, utilizzate per il calcolo di riserve pensionistiche, per il pricing di prodotti assicurativi come rendite vitalizie e, nel campo demografico, principalmente per analisi previsionali condotte su una popolazione.
Esistono tre principali tipologie di modelli che vengono attualmente utilizzati per tali fini (Blake et al., 2018):

- Modelli "process-based", che cercano di esaminare i processi biomedici che portano alla morte.
- Modelli "explanatory" o causali. Tali modelli utilizzano le informazioni e i dati sui fattori che si crede possano avere un impatto quantitativo sui tassi di mortalità, come l'effetto coorte (o anno di nascita), lo status socioeconomico, stile di vita, localizzazione geografica, educazione, sviluppi medici e malattie.
- Modelli basati su serie storiche, fondati sulla proiezione delle tendenze storiche della mortalità nel futuro.

Quanto alle prime due tipologie di modelli, sebbene poco utilizzate in passato a causa di una diffusa scarsa conoscenza sulle relazioni esistenti tra fattori causali e tassi di mortalità e un'inaffidabilità generalizzata nei dati, numerosi passi in avanti sono stati compiuti, a partire dai modelli[49] lanciati nel 2012 da Risk Management Solutions (RMS)[50], e i numerosi studi accademici a riguardo, con l'introduzione di variabili causali nei modelli di mortalità (si veda per esempio Villegas e Haberman, 2014).

I modelli su serie storiche (presi in considerazione nel presente elaborato) costituiscono invece la tipologia di modellizzazione più utilizzata dagli attuari e dalle agenzie governative, in quanto capace di utilizzare le tendenze passate per descrivere i tassi di

[49] Per quanto attiene alla gestione del rischio di longevità, il modello noto come "RMS longevity risk model" cerca di proiettare la mortalità e le sue variazioni sulla base di cause individuali di miglioramento nella mortalità, quali le tendenze nello stile di vita, ambiente sanitario, interventi medici, medicina rigenerativa, come ricerca sulle cellule staminali, terapia genica e nanomedicina.
[50] Azienda americana di software development, nota per i suoi contributi pioneristici nella modellizzazione e applicazione di soluzioni software per la gestione dei rischi a livello globale nei riguardi di assicuratori, mercati finanziari e agenzie di rating.

mortalità futuri, come funzione dell'anno di calendario t e dell'età raggiunta x (Antolin, 2007). All'interno di questa tipologia si distinguono:

- Modelli deterministici:
    - modelli basati su proiezioni indipendenti di tassi di mortalità specifici per età, come i modelli esponenziali, basati su funzioni di riduzione (paragrafo 4.3.2);
    - modelli basati su proiezioni dei parametri di leggi di mortalità (paragrafo 4.3.3);
    - altri approcci, basati sulle proiezioni di indicatori ("model table") e su trasformazioni delle tavole di mortalità (modello relazionale di Brass).
- Modelli stocastici, a partire dal modello di Lee-Carter.

È importante notare come i modelli attuariali su cui si basavano le prime formule per il calcolo del valore delle rendite, sviluppate da Jan de Witt e Halley[51] nel tardo Seicento, palesavano un approccio deterministico e in secondo luogo, statico, all'analisi della mortalità.

Un modello deterministico, sebbene utilizzi le cosiddette "funzioni biometriche" (come ad esempio $q_{x,}$ l_x , …), le tratta solamente da un punto di vista probabilistico, con lo scopo di calcolare i valori attesi di polizze assicurative, senza che alcuna misura di rischio venga presa in considerazione. Tale approccio era funzionale nel passato in quanto in linea con le prime scoperte compiute circa il ruolo del rischio di mortalità in un portafoglio assicurativo, per cui una minore variabilità nei pagamenti dell'assicuratore si osservava essere associata a grandi dimensioni di portafoglio; in sostanza, il rischio preso in considerazione era unicamente il "process risk" (capitolo II). Il riconoscimento del rischio di longevità come rischio sistematico richiede oggi approcci stocastici, come in seguito si analizzerà.

[51] Jan de Witt era il Primo Ministro degli Stati d'Olanda, e dimostrò come calcolare nel 1671 il valore delle rendite usando un tasso di interesse costante e una tavola di mortalità lineare a tratti.
Anche Edmund Halley, nel 1693, sviluppò un metodo di calcolo del valore delle rendite basato sui tassi di mortalità della popolazione, cosa che permise al governo inglese di vendere rendite vitalizie ad un prezzo più appropriato. Il lavoro di Halley gettò le basi per lo sviluppo delle scienze attuariali.

La staticità di un modello, come in precedenza accennato[52], deriva dal fatto che le probabilità sono ricavate a partire da tavole di mortalità implicitamente basate sull'assunzione che le tendenze nella mortalità non cambino nel futuro.
Le esperienze nella mortalità nel corso del XX secolo hanno invece dimostrato come sia necessario adottare tavole di mortalità proiettate, costruite su ipotesi differenti nell'esperienza della mortalità.
Ecco, quindi, che si può osservare un progressivo spostamento da modelli deterministici e statici, verso modelli stocastici e dinamici, di cui viene fornito in seguito uno spaccato.

I modelli tradizionali, deterministici cercano di interpolare le tendenze storiche nella mortalità, estrapolando così i trend futuri basandosi sull'ipotesi per cui il passato si ripeterà anche nel futuro: la natura stocastica della mortalità non viene quindi presa in considerazione, per cui le previsioni future dei tassi di mortalità conducono solamente a stime puntuali. La figura 16 presenta un modello su serie storiche, in ottica deterministica e dinamica, in cui le probabilità di morte per età x, q_x ,variano al progredire degli anni di calendario.

I modelli stocastici della mortalità considerano i tassi di mortalità osservati non come semplici numeri, come nel caso deterministico, bensì estrazioni di variabili casuali che rappresentano la mortalità passata, e i tassi di mortalità proiettati come stime di variabili casuali che rappresentano la mortalità futura.
Pertanto, assunzioni stocastiche circa la mortalità sono richieste, ed in particolare le distribuzioni di probabilità per il numero aleatorio di morti, e una struttura statistica capace di collegare le previsioni alle osservazioni deve essere specificata (come rappresentato in figura 17).
I risultati delle proiezioni forniscono come output del modello tanto stime puntuali quanto intervalli di confidenza nei futuri tassi di mortalità (figura 18). Vi è quindi il calcolo statistico dell'incertezza circa i trend futuri, che permette di visualizzare allora il rischio sistematico nelle tendenze future (rischio di longevità).
Il capostipite di tali approcci è il modello di Lee-Carter, in cui il tasso centrale di mortalità[53] viene modellizzato come processo stocastico.

[52] Si veda il capitolo III.

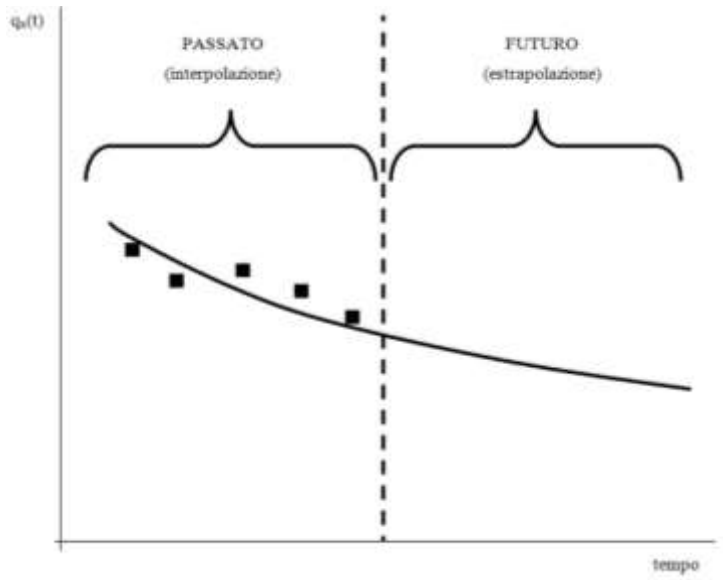


Figura 16: Modello estrapolativo

Fonte: Olivieri et al. (2006)

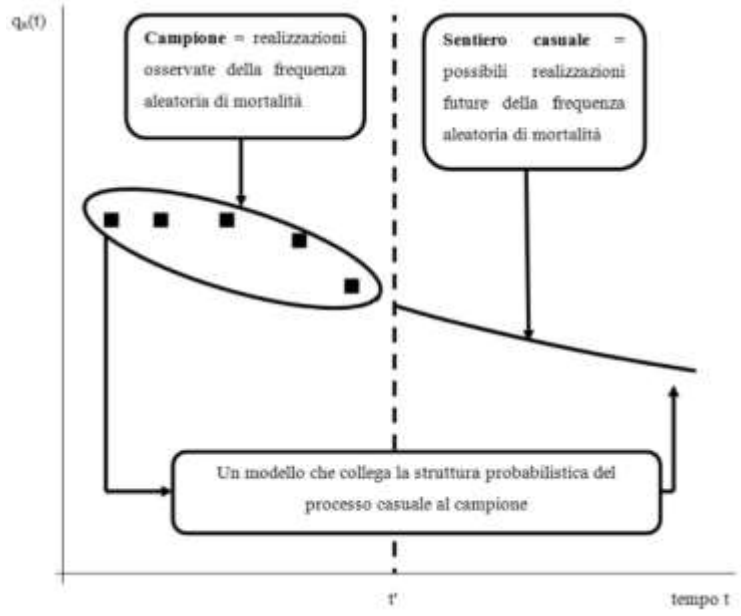


Figura 17: Modelli stocastici

Fonte: Olivieri et al. (2006)

[53] Si veda il paragrafo 4.2.3.

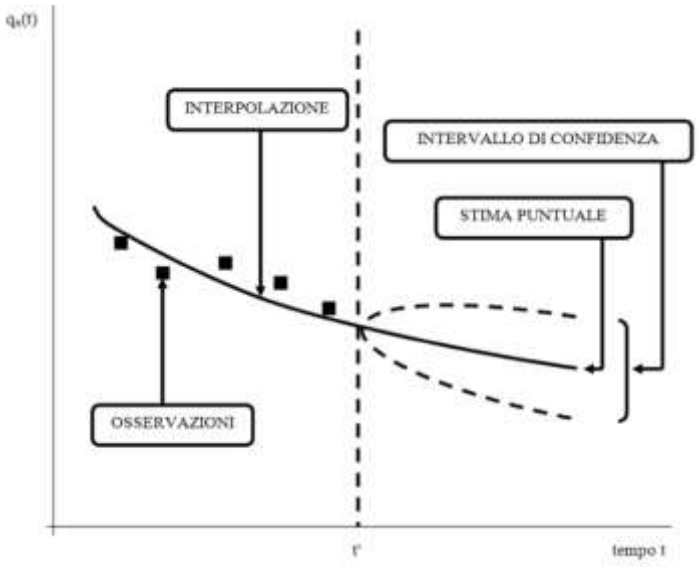


Figura 18: Stime puntuali e intervalli di confidenza nelle proiezioni stocastiche

Fonte: Olivieri et al. (2006)

4.2 Rappresentazione delle dinamiche nella mortalità

Come si è visto, la progressiva diminuzione della mortalità umana ha portato a rifiutare le ipotesi di mortalità statica, che avrebbero potuto portare a valutazioni attuariali distorte, e a adottare tavole proiettate, basate su logiche dinamiche.

In questo contesto, l'idea base consiste nell'esprimere la mortalità come funzione dell'anno di calendario t. Poiché, come nei modelli statici, anche le età sono ovviamente necessarie, la mortalità si assume essere funzione sia dell'età x che dell'anno calendario t[54].

Si ponga ora l'attenzione sulle probabilità di morte a un anno, definite come $q_x(t)$, cioè la probabilità che un individuo di età x muoia nel corso di un anno per un certo anno di

[54] I modelli sottostanti la mortalità si basano su tre elementi principali, cioè variabili o fattori; nello specifico, tali elementi sono età, tempo e coorte e sono adottati per distinguere e classificare modelli a zero, uno, due o tre fattori. I modelli a zero fattori usano semplicemente una misura aggregata (come le aspettative di vita) o il tasso relativo all'età, e sono poco adottati nelle previsioni della mortalità.
I modelli a un fattore esprimono i tassi di mortalità come funzione dell'età (tipici modelli sono le leggi di mortalità), mentre quelli a due fattori prendono in considerazione anche il tempo (i più recenti metodi di previsione della mortalità utilizzano tali modelli, come il modello di Lee-Carter o modelli di regressione bivariata età-tempo all'interno del quadro dei modelli GLM, Generalised Linear Model), oppure la coorte. Modelli a tre fattori (o modelli APC, age-period-cohort) esprimono i tassi come funzione di età, tempo e coorte. Qui si cerca di esprimere la mortalità attraverso due fattori.

calendario t. Si faccia riferimento alla Tabella 2, cioè la matrice di $q_x(t)$ in cui le righe corrispondono alle età e le colonne agli anni di calendario t.
Gli elementi di tale matrice possono essere letti secondo tre modalità:

- Un approccio verticale (si fissa una colonna),

$$q_0(t), q_1(t), \dots, q_x(t), \dots$$

  corrispondente ad una sequenza di tavole di mortalità di periodo, con ogni tavola che si riferisce ad un certo anno t;
- Un approccio diagonale,

$$q_0(t), q_1(t+1), \dots, q_x(t+x), \dots$$

  corrispondente ad una sequenza di tavole di coorte, con ogni tavola che si riferisce ad una coorte nata nell'anno t;
- Un approccio orizzontale (si fissa una riga),

$$\dots, q_x(t-1), q_x(t), q_x(t+1), \dots$$

  che permette di esprimere i profili della mortalità, con un profilo per ogni età x.

	...	$t-1$	t	$t+1$	...
0	...	$q_0(t-1)$	$q_0(t)$	$q_0(t+1)$	...
1	...	$q_1(t-1)$	$q_1(t)$	$q_1(t+1)$	...
...	...	...	...	...	...
x	...	$q_x(t-1)$	$q_x(t)$	$q_x(t+1)$	...
$x+1$	...	$q_{x+1}(t-1)$	$q_{x+1}(t)$	$q_{x+1}(t+1)$	...
...	...	...	...	...	...
$\omega-1$	...	$q_{\omega-1}(t-1)$	$q_{\omega-1}(t)$	$q_{\omega-1}(t+1)$	...

Tabella 2: Probabilità di morte ad un anno in un contesto dinamico

Fonte: Pitacco et al. (2009)

La matrice sopra riportata contiene elementi che si riferiscono tanto ad anni passati che ad anni futuri. Gli elementi che si riferiscono ad anni passati sono di solito derivati da osservazioni periodali della mortalità t_1 ,t_2,…t_n .

Sia t_n l'anno calendario per cui la più recente tavola di periodo risulta disponibile. Allora, le probabilità $q_x(t)$ per $t>t_n$ si riferiscono agli anni per cui una tavola non è ancora disponibile, e quindi anni futuri. Allora, tali probabilità devono essere appunto stimate attraverso procedure proiettive.

Dato un certo anno t_n e un anno massimo t*, la tavola di mortalità proiettata consiste nella sottomatrice, come in figura 19:

$$\{q_x(t)\} \text{ con } x = 0,1,2 \dots \omega \text{ e } t = t_n + 1, t_n + 2, t_n + 3, \dots, t^* \tag{60}$$

In tale contesto dinamico, anche le probabilità concernenti la durata di vita di una persona di età x, cambiano. È possibile derivare le probabilità di morte, $q_x(t)$, $q_{x+1}(t+1)$, $q_{x+2}(t+2)$ dalla diagonale, così da ottenere le relative probabilità di sopravvivenza ${}_kp_x(t)$, cioè la probabilità per un individuo di età x nell'anno t di essere in vita all'anno x+k. Quindi:

$${}_k\vec{p_x}(t) = \prod_{j=0}^{k-1} \left[1 - q_{x+j}(t+j)\right] \tag{61}$$

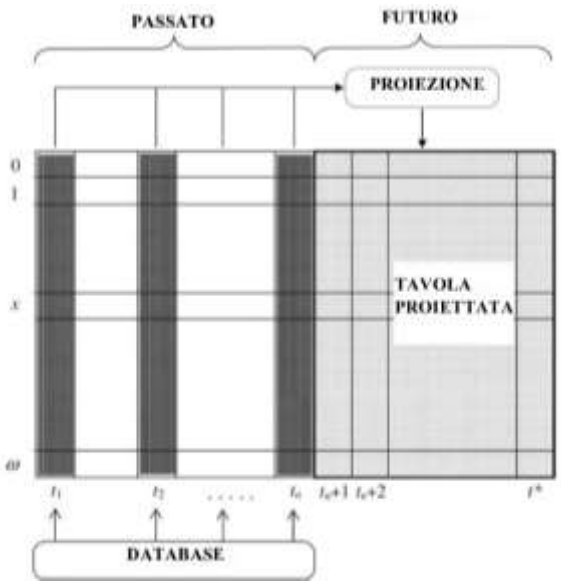


Figura 19: Dall'esperienza nella mortalità alla tavola proiettata

Fonte: Pitacco (2011)

4.3 Previsioni deterministiche della mortalità

4.3.1 Previsione con un approccio orizzontale con procedure estrapolative

Una procedura di estrapolazione per la mortalità mira a derivare le tendenze future della mortalità (cioè le probabilità di morte future) da un database che esprime l'esperienza passata della mortalità (figura 19). Se gli elementi del set informativo sono trattati come semplici numeri (quindi in modo deterministico), allora la procedura estrapolativa non fornisce alcuna informazione statistica. Vari approcci tradizionali sono così caratterizzati.

Si assuma che le osservazioni periodali per una data popolazione siano disponibili (come i maschi viventi in un certo Paese o i pensionati membri di un piano pensionistico).
Ogni osservazione consiste nelle tendenze per età della mortalità per un dato set di età $\mathcal{X}$, ad esempio $\mathcal{X} = \{x_{min}, x_{min} + 1, \dots, x_{max}\}$. Le osservazioni riferite all'anno di calendario t possono essere espresse da

$$\{q_x(t)\}_{x\in X} = \left\{q_{x_{min}}(t), q_{x_{min}+1}(t), \dots, q_{x_{max}}(t)\right\} \tag{62}$$

Si assuma poi il set di anni osservati $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$. Allora, si dirà che la matrice

$$\{q_x(t)\}_{x\in X;\quad t\in\mathcal{T}} = \{q_x(t_1), q_x(t_2), \dots, q_x(t_n)\}_{x\in X} \tag{63}$$

costituisce il database per le proiezioni della mortalità.
Si imponga che le tendenze osservate negli anni passati possano essere interpolate attraverso una funzione esponenziale. Allora la mortalità futura può essere stimata attraverso l'estrapolazione del trend (figura 16).
L'estrapolazione dei q_x rappresenta un approccio orizzontale alla previsione (si veda la figura 20); adottare un approccio orizzontale significa intendere che le estrapolazioni siano performate indipendentemente per ogni $q_{x,}$ così che il risultato sia una funzione $\psi_x(t)$ per ogni età x.
Questo approccio ha il vantaggio di essere piuttosto semplice, tuttavia potrebbe portare in realtà a risultati non realistici, tali per cui in un tempo futuro, per età x_1e x_2, con $x_1 < x_2$, si ritrova che $q_{x_1}(t) > q_{x_2}(t)$.

È necessario precisare che la scelta di T è fondamentale per la costruzione di una procedura di proiezione della mortalità. Una sequenza statistica eccessivamente lunga potrebbe caratterizzarsi per una tendenza nella mortalità in cui le recenti cause di miglioramento nella mortalità hanno un peso relativamente piccolo, mentre le cause di miglioramenti nella mortalità i cui effetti sono considerati ormai estinti, sono ancora incluse nel trend stesso.

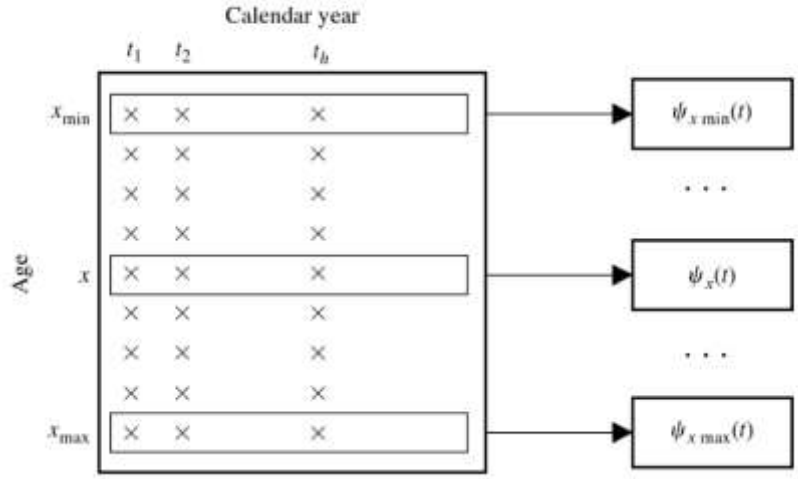


Figura 20: L'approccio orizzontale

Fonte: Pitacco et. al (2009)

4.3.2 Formule esponenziali

Un esempio di procedura estrapolativa, deterministica, consiste nell'estrapolazione attraverso formule esponenziali.

Si assuma che, per una data età x, il trend osservato negli anni passati possa essere previsto da una funzione esponenziale. Allora, la mortalità futura può essere stimata estrapolando la tendenza stessa. In particolare

$$\ln\, q_x(t_{h+1}) - \ln\, q_x(t_h) \approx -\delta_x(t_{h+1} - t_h) \tag{64}$$

Allora

$$\frac{q_x(t_{h+1})}{q_x(t_h)} \approx \mathrm{e}^{-\delta_x(t_{h+1}-t_h)}$$

Definendo $r_x = e^{-\delta_x}$([55]), segue che:

$$\mathrm{q_x}(t_{h+1}) \approx \mathrm{q_x}(t_h)\mathrm{r_x}^{(t_{h+1}-t_h)}$$

Poichè t'=t_n =t_h, e assumendo t>t':

$$q_x(t) = q_x(t')r_x^{t-t'} \tag{65}$$

imponendo $r_x < 1$ risulta che:

$$q_x(\infty) = 0 \tag{66}$$

Tale modello ipotizza quindi che in un futuro lontano la mortalità tenderà a zero.
Essendo di fatto un modello solo ipotetico, può essere sostituito da un modello più generale, in cui si assegna un limite positivo alla mortalità per ogni anno x:

$$\frac{q_x(t)}{q_x(t')} = [\alpha_x + (1-\alpha_x){r_x}^{t-t'}] = R_x(t-t') \tag{67}$$

Vale che, per $r_x < 1$:

$$q_x(\infty) = \alpha_x q_x(t') \tag{68}$$

La formula (68) assegna un asintoto positivo (non nullo, come in precedenza), per cui la mortalità tende a $\alpha_x q_x(t')$.
Il calcolo dei parametri, in particolare r_x (o δ_x), può essere implementato attraverso procedure dei minimi quadrati, o metodi alternativi.

[55] r_x viene definito fattore di variazione (o fattore di riduzione se appunto <1). Si prendano in considerazione le probabilità di morte per un'età x riferite rispettivamente ad un dato anno t' e un generico anno t (con t>t'); si può dire che:

$$q_x(t) = q_x(t')R_x(t-t')$$

La quantità $R_x(t-t')$ è chiamata fattore di variazione, o di riduzione, in linea con le tendenze decrescente nella mortalità all'età x per l'intervallo (t', t).

Alcuni esempi di formule esponenziali usati nella pratica attuariale

La formula (69) venne proposta nel Regno Unito dal Continuous Mortality Investigation Bureau nel 1990. Il fattore di riduzione $R_x(t-t')$ (nota 53) con t'=1980, è dato da:

$$R_x(t-t') = \frac{q_x(t)}{q_x(t')} = \alpha_x + (1-\alpha_x)(1-f)^{\frac{t-t'}{20}} \tag{69}$$

con f = 0.60 (dove "1-f" rappresenta la velocità di convergenza al valore limite) e:

$$\alpha_x = \begin{cases} 0.50 & \text{if } x < 60 \\ \dfrac{x-10}{100} & \text{if } 60 \le x \le 110 \\ 1 & \text{if } x > 110 \end{cases} \tag{70}$$

Per ogni anno t, il fattore di riduzione, compreso si ricordi tra 0 e 1, aumenta linearmente con l'età, fino all'unità a 110 anni.

Una formula esponenziale venne anche utilizzata negli Stati Uniti. La società degli attuari calcolava nel 1994 le probabilità di morte proiettate nel seguente modo:

$$q_x(t) = q_x(1994) r_x^{t-1994} \tag{71}$$

Ancora, sulla base dell'esperienza empirica nell'osservazione delle probabilità di morte, si possono considerare altre formule per esprimere le probabilità di morte $q_x(t)$, diverse da quelle esponenziali, come ad esempio:

- $q_x(t) = a_x + \frac{b_x}{t}$
- $q_x(t) = \sum_{h=0}^{p} a_{x,h} t^h$, dove con p=1, è possibile ricavare un metodo lineare $q_x(t) = a_{x,0} + a_{x,1} t$
- $q_x(t) = \frac{e^{G_x(t)}}{1+e^{G_x(t)}}$, dove $G_x(t)$ presenta, per ogni età x, una forma polinomiale.

4.3.2 Previsione con un approccio diagonale e verticale in un contesto parametrico

Come si è visto, quando una tavola di mortalità viene applicata ai dati, le tendenze nella mortalità sono descritte da un insieme più o meno ampio di parametri.
Si consideri una legge che descrive la forza di mortalità:

$$\mu_x = \varphi(x, \alpha, \beta, \dots)$$

(72)

In un contesto dinamico, l'anno t entra nel modello attraverso i suoi parametri

$$\mu_x(t) = \varphi(x, \alpha(t), \beta(t), \dots)$$

(73)

Sia $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ un insieme di anni di osservazione. Allora, per χ assegnato, il database è rappresentato dall'insieme di valori osservati:

$$\{\mu_x(t)\}_{x\in\mathcal{X};t\in\mathcal{T}} = \{\mu_x(t_1), \mu_x(t_2), \dots, \mu_x(t_n)\}_{x\in\mathcal{X}}$$

(74)

Per ogni anno calendario t_h , è possibile stimare i parametri del modello

$$\mu_x(t_h) = \varphi(x; \alpha_h, \beta_h, \dots)$$

(75)

attraverso il metodo dei minimi quadrati o quello di massima verosimiglianza, così che un dataset di "n" funzioni di età x sia ottenuto

$$\{\mu_x(t_1), \mu_x(t_2), \dots, \mu_x(t_n)\}$$

(76)

Le tendenze nei parametri sono poi interpolate attraverso formule matematiche, così da derivare un set di funzioni indicizzate al tempo t :

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \Rightarrow \alpha(t)$$
$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \Rightarrow \beta(t)$$
$$\dots$$

(77)

Tale metodologia segue un approccio di tipo verticale alla previsione della mortalità (si veda la figura 21).
È possibile ancora adottare un approccio diagonale (figura 22), iniziando dalla stima dei parametri attraverso un'interpolazione per coorte. In questo caso i parametri dipendono dall'età di nascita τ:

$$\mu_x(\tau) = \varphi(x; \gamma(\tau), \delta(\tau), \dots)$$

(78)

Per ogni anno $\tau_h, h = 1,2, \dots, m$, si stimano i parametri che compaiono nel modello

$$\mu_x(\tau_h) = \varphi(x; \gamma_h, \delta_h, \dots)$$

(79)

e un insieme di "m" funzioni di età x è ottenuto

$$\{\mu_x(\tau_1), \mu_x(\tau_2), \dots, \mu_x(\tau_m)\}$$

(80)

Le tendenze nei parametri sono poi interpolate attraverso formule matematiche, e si ottiene un set di funzioni indicizzate al tempo τ:

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m \Rightarrow \gamma(\tau)$$
$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m \Rightarrow \delta(\tau)$$

(81)

Ad esempio, una legge di Makeham utilizzata seguendo un approccio verticale, può essere definita come segue:

$$\mu_x(t) = A(t) + B(t)c(t)^x$$

Quando invece viene adottato un approccio diagonale, le dinamiche della legge di Makeham sono le seguenti:

$$\mu_x(\tau) = \bar{A}(\tau) + \bar{B}(\tau)\bar{c}(\tau)^x$$

(82

Si cita infine l'esistenza di altri approcci, come quelli che prendono in considerazione le così dette "model table", costruite estrapolando tendenze negli indicatori di tavole di mortalità per una data popolazione, e poi proiettandoli (ad esempio il modello di Coale-Demeny del 1966), e altri in cui si sfruttano trasformazioni delle tavole di mortalità, ad esempio il metodo relazione di Brass, che sfrutta una trasformazione logistica della funzione di sopravvivenza.

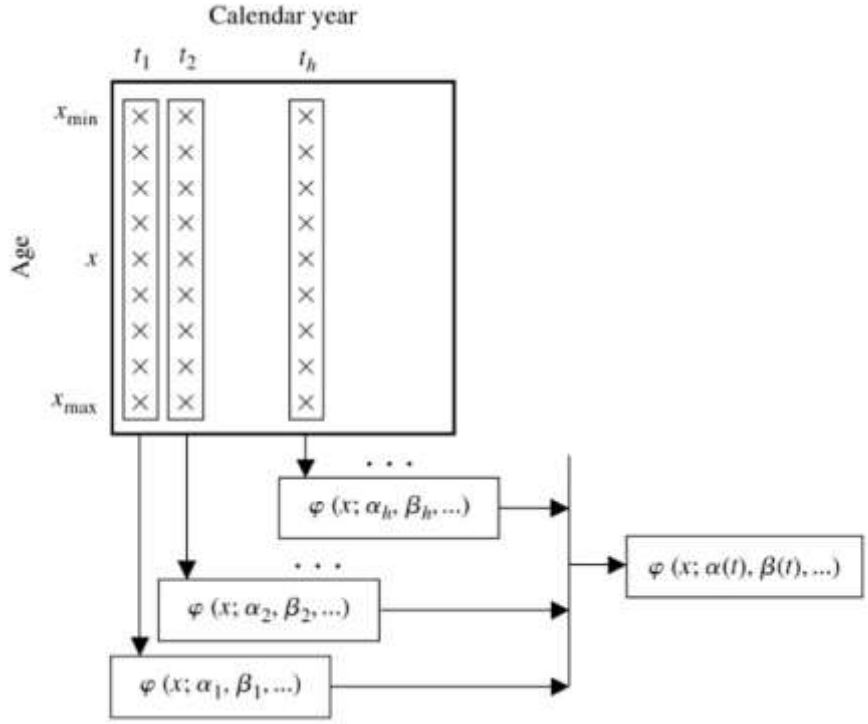


Figura 21: L'approccio verticale

Fonte: Pitacco et. al (2009)

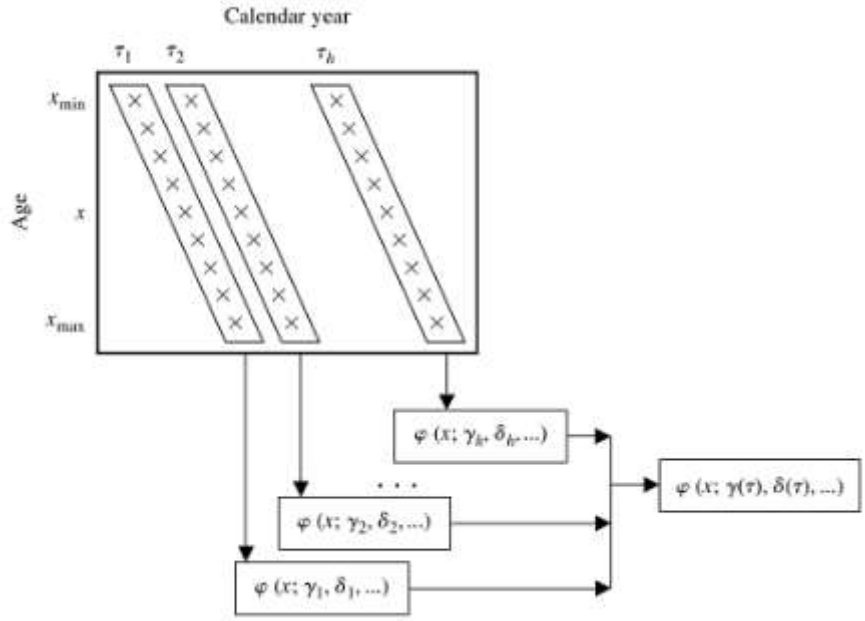


Figura 22: L'approccio diagonale

Fonte: Pitacco et. al (2009)

4.4 Previsioni stocastiche della mortalità

4.4.1 Il modello di Lee-Carter

Specificazione

Nel 1992 Ronald D.Lee e Lawrence R. Carter[56] proposero un semplice modello per descrivere il cambiamento secolare della mortalità.
Gli studiosi, analizzando le tavole di mortalità americane, si resero in effetti conto che dal 1900 al 1988, l'aspettativa di vita alla nascita era incredibilmente aumentata negli USA da 47 a 75 anni, ed ipotizzarono potesse arrivare fino a 100 anni nel 2065.
Come si è visto, a differenza di molti modelli deterministici, che tendono ad assumere un limite superiore alla durata di vita (ad esempio il modello esponenziale, si veda paragrafo 4.3), Lee e Carter proposero un approccio in cui i tassi di mortalità per età diminuivano esponenzialmente senza limiti, o senza assunzioni sulla velocità di tale diminuzione.
Tale modello specifica la forma della forza di mortalità in modo log-bilineare, tale che:

$$\ln \mu_x(t) = \alpha_x + \beta_x \kappa_t \qquad (83)$$

La specificazione (83) differisce strutturalmente dai modelli parametrici (tra cui si ricordino le leggi di mortalità) in quanto la dipendenza dall'età è non parametrica, ma è rappresentata dalla serie storica di valori α_x e β_x, nella realtà non osservabili.
I parametri possono essere così interpretati:

- α_x descrive la tendenza media del profilo di mortalità nel tempo;
- β_x è la deviazione da questa tendenza media quando il parametro k_t varia, e indica cioè la sensibilità del logaritmo della forza di mortalità, all'età x, rispetto a variazioni di k_t;
- k_t è l'indice univariato che descrive gli effetti del tempo sui cambiamenti nella mortalità.

[56] Ronald D. Lee era professore presso i Dipartimenti di demografia ed economia dell'università della California, mentre Lawrence R. Carter insegnava presso il Dipartimento di Sociologia dell'Università dell'Oregon.

Calibrazione

Il modello usato per la stima di α_x, β_x e k_t è il seguente:

$$\ln\, \hat{m}_x(t) = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \epsilon_x(t) \tag{84}$$

dove $\epsilon_x(t)$ rappresenta il termine di errore white-noise, quindi con media 0 e varianza σ^2.

Il modello (84) non può essere implementato con una semplice regressione, dal momento che i tre parametri non sono variabili osservabili. Stime dei minimi quadrati possono essere ricavate usando una decomposizione ai valori singolari (SVD), partendo da una matrice di forze di mortalità per età osservate.

Ora, il modello soffre di problemi di identificabilità (Pitacco et al.,2009). Per vedere questo si considerino le seguenti parametrizzazioni:

$$\begin{gathered} \ln\left(m_{x,t}\right) = \tilde{\alpha}_x + \tilde{\beta}_x \tilde{k}_t \\ \text{dove } \tilde{\alpha}_x = \alpha_x + b\beta_x \\ \tilde{\beta}_x = \frac{\beta_x}{a} \\ \tilde{k}_t = a(k_t - b) \end{gathered} \tag{85}$$

Allora, $\ln\left(m_{x,t}\right) = \alpha_x + b\beta_x + \frac{\beta_x}{a} a(k_t - b)$ è equivalente alla (84) per ogni valore di a e b. Per evitare tale problema e assicurare l'identificabilità del modello, è necessario imporre un duplice vincolo, cioè:

$$\sum_{t=t_1}^{t_n} \kappa_t = 0 \text{ e } \sum_{x=x_1}^{x_m} \beta_x = 1 \tag{86}$$

Assumendo come in (86) che l'intervallo campionario per il tempo vada da t_1 a t_n e per la componente età da x_1 a x_m , le stime dei parametri, cioè $\hat{\alpha}_x$, $\hat{\beta}_x$, e $\hat{\kappa}_t$, sono tali da minimizzare

$$\mathcal{O}_{LS}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\kappa}) = \sum_{x=x_1}^{x_n} \sum_{t=t_1}^{t_n} (\ln\, \hat{m}_x(t) - \alpha_x - \beta_x \kappa_t)^2 \tag{87}$$

Calcolando la derivata prima $\frac{\partial O\text{LS}\,(\alpha,\beta,k)}{\partial \alpha_x}$ e ponendola uguale a zero si ricava:

$$\sum_{t=t_1}^{t_n} \ln \hat{m}_x(t) = (t_n - t_1 + 1)\alpha_x + \beta_x \sum_{t=t_1}^{t_n} \kappa_t$$

(88)

Dal momento che $\sum_{t=t_1}^{t_n} \kappa_t = 0$ (86), si ottiene:

$$\hat{\alpha}_x = \frac{1}{t_n - t_1 + 1} \sum_{t=t_1}^{t_n} \ln \hat{m}_x(t)$$

(89)

È quindi possibile ottenere le stime di α_x attraverso la media per righe[57] del $\ln \hat{m}_x(t)$, quindi α_x rappresenta il pattern della mortalità per una specifica età x.

Si ottengono poi le stime $\hat{\beta}_x$ e $\hat{\kappa}_t$ dal primo termine di una SVD della matrice $\ln \hat{m}_x(t) - \hat{\alpha}_x$. Specificatamente, i tassi di mortalità possono essere combinati per formare la matrice

$$M = \begin{pmatrix} m_{x_1}(t_1) & \cdots & m_{x_1}(t_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{x,m}(t_1) & \cdots & m_{x_m}(t_n) \end{pmatrix}$$

Si crei ora la matrice **Z,** tale che**:**

$$\begin{aligned} \mathrm{Z} &= \ln \hat{M} - \hat{\alpha} \\ &= \begin{pmatrix} \ln \hat{m}_{x_1}(t_1) - \hat{\alpha}_{x_1} & \cdots & \ln \hat{m}_{x_1}(t_n) - \hat{\alpha}_{x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \ln \hat{m}_{x_m}(t_1) - \hat{\alpha}_{x_m} & \cdots & \ln \hat{m}_{x_m}(t_n) - \hat{\alpha}_{x_m} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

di dimensioni $(x_m - x_1 + 1) \times (t_n - t_1 + 1)$.

Si trovino ora $\hat{\beta}_x$ e $\hat{\kappa}_t$ tali da minimizzare

$$\tilde{O}_{LS}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\kappa}) = \sum_{x=x_1}^{x_m} \sum_{t=t_1}^{t_n} (z_{xt} - \beta_x \kappa_t)^2$$

(90)

La soluzione è ottenuta applicando la decomposizione ai valori singolari[58] alla matrice Z, che la decompone nel prodotto di tre matrici.

Sia u_1 l'autovettore corrispondente al più grande autovalore di $\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}$. Sia v_1 il corrispondente autovettore di $\boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}^T$. La migliore approssimazione di **Z** è data da:

[57] Si veda Figura 20

[58] Si veda Baker (2005) per un'analisi dettagliata di tale metodo.

$$Z \approx Z^* = \sqrt{\lambda_1} v_1 u_1^{\mathrm{T}}$$

(91)

da cui si deduce

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \frac{v_1}{\sum_{j=1}^{x_m - x_1 + 1} v_{1j}} \text{ e } \widehat{\boldsymbol{\kappa}} = \sqrt{\lambda_1} \left(\sum_{j=1}^{x_m - x_1 + 1} v_{1j} \right) u_1$$

(92)

dato che $\sum_{j=1}^{x_m - x_1 + 1} v_{1j} \neq 0$.

Si possono infine stimare i logaritmi dei tassi di mortalità come

$$\ln\left(\hat{m}_{t,x}\right) = \hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{k}_t$$

(93)

Una procedura alternativa alla decomposizione a valori singolari consiste nell'approccio ricorsivo basato sull'algoritmo di Newton-Raphson (o metodo delle tangenti).

Tale approccio consiste nel risolvere il sistema di equazioni costituito eguagliando a zero le derivate parziali della funzione $\mathcal{O}_{\mathrm{LS}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\kappa})$. In particolare, il sistema risulta così formato:

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{t=t_1}^{t_n} (\ln\, \hat{m}_x(t) - \alpha_x - \beta_x \kappa_t), x = x_1, x_2, \dots, x_m \\
0 &= \sum_{x=x_1}^{x_m} \beta_x (\ln\, \hat{m}_x(t) - \alpha_x - \beta_x \kappa_t), t = t_1, t_2, \dots, t_n \\
0 &= \sum_{t=t_1}^{t_n} \kappa_t (\ln\, \hat{m}_x(t) - \alpha_x - \beta_x \kappa_t), x = x_1, x_2, \dots, x_m
\end{aligned}$$

(94)

Successivamente, si va ad aggiornare ciascun parametro con lo schema ricorsivo di Newton-Raphson. In pratica, partendo da un qualche valore $x(0)$ per la radice della funzione f(x), la (k+1) esima iterazione origina x^{k+1} da x^k attraverso

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f\left(x^{(k)}\right)}{f'\left(x^{(k)}\right)}$$

(95)

In pratica, si aggiornano prima gli α_x, quindi sulla base di questi i β_x e così i κ_t, ripetendo tale procedura fino alla convergenza, ottenibile quando la funzione obiettivo (87) è inferiore a un predefinito valore infinitesimale.

Indipendentemente dal metodo utilizzato (sia SVD che metodo delle tangenti), se un attuario ha a disposizione solo i valori dei tassi di mortalità, la procedura si ferma.
Se invece altre informazioni sono disponibili, seguono degli aggiustamenti dei $\hat{\kappa}_t$. In particolare:

- Lee e Carter (1992) suggeriscono di adattare i $\hat{\kappa}_t$, dati gli $\hat{\alpha}_x$ e $\hat{\beta}_x$, così da riprodurre il numero osservato di morti $\sum_{x=x_1}^{x_m} D_{xt}$ in un certo anno t. I valori aggiustati di $\hat{\kappa}_t$ risolvono l'equazione in ζ:

$$\sum_{x=x_1}^{x_m} D_{xt} = \sum_{x=x_1}^{x_m} \mathrm{ETR}_{xt} \exp\left(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \zeta\right)$$

(96)

  dove "ETR" rappresenta il numero di individui esposti al rischio, cioè il numero di individui che generano le morti in un dato anno. Vale che:

$$\hat{\mu}_x(t) = \frac{D_{xt}}{\mathrm{ETR}_{xt}} = \hat{m}_x(t)$$

(97)

- Lee e Miller (2001) invece propongono un aggiustamento tale da riprodurre non il numero osservato di morti, quanto le aspettative di vita periodali per una certa età selezionata. L'attuario seleziona una età, tipicamente x_0 = 60 o 65 e successivamente ricalcola i $\hat{\kappa}_t$ in modo da eguagliare le aspettative di vita osservate all'età x_0 all'anno t date le stime di $\hat{\alpha}_x$ e $\hat{\beta}_x$.
- Altri aggiustamenti (Booth et al, 2002) propongono di aggiustare i $\hat{\kappa}_t$ così da eguagliare la distribuzione osservata per età delle morti.

Alcune problematiche associate al modello

Il modello di Lee-Carter, sebbene molto efficace e utilizzato per previsioni di lungo periodo, soffre di numerose carenze e problematiche, come evidenziato da Lee (2000).
In particolare:

- La serie storica dei κ_t che viene osservata nel periodo di stima può non rappresentare l'intera esperienza nella mortalità e può non riflettere l'effettivo cambiamento della mortalità nel tempo (è di fatto la problematica associata a

tutti i modelli time-series, per cui il passato può non essere indicativo del futuro, come evidenziato da Brouhns et al., 2002).

- La strategia di Lee-Carter implica che i tassi di mortalità modellizzati siano perfettamente correlati tra età, dal momento che, come si vede dalla formula (83), vengono modellizzati i cambiamenti nel tempo attraverso i tassi di mortalità per età, che dipendono tutti dal fattore temporale κ_t. In particolare, il tasso di declino dei ln $\mu_x(t)$ per età differenti è pari a $\beta_x(\kappa_t - \kappa_{t-1})$.
- Il metodo non consente di inserire informazioni estranee circa le tendenze future nella mortalità;
- Il termine d'errore $\epsilon_x(t)$, che definisce tutte i possibili fattori di noise (disturbo) per età non catturati dal modello, ha una varianza pari a σ_ϵ^2 , quindi costante ed indipendente dal tempo (l'errore è cioè omoschedastico). Tale proprietà può essere però criticata, dal momento che il logaritmo delle forze di mortalità tende ad essere più variabile ad età avanzate rispetto ad età giovanili, per il minor numero di morti in valore assoluto in età avanzate[59].

Stima di Poisson di massima verosimiglianza

Riprendendo l'ultimo punto precedente, si analizza ora la stima di Poisson di massima verosimiglianza, seguendo il modello proposto da Brouhns et. (2002).

Tale proposta, a differenza del modello di Lee-Carter, non assume che la variabilità dei tassi di mortalità $\widehat{m}_x(t)$ sia la stessa per tutti i gruppi di età, cosa per l'appunto poco realistica.

Secondo tale metodo, infatti, il numero delle morti all'età x all'anno t segue una distribuzione Poisson. Viene inoltre ipotizzato che le durate di vita rimanente per gli individui osservati siano indipendenti e identicamente distribuite. Si assume che:

$$D_{x,t} \sim \text{ Poisson } \left(\text{ETR}_{x,t} u_{x,t}\right) \qquad \textit{(98)}$$

dove $u_{x,t}$=exp $(\alpha_x + \beta_x \kappa_t)$ secondo la derivazione di Lee-Carter.

[59] Tale problema può essere facilmente bypassato se l'attuario restringe il range di età sopra i 50 anni, in modo tale da evitare instabilità dovute alla gobba per morti accidentali.

Invece che utilizzare la stima SVD, i parametri α_x, β_x *e* k_t sono ora stimati massimizzando la funzione di log-verosimiglianza. In particolare,

$$L(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\kappa}) = \sum_{x=x_1}^{x_m} \sum_{t=l_1}^{t_\parallel} \left(D_{xt}(\alpha_x + \beta_x \kappa_t) - \text{ETR}_{xt} \exp(\alpha_x + \beta_x \kappa_t)\right) + \text{costante} \quad (99)$$

Si procede quindi con l'applicazione del metodo di Newton-Raphson per la stima dei parametri.

4.4.2 Il modello di Cairns-Blake-Dowd

Un modello alternativo utilizzato per previsioni nella mortalità venne proposto da Cairns et al. (2006). Tale modello utilizza due fattori temporali con un effetto di livellamento degli effetti per età, utilizzando una trasformazione logistica delle probabilità di morte a un anno.

Gli studiosi evidenziano come empiricamente, la trasformazione logistica delle probabilità di morte a un anno ($\ln q_x(t)/p_x(t)$) risulti lineare per età x, dato un certo anno t fissato, fatta eccezione per le età giovanili. In pratica, risulta che:

$$\ln \frac{q_x(t)}{p_x(t)} = \kappa_t^{[1]} + \kappa_t^{[2]} x \Leftrightarrow q_x(t) = \frac{\exp\left(\kappa_t^{[1]} + \kappa_t^{[2]} x\right)}{1 + \exp\left(\kappa_t^{[1]} + \kappa_t^{[2]} x\right)} \quad (100)$$

dove $\kappa_t^{[1]} e\ \kappa_t^{[2]}$rappresentano processi stocastici. Rispetto al modello di Lee-Carter, tale specificazione non soffre di alcun problema di identificabilità, così che nessun vincolo è richiesto. Un'analisi dei parametri permette di evidenziare che:

- L'età x rappresenta, in questo modello, una covariata;
- $\kappa_t^{[1]}$ è l'intercetta, e tende generalmente a decrescere nel corso tempo. Questo elemento descrive la caratteristica empirica di tassi di mortalità decrescenti nel tempo per tutte le età.
- $\kappa_t^{[2]}$ è il coefficiente angolare. Se crescente, significa che nel periodo preso in considerazione per l'analisi, miglioramenti nella mortalità sono stati maggiori ad età più basse rispetto ad età più avanzate e viceversa se decrescente.

Rispetto quindi al modello di Lee-Carter, il modello di Cairns-Blake-Dowd ha due elementi in serie storica, $\kappa_t^{[1]} e\ \kappa_t^{[2]}$, che influenzano le età in modo differente. Questa è una differenza sostanziale rispetto al modello classico di Lee-Carter, in cui un unico elemento in serie storica induceva correlazione perfetta nei tassi di mortalità per differenti età da un anno all'altro. Qui invece, i cambiamenti nei tassi di mortalità sono trattati come non perfettamente correlati.

Tale aspetto è riscontrabile nell'evidenza empirica: come si è evidenziato nel capitolo I, la prima parte del XX secolo si è caratterizzata per miglioramenti nella mortalità giovanile, mentre la seconda parte per una riduzione della mortalità in età più avanzate, e quindi solo un modello a due fattori, come il modello di Cairns-Blake-Dowd, potrebbe catturare queste due differenti dinamiche.

Calibrazione

Si assuma che siano stati osservati dati relativamente agli anni $t = t_1, t_2, \dots, t_n$, ed età $x = x_1, x_2, \dots, x_m$. Si vuole quindi andare a stimare l'intercetta $\kappa_t^{[1]}$ e il coefficiente angolare $\kappa_t^{[2]}$, di solito attraverso procedure dei minimi quadrati. Il modello di regressione risulta pertanto essere:

$$\ln \frac{\hat{q}_x(t)}{\hat{p}_x(t)} = \kappa_t^{[1]} + \kappa_t^{[2]} x + \epsilon_x(t)$$

(101)

Tale modello viene quindi adattato alle osservazioni dell'anno t, dove $\hat{q}_x(t)$ sono le probabilità di morte a un anno, e dove i termini di errore $\epsilon_x(t)$ sono indipendenti e identicamente distribuiti, con media 0 e varianza costante σ^2. La funzione obiettivo

$$\mathcal{O}_t(\boldsymbol{\kappa}) = \sum_{x=x_1}^{x_m} \left(\ln \frac{\hat{q}_x(t)}{\hat{p}_x(t)} - \kappa_t^{[1]} - \kappa_t^{[2|} x \right)^2$$

(102)

deve essere minimizzata per ogni anno di calendario t, producendo le stime di $\kappa_t^{[1]} e\ \kappa_t^{[2]}$.

4.4.3 Ulteriori sviluppi: l'effetto coorte

Analisi compiute nei primi anni Duemila dal Government Actuary Department, ossia il dipartimento del Governo inglese incaricato di fornire proiezioni della popolazione britannica, evidenziarono che le coorti nate tra il 1925 e il 1945 sperimentarono miglioramenti più rapidi nella mortalità[60], tanto per gli uomini che per le donne, rispetto alle generazioni precedenti e successive (Willets,2004): trattasi del cosiddetto effetto coorte.

Le figure 23a e 23b mostrano chiaramente tale effetto: i maggiori miglioramenti nel corso degli anni Settanta sono stati sperimentati da persone sui quarant'anni, negli anni Ottanta da persone sui cinquanta e negli anni Novanta da persone di circa sessant'anni.
In pratica la stessa generazione di persone nate a cavallo degli anni Trenta.

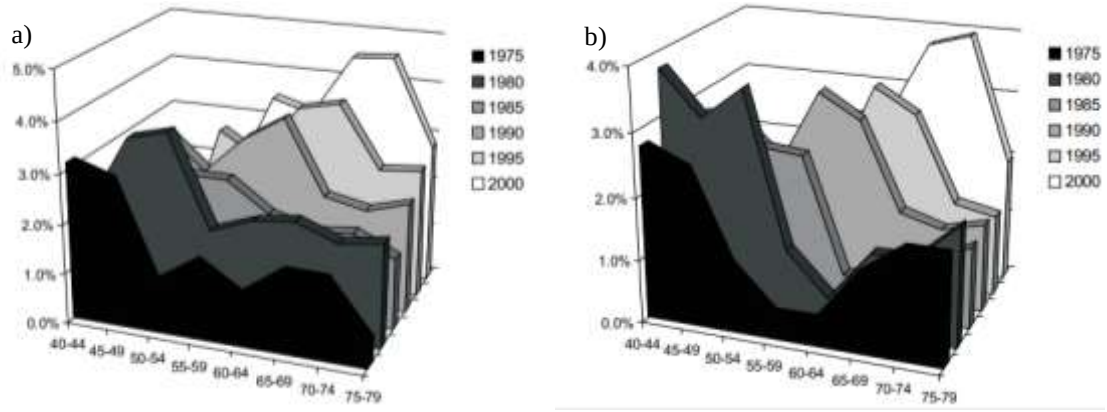


Figura 23: Tassi di miglioramenti nella mortalità medi per età e per anno calendario nella popolazione di Inghilterra e Galles, uomini (a) e donne (b).

Fonte: Willets (2004).

Le cause di tale effetto sono in realtà poco chiare, e, almeno nel caso inglese, sono dovute ad un certo numero di fattori (Willets, 2004).
Innanzitutto si consideri che i nati dopo il 1926 non presero parte attivamente al conflitto mondiale tra il 1939 e il 1945 e di conseguenza crebbero sotto condizioni migliori, rispetto a quelle avverse sperimentate dalle generazioni precedenti; in effetti

[60] In particolare, tra il 1975 e il 2000.

poi, l'introduzione di un sistema di previdenza sociale universale (conseguente al rapporto di Beveridge del 1942) e la nascita del National Health Service nel 1947 determinarono condizioni sociali più felici per i bambini che crebbero nei primi anni '50.

Altro fattore rilevante, che vale la pena citare, è relativo alle abitudini di fumo della popolazione inglese: il consumo medio di sigarette aumentò progressivamente tra il 1900 e il 1940, rimanendo costante per i due decenni successivi, per poi scendere negli anni Sessanta, Settanta e Ottanta. Tale risultato è associabile alle scoperte sulla correlazione esistente tra fumo e salute, che cominciarono a diffondersi tra le fine degli anni Cinquanta e l'inizio dei Sessanta. Uno studio dimostra che il 95% degli uomini nati tra il 1916 e il 1920 aveva fumato sigarette durante la propria vita, mentre solo il 25% di quelli nati tra il 1931 e il 1935 era un fumatore (Evandrou e Falkingham, 2002), e questo può quindi spiegare le differenze nella mortalità di coorti nate in periodi differenti.

L'evidenza empirica di un "effetto coorte" spinse a considerare estensioni del modello Lee-Carter e del modello Cairns-Blake-Dowd, tali da incorporare l'effetto coorte, come si analizzerà in seguito.

4.4.4 La famiglia dei GAPC, generalized age-period-cohort models

In questo paragrafo, si cercherà di definire un quadro generale tale da permettere di analizzare i modelli di mortalità nel loro insieme[61]e identificarne le similitudini.

Villegas et al. (2018) definiscono la famiglia dei modelli di mortalità stocastici età-periodo-coorte generalizzati (cioè i GAPC, ossia i generalized age-period-cohort), prendendo le mosse dal lavoro precedente di Currie (2016).

Le caratteristiche dei GAPC rispecchiano di fatto quelle dei modelli lineari generalizzati (GLM)[62], e possono essere riassunte in quattro elementi principali:

[61] Si rimanda alla nota 52.

[62] I generalized linear model (GLM) rappresentano una generalizzazione dei modelli di regressione lineare, in cui ogni possibile valore della variabile dipendente si assume venga generato da una variabile casuale proveniente dalla famiglia di distribuzioni esponenziali, tra le quale si possono contemplare la distribuzione Normale, Binomiale e Poisson. In pratica il valore atteso condizionale di Y risulta essere pari a:

- Il numero di morti D_{xt} è la componente aleatoria, descritta da una distribuzione di probabilità nella classe della famiglia di distribuzioni esponenziali. Nella pratica, il numero di morti D_{xt} segue una distribuzione Poisson, come si è visto nel caso del modello di Lee-Carter:

$$D_{xt} \sim \text{Poisson}\ (E_{xt}^{c}\mu_{xt})^{63}$$

Un'alternativa consiste nell'adottare una distribuzione Binomiale, come segue

$$D_{xt} \sim \text{Binomial}\ (E_{xt}^{0}, q_{xt})$$

Con $\mathbb{E}(D_{xt}/E_{xt}^{c}) = \mu_{xt}$ e $\mathbb{E}(D_{xt}/E_{xt}^{0}) = q_{xt}$

- Un predittore η_{xt} , cioè la componente sistematica che cattura gli effetti di età x, anni calendario t e anni di nascita (coorte) $c = t - x$, equivalente a:

$$\eta_{xt} = \alpha_x + \sum_{i=1}^{N} \beta_x^{(i)} \kappa_t^{(i)} + \beta_x^{(0)} \gamma_{t-x}$$

dove:

  - Il termine α_x è il parametro funzione dell'età x, che cattura la forma generale della mortalità per età;

$$\mathrm{E}(\mathbf{Y} \mid \mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu} = g^{-1}(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$$

dove $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ rappresenta il predittore lineare (l'elemento che incorpora l'informazione circa le variabili indipendenti del modello) come combinazione lineare di $\mathbf{X}$ e parametri $\boldsymbol{\beta}$, mentre g rappresenta la funzione di collegamento, che identifica la relazione tra il predittore lineare e il valore atteso della distribuzione condizionale, la componente aleatoria del modello. In pratica, un GLM non assume una relazione lineare tra la variabile dipendente $\mathbf{Y}$ e le variabili esplicative, ma assume una relazione lineare tra la trasformata attesa della variabile dipendente in termini di funzione di collegamento (g) e le variabili esplicative.

Nel modello classico di regressione lineare

$$\mathrm{E}(\mathbf{Y} \mid \mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$$

Se invece si considerasse un modello con distribuzione Poisson, utilizzata tradizionalmente per il calcolo del numero di evento in un certo arco temporale, si avrà che:

$$E(\boldsymbol{Y} \mid \boldsymbol{X}) = \mu = \exp\ (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$$

La stima dei parametri utilizza la massima verosimiglianza, e non il metodo dei minimi quadrati ordinari.

[63] E_{xt}^{c} rappresenta il numero di persone esposte al rischio (in precedenza si era utilizzata la notazione ETR), cioè:

$E_{xt}^{c} = \frac{P_x(0)+P_x(1)}{2}$, dove $P_x(0)$ rappresenta la dimensione della popolazione di età tra x e x+1 all'inizio dell'anno, mentre $P_x(1)$ è la dimensione della popolazione di età tra x e x+1 alla fine dell'anno.

E_{xt}^{0} rappresenta il numero iniziale di esposti al rischio, cioè $E_{xt}^{0} \approx E_{xt}^{c} + \frac{1}{2} d_{x,t}$; si aggiunge in pratica metà delle morti riportate ad E_{xt}^{c}.

Vale che $\hat{m}_{xt} = d_{xt}/E_{xt}^{c}$ e $\hat{q}_{xt} = d_{xt}/E_{xt}^{0}$ (Villegas et al. 2018). Come si è visto nel capitolo 3, si assume l'ipotesi di forza di mortalità costante nel corso dell'anno sia per età che per anno calendario, quindi $\mathrm{m}_{xt} = \mu_{xt}$.

- $\beta_x^{(i)}$ è l'i^{th} parametro funzione dell'età x, con i che assume valori da 1 a N, che rappresenta la sensibilità per età del predittore a cambiamenti della mortalità nel tempo;
- $\kappa_t^{(i)}$è l'i^{th} parametro funzione del tempo t che descrive una particolare tendenza nella mortalità nel corso del tempo;
- γ_{t-x} identifica l'effetto coorte[64], con $\beta_x^{(0)}$ il parametro che modula tale effetto per età x.

Nella famiglia dei processi GAPC si assume che $\kappa_t^{(i)}$e γ_{t-x} siano processi stocastici, e la loro modellizzazione consente di fornire future previsioni stocastiche dei tassi di mortalità (si rimanda al capitolo 5).

- La funzione di collegamento (o *link function*), tale da associare il valore atteso della componente aleatoria con quella sistematica, così che:

$$g\left(\mathbb{E}\left(\frac{D_{xt}}{E_{xt}}\right)\right) = \eta_{xt}$$

Sebbene svariate funzioni di collegamento siano tecnicamente possibili, è conveniente accoppiare la distribuzione Poisson con la funzione di collegamento "log" e la distribuzione Binomiale con la funzione di collegamento "logit" (Currie,2016).

- Un insieme di vincoli sui parametri, tali da assicurare un'unica stima degli stessi.

La procedura di stima dei parametri nei modelli GAPC, come già notato in nota (62), avviene massimizzando la log-verosimiglianza del modello[65].

[64] Si veda paragrafo 4.4.3.

[65] Nel caso la distribuzione delle morti fosse di tipo Poisson, la funzione di log-verosimiglianza risulta pari a:

$$\mathcal{L}(d_{xt}, \hat{d}_{xt}) = \sum_x \sum_t \omega_{xt}\{d_{xt}\log\, \hat{d}_{xt} - \hat{d}_{xt} - \log\, d_{xt}!\}$$

Nel caso Binomiale invece

$$\mathcal{L}(d_{xt}, \hat{d}_{xt}) = \sum_x \sum_t \omega_{xt}\left\{d_{xt}\log\left(\frac{\hat{d}_{xt}}{E_{xt}^0}\right) + (E_{xt}^0 - d_{xt})\log\left(\frac{E_{xt}^0 - \hat{d}_{xt}}{E_{xt}^0}\right) + \log\binom{E_{xt}^0}{d_{xt}}\right\}$$

dove

$$\hat{d}_{xt} = E_{xt} g^{-1}\left(\alpha_x + \sum_{i=1}^{N} \beta_x^{(i)}\kappa_t^{(i)} + \beta_x^{(0)}\gamma_{t-x}\right)$$

è il numero di morti attese previste dal modello.

La maggior parte dei modelli di mortalità stocastici proposti nella letteratura appartiene alla famiglia dei GAPC, all'interno della quale possiamo distinguere due principali sottogruppi:

- La classe dei modelli Lee-Carter, che si fonda sul modello descritto nel paragrafo 4.4.1 e contempla svariate varianti ed estensioni. Oltre a quelle già descritte, si cita il modello di Renshaw e Haberman (2006), che aggiunge al modello di Lee-Carter il fattore coorte.
- La classe dei modelli Cairns-Blake-Dowd, che si fonda sul modello descritto nel paragrafo 4.4.2 e che, a differenza della classe dei modelli di Lee-Carter, sfrutta una combinazione di effetti multiperiodali e di coorte per descrivere il predittore, senza un parametro funzione dell'età che descriva il profilo della mortalità.
- Esiste infine un'unione tra le due classi, sulla base del lavoro di Plat (2009).

Si procede illustrando quindi alcuni esempi di modelli noti e diffusi nella letteratura attuariali appartenenti alle due famiglie sopra citate, all'interno del quadro dei GAPC.

Renshaw e Haberman: Lee-Carter con effetti coorte

Renshaw e Haberman (2006) generalizza appunto il modello di Lee-Carter (noto nella letteratura e prassi attuariale come M1), aggiungendo il parametro che cattura l'effetto coorte per ottenere il predittore (il modello è noto come M2). In pratica,

$$\eta_{xt} = \alpha_x + \beta_x^{(1)}\kappa_t^{(1)} + \beta_x^{(0)}\gamma_{t-x}$$

Al fine di stimare il modello, Renshaw e Haberman (2006) assumono una distribuzione Poisson delle morti (componente aleatoria) e utilizzano una funzione di collegamento di tipo log per la forza di mortalità $\mu_{xt} = m_{xt}$.

Per assicurare l'identificabilità del modello, vengono imposti i seguenti vincoli:

$$\sum_x \beta_x^{(1)} = 1, \sum_t \kappa_t^{(1)} = 0, \sum_x \beta_x^{(0)} = 1, \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} \gamma_c = 0$$

Imponendo $\beta_x^{(0)} = 1$, si ricava il modello di Haberman e Renshaw (2011)

$$\eta_{xt} = \alpha_x + \beta_x^{(1)}\kappa_t^{(1)} + \gamma_{t-x}$$

Modello APC

Un modello diffuso ed utilizzato, discendente del modello di Renshaw e Haberman (2006) è il modello age-period-cohort (APC), che corrisponde al modello precedente in cui $\beta_x^{(1)} = 1$ e $\beta_x^{(0)} = 1$. In pratica:

$$\eta_{xt} = \alpha_x + \kappa_t^{(1)} + \gamma_{t-x}$$

Tale modello ha una lunga tradizione nel campo della medicina e della demografia, sebbene sia poco utilizzato nella letteratura attuariale, fino a che non venne considerato da Currie (2006). I vincoli da definire per identificare il modello sono i seguenti:

$$\sum_t \kappa_t^{(1)} = 0, \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} \gamma_c = 0, \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} c\gamma_c = 0,$$

M7: Modello Cairns-Blake-Dowd quadratico con effetti coorte

Cairns et. al (2009) estendono l'originale modello Cairns-Blake-Dowd (noto come M5), aggiungendo un effetto coorte e un termine quadratico all'effetto età, ottenendo il seguente predittore:

$$\eta_{xt} = \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x})\kappa_t^{(2)} + ((x - \bar{x})^2 - \hat{\sigma}_x^2)\kappa_t^{(3)} + \gamma_{t-x}$$

$\hat{\sigma}_x^2$ rappresenta il valore medio di $(x - \bar{x})^2$. Si ha che $\eta_{xt} = \left[\text{logit } q(t,x) = \log \frac{[q(t,x)}{(1-q(t,x))}\right]$.

A differenza del modello M5, si hanno in questo caso dei problemi di identificabilità del modello, dal momento che si può passare da γ_{t-x} a $\bar{\gamma}_{t-x} = \gamma_{t-x} + \phi_1 + \phi_2(t - x - \bar{x}) + \phi_3(t - x - \bar{x})^2$ con conseguenti cambiamenti su $\kappa_t^{(1)}, \kappa_t^{(2)}$, e $\kappa_t^{(3)}$, senza che ci sia però un impatto sulla variabile dipendente.

Per l'identificazione del modello quindi, Cairns et. al (2009) impongono il seguente insieme di vincoli:

$$\sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} \gamma_c = 0, \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} c\gamma_c = 0, \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} c^2\gamma_c = 0$$

Cairns et. al (2009) considerano inoltre strutture di predittori più semplici, cioè

$$\eta_{xt} = \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x})\kappa_t^{(2)} + \gamma_{t-x}$$
$$\eta_{xt} = \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x})\kappa_t^{(2)} + (x_c - x)\gamma_{t-x}$$

noti rispettivamente come modelli M6 e M8.

Modello di Plat

Plat (2009) va a combinare il modello di Cairns-Blake-Dowd con alcune caratteristiche del modello di Lee-Carter. In particolare, la struttura del predittore assume che ci sia una funzione statica dell'età, α_x, tre termini età-periodo (N=3) con tre parametri tali da modularne gli effetti per età $\beta_x^{(1)} = 1, \beta_x^{(2)} = x - x, \beta_x^{(3)} = (\bar{x} - x)^+$, dove $(\bar{x} - x)^+ = max(0, \bar{x} - x)$.

Allora, il predittore è dato da:

$$\eta_{xt} = \alpha_x + \kappa_t^{(1)} + (\bar{x} - x)\kappa_t^{(2)} + (\bar{x} - x)^+\kappa_t^{(3)} + \gamma_{t-x}$$

con $\eta_{xt} = \log\ (m_{xt})$.

Vengono allora imposti i seguenti vincoli sui parametri per identificare il modello:

$$\sum_t \kappa_t^{(1)} = 0, \sum_t \kappa_t^{(2)} = 0, \sum_t \kappa_t^{(3)} = 0, \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} \gamma_c = 0, \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} c\gamma_c = 0, \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} c^2\gamma_c = 0$$

Capitolo V: Un'implementazione dei modelli GAPC su dati italiani

5.1 Analisi dei dati

La sorgente dei dati utilizzati in questo elaborato è costituita dall'Human Mortality Database (HMD).

L'Human Mortality Database venne lanciato nel maggio del 2002, dopo una prima fase di sperimentazione a partire dall'anno 2000, ricevendo supporto finanziario e logistico dai suoi principali sponsor, ovvero il Dipartimento di Demografia presso l'università della California, a Berkeley, negli USA e l'Istituto per la Ricerca Demografica Max Planck, a Rostock, in Germania, oltre che supervisione tecnica e assistenza da numerosi altri collaboratori internazionali.
Il database fornisce dati di alta qualità sulla mortalità e sulla popolazione e, attualmente, sono presenti informazioni su 41 Paesi.

L'informazione fornita dall'HMD viene standardizzata e contiene le seguenti tipologie di dati (Wilmoth, 2017):

- Nascite (i conteggi annuali dei nati vivi per sesso);
- Morti (i conteggi annuali sulle morti);
- Dimensione della popolazione (stime annuali delle dimensioni della popolazione al 1° gennaio);
- ETR, exposure-to-risk (stime della popolazione esposta al rischio di morte durante un certo arco temporale);
- Tassi di mortalità (calcolati come rapporto tra le morti computate per un dato intervallo età-tempo e le exposure-to-risk stimate nello stesso intervallo);
- Tavole di mortalità (tanto di periodo, tali da rappresentare le caratteristiche di mortalità di un gruppo di individui per un dato momento storico, che di coorte, rappresentanti l'esperienza nella mortalità di un gruppo di individui nati nello stesso anno).

Verranno presi in considerazione i tassi di mortalità[66] di periodo della popolazione italiana tra i 0 e i 110 anni nel periodo tra il 1920 e il 2019 così da avere un periodo campionario di esattamente un secolo, successivo al primo conflitto mondiale e all'influenza spagnola del 1918-1919 e precedente all'epidemia del Covid-19 del 2020. La dimensione della popolazione considerata è unitaria sia per età che per anno (vengono cioè scaricati i dati su dimensione 1x1, età x anno).

L'evoluzione dei tassi di mortalità (così come in nota 65) per differenti età, per uomini e donne, può essere colta visualizzando i seguenti grafici (Figure 24-27).

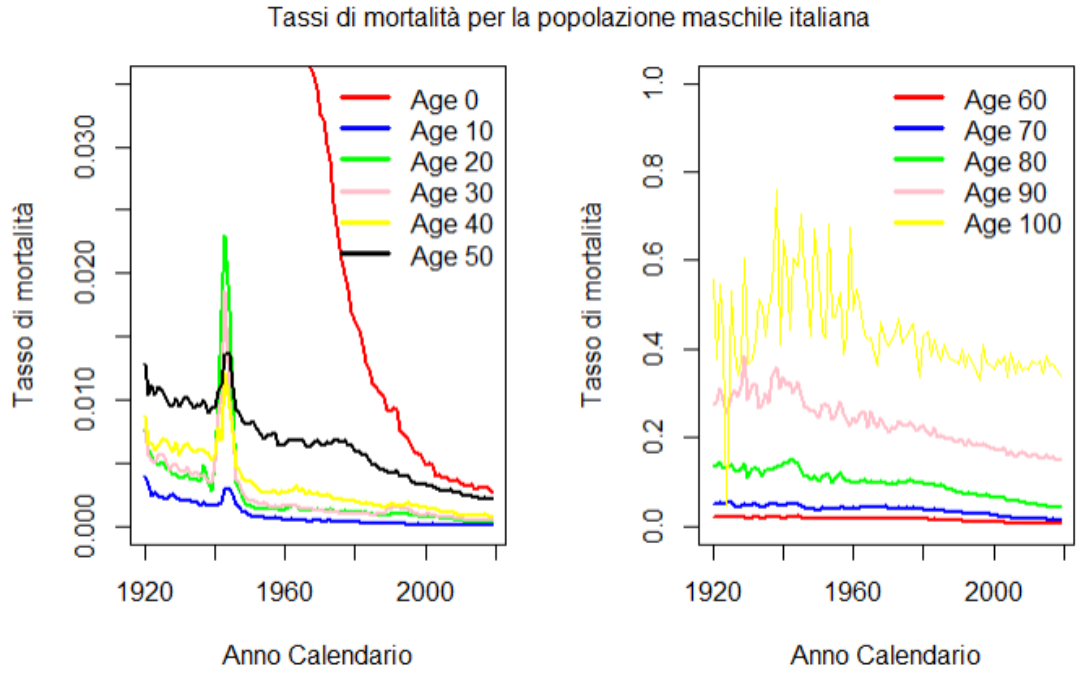


Figura 24: Tassi di mortalità per la popolazione maschile italiana. Sulla sinistra età 0-50, sulla destra 60-100

[66] Come visto nella nota 62, uno stimatore di massima verosimiglianza del tasso di mortalità può essere ottenuto dividendo il numero di morti in età x registrate nell'anno t, $D_{x,t}$, per il numero corrispondente di persone esposte al rischio di morte, $E^c_{xt,t}$ (Pitacco et. al, 2009). Quindi:

$$\hat{\mu}_x(t) = \frac{D_{xt}}{E^c_{xt}} = \hat{m}_x(t)$$

I grafici nelle Figure 24-27 sono ottenuti convertendo i tassi di mortalità così definiti in probabilità di morte q_{xt}, attraverso la seguente trasformazione (Cairns et al.,2006):

$$q_{t,x} = 1 - e^{-m_{t,x}}, \forall x, t$$

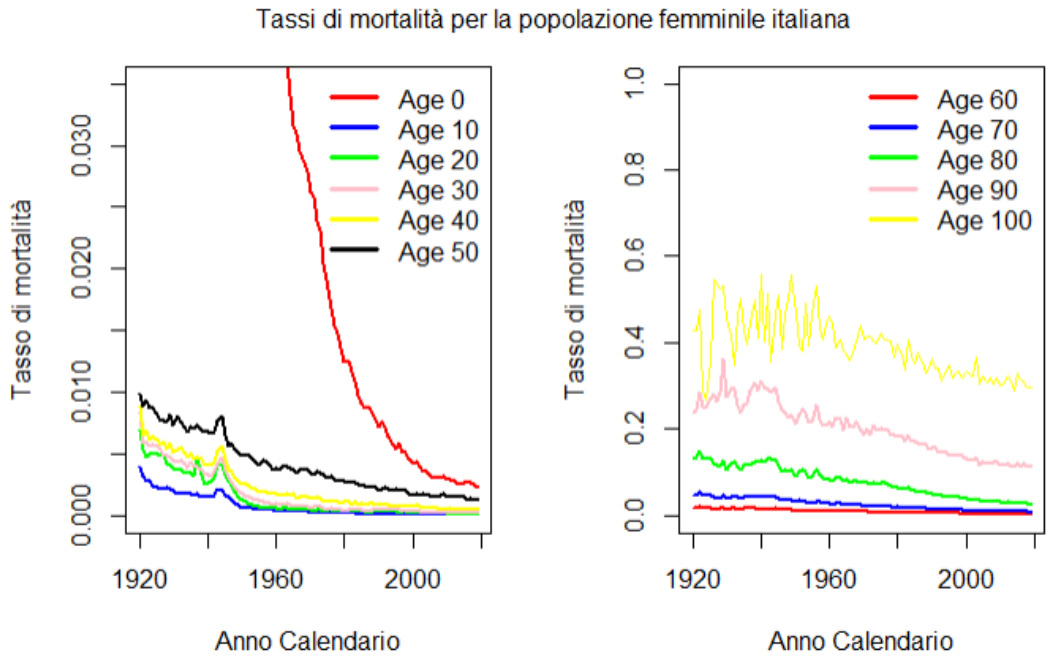


Figura 25: Tassi di mortalità per la popolazione femminile italiana. Sulla sinistra età 0-50, sulla destra 60-100

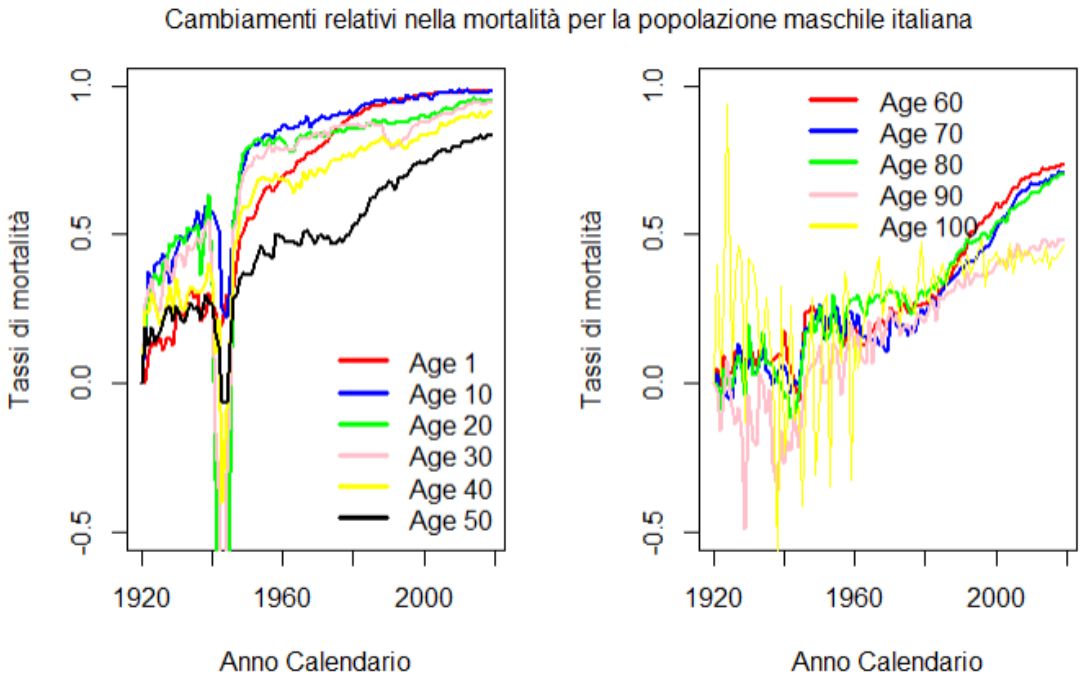


Figura 26: Tassi di miglioramento nei tassi di mortalità per la popolazione maschile italiana (come variazione percentuale rispetto al tasso di mortalità dell'età considerata dell'anno di inizio, 1920). Sulla sinistra età 0-50, sulla destra 60-100

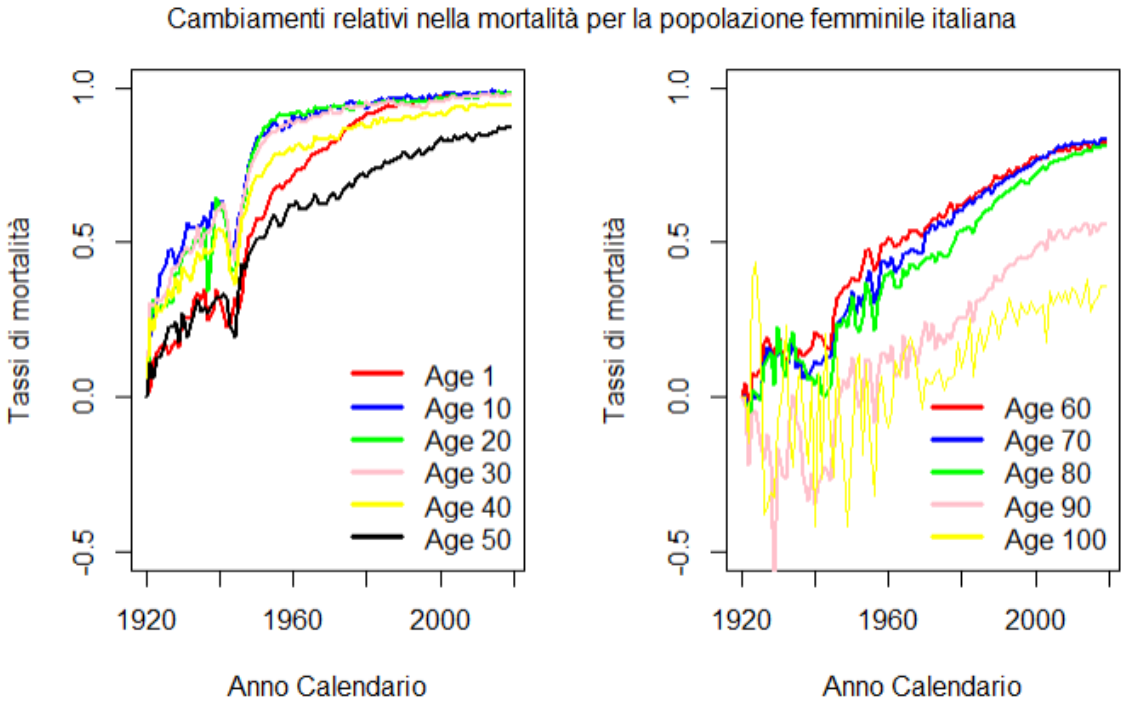


Figura 27: Tassi di miglioramento nei tassi di mortalità per la popolazione femminile (come variazione percentuale rispetto al tasso di mortalità dell'età considerata dell'anno di inizio, 1920). Sulla sinistra età 0-50, sulla destra 60-100

Dall'analisi delle figure precedenti, i seguenti spunti possono essere evidenziati:

- Innanzitutto, è possibile osservare come i tassi di mortalità della popolazione femminile siano tendenzialmente più bassi di quelli maschili per tutte le età, per ragioni probabilmente biologiche.
- L'effetto della Seconda Guerra Mondiale sui tassi di mortalità risulta chiaramente evidente soprattutto per la popolazione maschile (ma l'effetto è visibile anche nel caso femminile): i grafici mostrano vertiginosi incrementi nella mortalità tra i 20 e i 50 anni nel periodo 1939-1945, probabilmente a causa del servizio di leva obbligatorio durante il periodo fascista.
- In linea con quanto analizzato nel capitolo II, i cambiamenti maggiormente significativi nella mortalità sono associabili soprattutto all'età infantile (Age 0), la cui mortalità decresce esponenzialmente in tutto il periodo considerato, grazie ai miglioramenti nella sanità e nella medicina.
- Decrementi della mortalità nella popolazione femminile tra i 20 e i 30 anni d'età, tra il 1920 e il 1955, possono riflettere un declino nella mortalità durante la gravidanza e il parto.

- L’enorme variabilità della mortalità per le età 90-100 anni è associabile ad un ridotto numero di dati disponibili (il che rende la varianza molto più alta).

  È comunque possibile osservare come la variabilità nei tassi di miglioramento della mortalità per queste età sembra stabilizzarsi nel tempo, soprattutto nella seconda parte del secolo scorso.
- Come già evidenziato ad inizio capitolo II, i maggiori miglioramenti nella mortalità degli ultimi 50 anni sono associabili ad età avanzate (60-100 anni), dal momento che i miglioramenti per età inferiori tendono ad “appiattirsi” relativamente presto, già a partire dal 1960-1970, probabilmente per l’alto numero di morti dovute a malattie non ancora completamente curabili (come il cancro).

Nelle seguenti immagini (Figure 28-29-30), viene presentato l’andamento dei tassi di mortalità in scala logaritmica per età, per la popolazione maschile, femminile e totale.

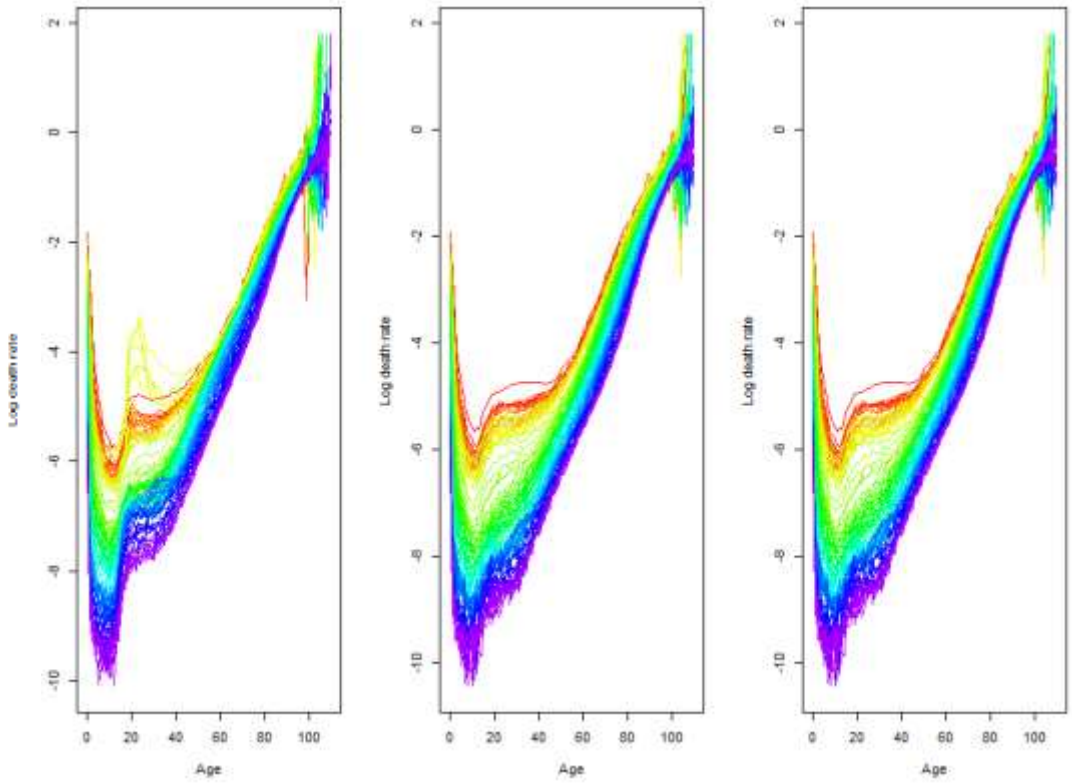


Figura 28: Tassi di mortalità logaritmici per la popolazione maschile (sx), femminile (centro) e totale (dx). I colori caldi rappresentano gli anni ad inizio periodo (1920), i colori freddi gli anni alla fine del periodo considerato (2019)

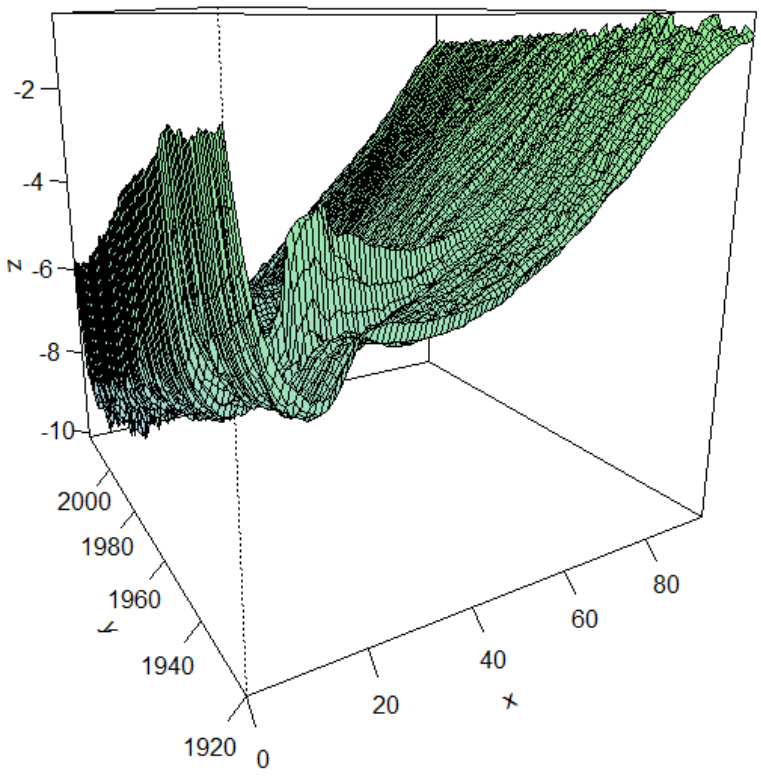


Figura 29: Rappresentazione tridimensionale dei tassi di mortalità in scala logaritmica osservati per la popolazione maschile italiana

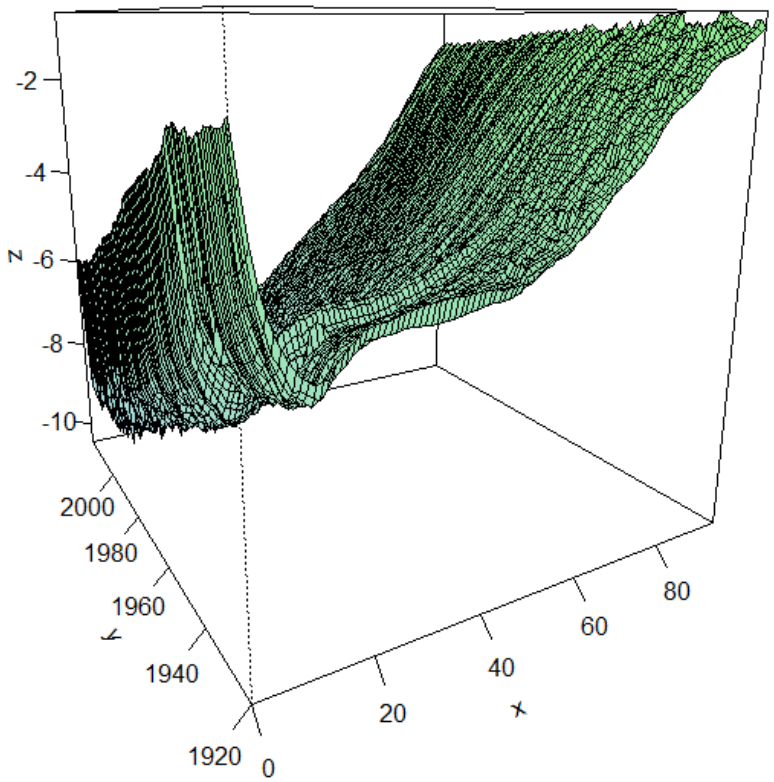


Figura 30: Rappresentazione tridimensionale dei tassi di mortalità in scala logaritmica osservati per la popolazione femminile italiana

Anche qui si forniscono alcune osservazioni:

- In primo luogo, è possibile osservare la diminuzione dei tassi di mortalità negli anni, come spostamento tra il 1920 e il 2019.
- Si può poi notare l'esperienza nella mortalità infantile e la sua diminuzione nel corso del secolo, come si è analizzato in precedenza.
- La gobba della mortalità in età giovane adulta, specialmente tra i 18 e i 25 anni, che tende a rimanere costantemente osservabile per la popolazione maschile anche in età recente. Tale effetto è dovuto ai numerosi casi di morti accidentali, purtroppo riscontrate in tali giovani età.
- Il relativo incremento della mortalità dall'età giovane-adulta fino alla vecchiaia.

5.2 Applicazione dei modelli

Nella presente sezione, si fornisce un'implementazione su dati italiani dei modelli Lee-Carter con una distribuzione Poisson delle morti (Brouhns et al. ,2002)[67] e del modello Cairns-Blake-Dowd, utilizzando la funzione di collegamento del tipo log[68].
Viene utilizzato i software R e RStudio, ed i principali pacchetti utilizzati per l'analisi sono i seguenti:

- StMoMo (Villegas et al., 2018)
- Demography (Hyndman et al., 2014)
- Life contingencies (Spedicato et al., 2012)
- Mortality Laws (Pascariu, 2022)

Per quanto concerne l'intervallo temporale utilizzato per l'applicazione dei modelli, viene considerato il periodo tra il 1920 e il 2019. È bene precisare che la successiva analisi del fattore temporale $\tilde{k}_t$ per il modello Lee-Carter e $\tilde{k}_t^{[1]}$ per il modello Cairns-Blake-Dowd rileva in realtà la presenza di break strutturale intorno al 1983. Il break strutturale è un evento capace di modificare irreversibilmente le caratteristiche della serie considerata. L'analisi viene comunque condotta sull' arco temporale 1920-2019

[67] Si veda il paragrafo 4.4.1
[68] Non viene utilizzata la funzione di collegamento di tipo logit a causa di errori nell'applicazione del modello su R. Ad ogni modo, il modello così definito può essere inteso come una variante del Cairns-Blake-Dowd e viene comunque applicato dallo stesso Villegas nella conferenza di presentazione dei modelli nel 2018, permettendo una certa omogeneità nel predittore considerato.

per entrambi i modelli, così da poter considerare l'andamento della mortalità nel corso di ben un secolo, sebbene numerosi sono i limiti che ne derivano; in effetti, si ragioni sul fatto che sussistono cause di morte diverse tra la prima parte del XX secolo (come malattie infettive) e la seconda (principalmente cancro e problemi cardiaci); inoltre, la qualità dei dati di mortalità risulta discutibile per i dati dal 1900 al 1950 (Pitacco et al., 2009). La selezione di un periodo ottimale di calibrazione risulta di fatto fondamentale per ottenere stime precisi dei tassi di morte; l'esercizio condotto in questa sede vuole essere una semplice applicazione pratica dei modelli GAPC, in cui la scelta di un periodo di stima più ottimale è secondaria. Si rimanda al lavoro di Booth et al. (2002) per l'analisi di procedure di selezione di un periodo di calibrazione ottimale per i modelli GAPC.

Per quanto concerne le età, viene considerato l'intervallo tra i 60 e i 95 anni per entrambi i modelli. Questo perché il modello Cairns-Blake-Dowd è progettato per un utilizzo su età avanzate (Maccheroni et. al, 2017), e di conseguenza, per poter compiere delle comparazioni coerenti tra modelli, viene considerato il medesimo range di età anche per il modello Lee-Carter.

5.2.1 Fitting

Nelle figure 31,32 e 33, si fornisce una rappresentazione dei parametri $\tilde{\alpha}_x, \tilde{\beta}_x$ *e* $\tilde{k}_t$ ricavati dall'applicazione del modello di Lee-Carter, per la popolazione italiana maschile, per quella femminile e per la popolazione totale, utilizzando i tassi di mortalità HMD.

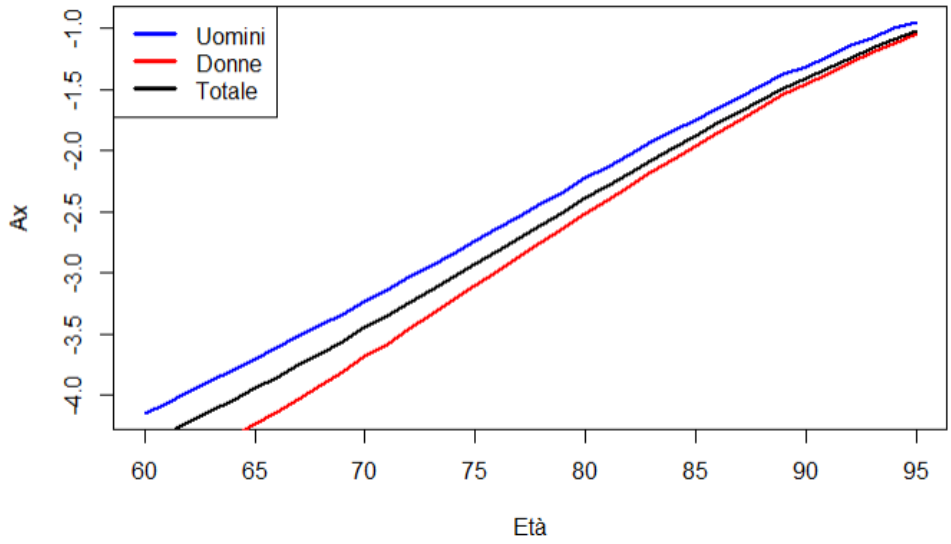


Figura 31: Rappresentazione dei parametri "α_x" per la popolazione maschile, per quella femminile e per l'intera popolazione, utilizzando il modello di Lee-Carter.

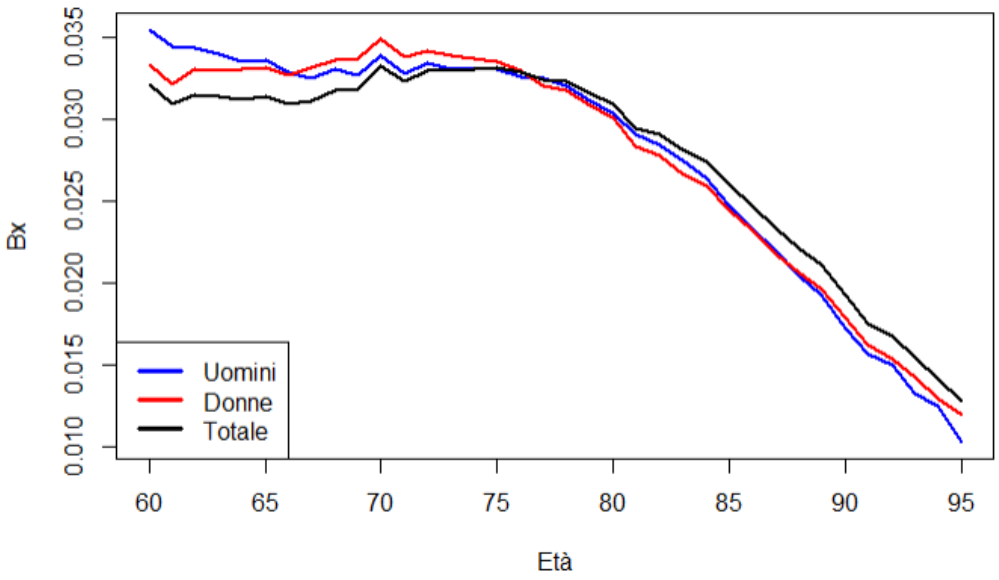


Figura 32: Rappresentazione dei parametri "β_x" per la popolazione maschile, per quella femminile e per l'intera popolazione, utilizzando il modello di Lee-Carter.

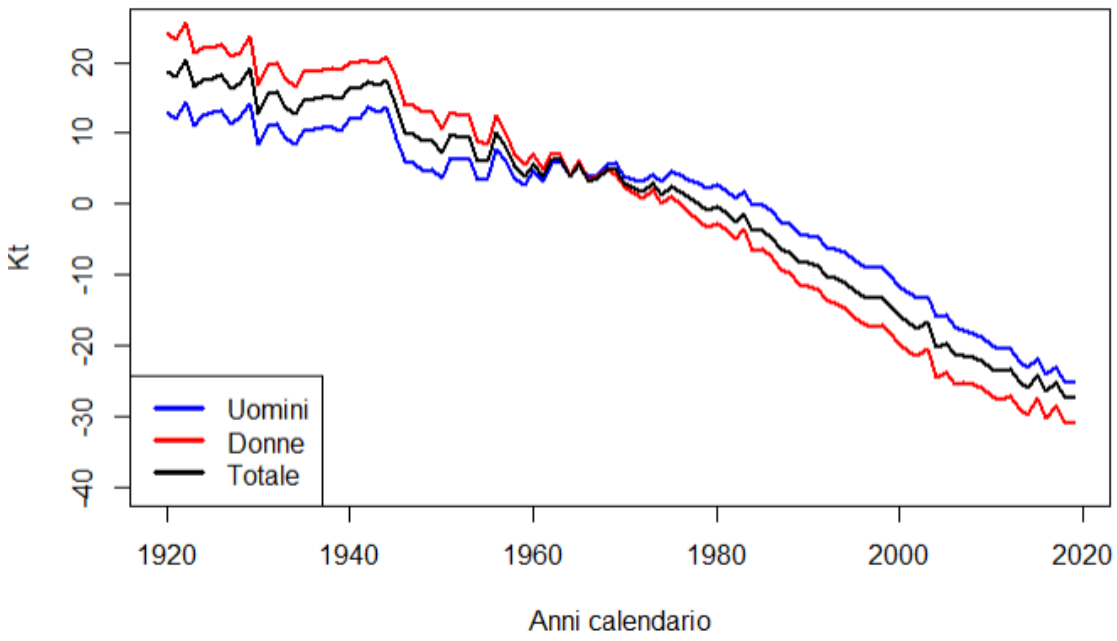


Figura 33: Rappresentazione dei parametri "k_t" per la popolazione maschile, per quella femminile e per l'intera popolazione, utilizzando il modello di Lee-Carter.a

Si noti come la figura 31 ricalca l'andamento dei tassi logaritmici di mortalità (Figura 28) per le età 60-95 anni: i parametri α_x descrivono infatti la tendenza media crescente del profilo di mortalità per età, con gli uomini che mostrano una mortalità regolarmente superiore rispetto alle donne.

La figura 32 mostra invece il pattern dei parametri β_x, che evidenziano la sensibilità del logaritmo della forza di mortalità, all'età x, rispetto a variazioni di k_t, con valori molto simili tanto per gli uomini che per le donne.

La figura 33 evidenzia l'indice temporale k_t, descrivente la tendenza della mortalità nel tempo. Tale fattore cattura allora l'incremento della longevità, dal momento che tale andamento è fortemente in decrescita.

Si può notare inoltre come la mortalità, dal 1920 al 2019, è diminuita molto più velocemente per le donne rispetto agli uomini.

Si procede quindi con l'applicazione del modello di Cairns-Blake-Dowd, e nelle figure 34 e 35, si presentano i parametri $\tilde{k}_t^{[1]}$ e $\tilde{k}_t^{[2]}$. I fattori moltiplicativi sono $\tilde{\beta}_x^{[1]}$, di fatto pari a 1 per tutte le età e $\tilde{\beta}_x^{[2]}$ (Tabella 3), che, a differenza del modello originale, è un vettore contenente la differenza tra l'età x e la media di x.

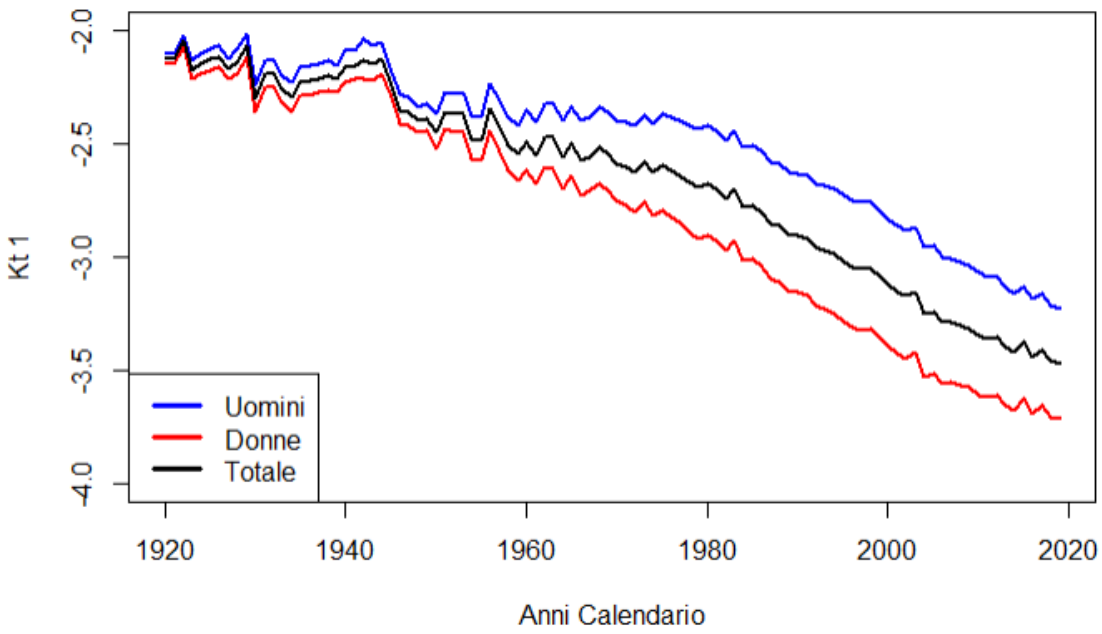


Figura 34: Rappresentazione dei parametri "$\tilde{k}_t^{[1]}$" per la popolazione maschile, per quella femminile e per l'intera popolazione, utilizzando il modello di Cairns-Blake-Dowd.

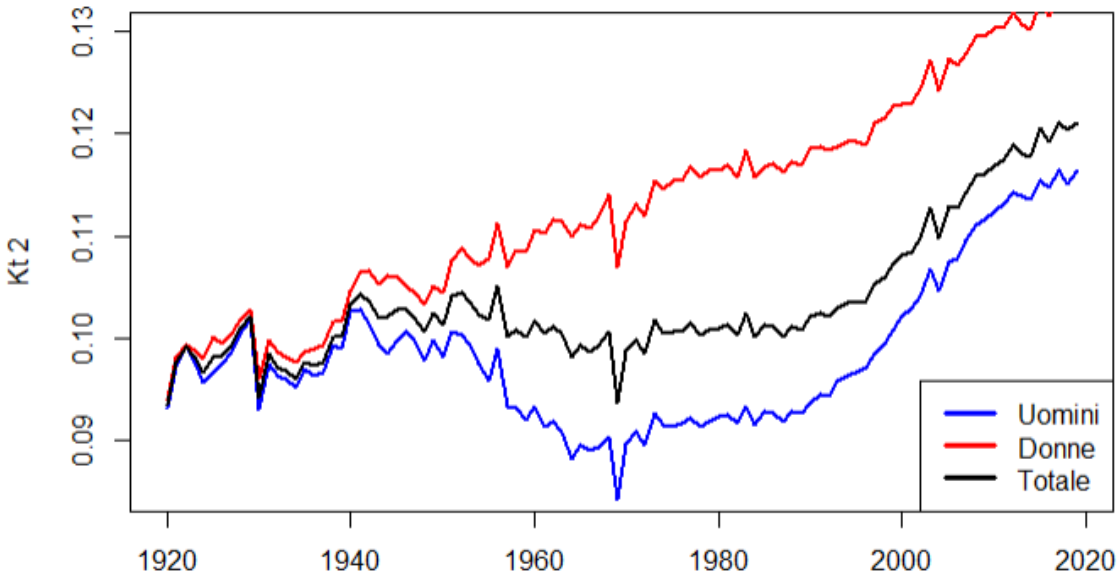


Figura 35: Rappresentazione dei parametri "$\tilde{k}_t^{[2]}$" per la popolazione maschile, per quella femminile e per l'intera popolazione, utilizzando il modello di Cairns-Blake-Dowd.

Età	Bx [2]	Età	Bx [2]
60	-17,5	78	0,5
61	-16,5	79	1,5
62	-15,5	80	2,5
63	-14,5	81	3,5
64	-13,5	82	4,5
65	-12,5	83	5,5
66	-11,5	84	6,5
67	-10,5	85	7,5
68	-9,5	86	8,5
69	-8,5	87	9,5
70	-7,5	88	10,5
71	-6,5	89	11,5
72	-5,5	90	12,5
73	-4,5	91	13,5
74	-3,5	92	14,5
75	-2,5	93	15,5
76	-1,5	94	16,5
77	-0,5	95	17,5

Tabella 3: Valori del parametro $\tilde{\beta}_x^{[2]}$, cioè $(x - \bar{x})$ nel modello di Cairns-Blake-Dowd.

Si noti che anche in questo modello $\tilde{k}_t^{[1]}$, ossia il parametro che descrive l'evidenza empirica di tassi di mortalità decrescenti nel tempo, risulta più pronunciato per le donne

rispetto agli uomini, ad evidenziare un maggiore decremento nella mortalità per le donne nel periodo considerato.

$\tilde{k}_t^{[2]}$ è, come evidenziato nel capitolo IV, il coefficiente angolare nella formula del modello e mostra le differenze nei cambiamenti della mortalità per età differenti.

Tale fattore risulta essere tendenzialmente crescente per entrambi i generi, almeno a partire da circa il 1970, ad indicare che la mortalità ad età molto avanzate (90-95 anni) è diminuita ad una velocità minore rispetto ad età meno avanzate (60-65 anni).

5.2.2 Analisi dei modelli

Bontà di adattamento

Una volta che i modelli sono stati applicati ai dati, si procede con il "back-testing" degli stessi, cioè si confrontano i valori previsti dai modelli con i dati reali, così da valutarne le performance nel periodo oggetto di analisi. Si osservino le figure 36,37,38 e 39, il cui oggetto è costituito dalle probabilità di morte come indicato in nota 65.

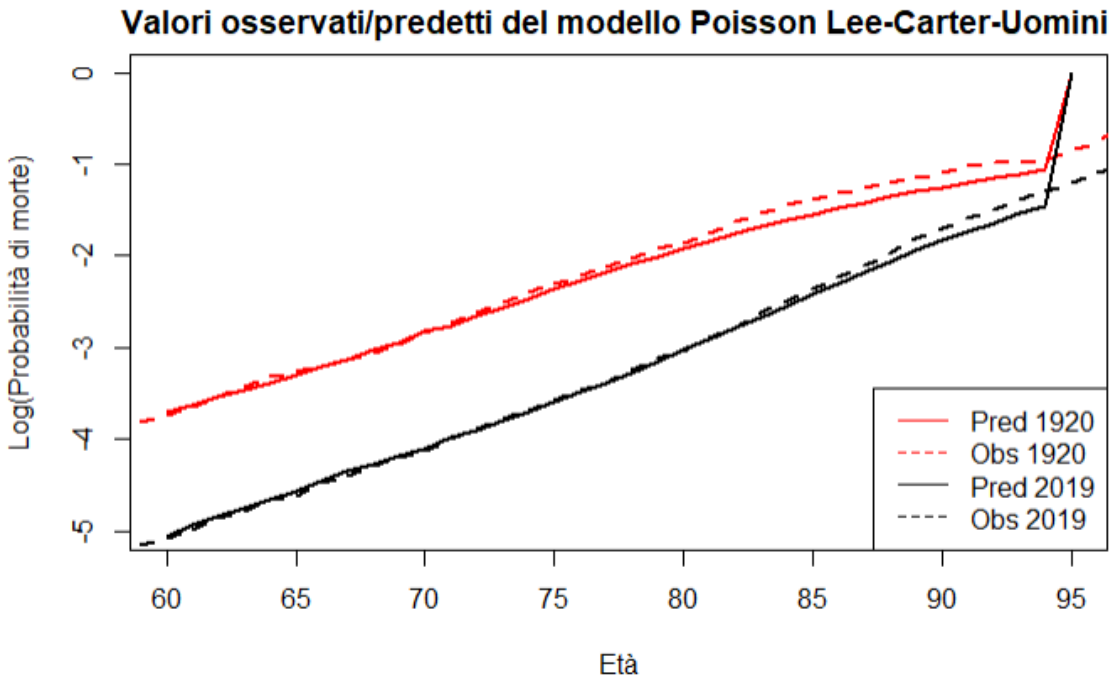


Figura 36: Confronto tra valori osservati e previsti dal modello di Lee-Carter dei logaritmi delle probabilità di morte per la popolazione maschile nel 1920 e nel 2019

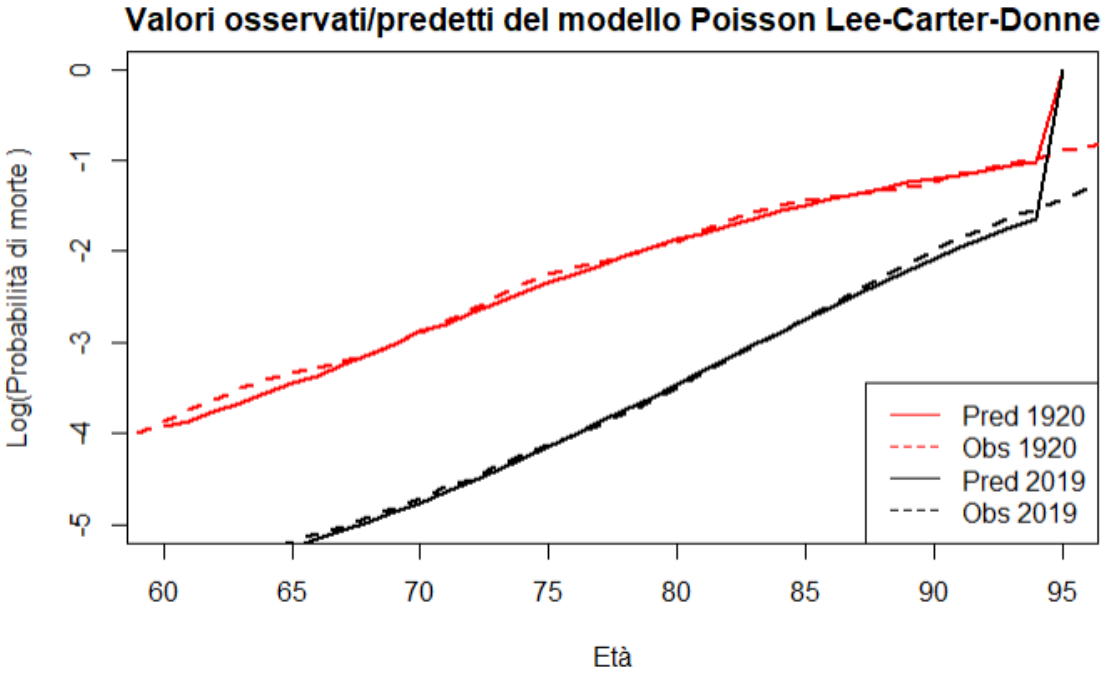


Figura 37: Confronto tra valori osservati e previsti dal modello di Lee-Carter dei logaritmi delle probabilità di morte per la popolazione maschile nel 1920 e nel 2019

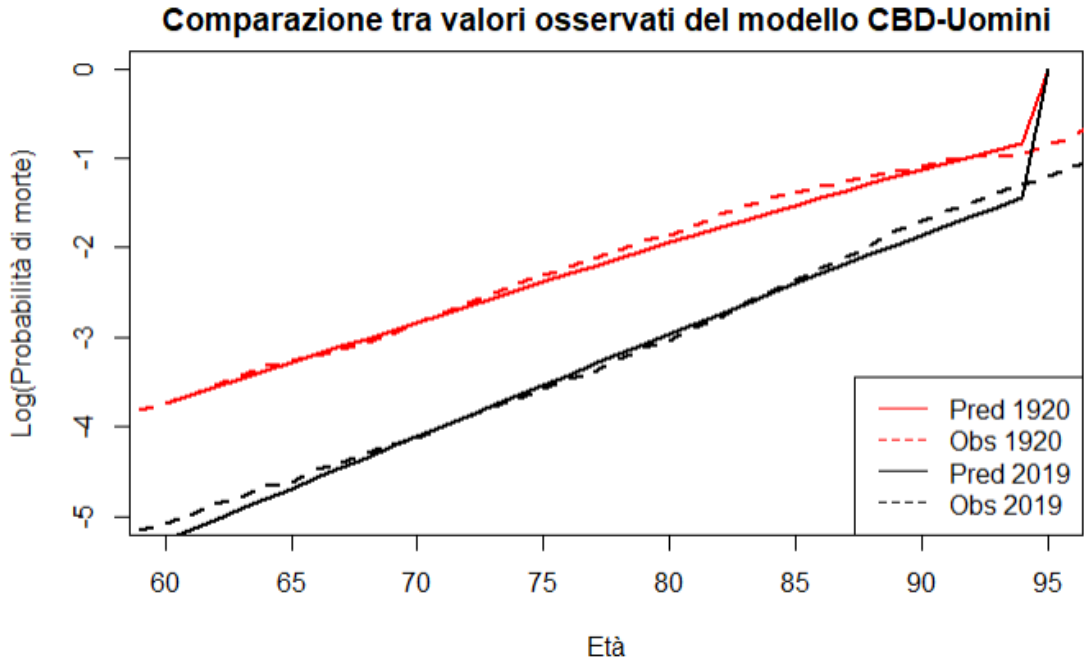


Figura 38: Confronto tra valori osservati e previsti dal modello di Cairns-Blake-Dowd dei logaritmi delle probabilità di morte per la popolazione maschile nel 1920 e nel 2019

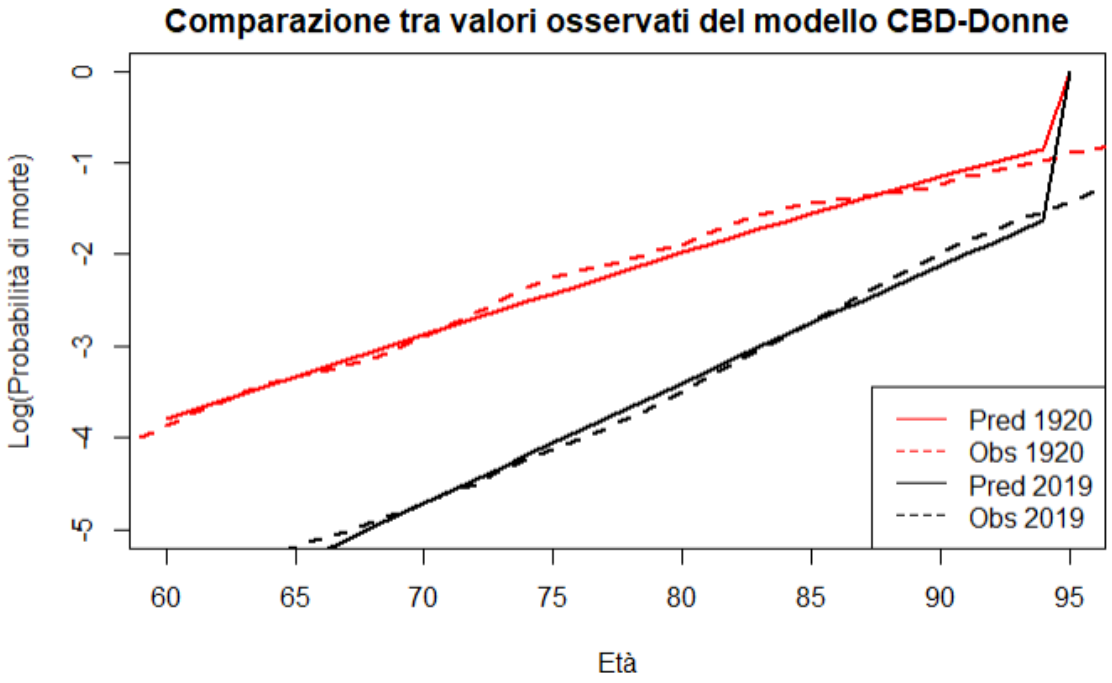


Figura 39: Confronto tra valori osservati e previsti dal modello di Cairns-Blake-Dowd dei logaritmi delle probabilità di morte per la popolazione femminile nel 1920 e nel 2019

Entrambi i modelli approssimano i dati reali delle probabilità di morte, così come scaricati dal HMD e convertiti, in maniera abbastanza soddisfacente.

La principale differenza sta nel fatto che, mentre il modello di Lee-Carter presenta un fattore (α_x) che descrive le tendenze per età della mortalità e quindi si adatta in misura migliore ai dati, il modello Cairns-Blake-Dowd è lineare in $\tilde{k}_t^{[2]}$ e tale effetto è abbastanza ben visibile nelle figure 38-39. Il modello CBD permette però, a differenza del LC, di considerare cambiamenti della mortalità per età e periodi differenti.

Per valutare più precisamente la bontà di adattamento dei modelli ai dati storici, viene fornita una rappresentazione di una sorta di coefficiente R^2 per età (non si può parlare di tale coefficiente in senso stretto poichè, come in precedenza definito, non si sta utilizzando modelli di regressione propriamente detti, quanto delle specie di algoritmi).[69]

Tale coefficiente viene calcolato come:

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2} = \frac{\text{Var}\,(Y) - \text{Var}\,(Y - \hat{Y})}{\text{Var}\,(Y)}$$

[69] Draper e Smith (2014) forniscono una forma di R^2 più adatta ad un contesto di questo tipo, ma in questa analisi viene semplicemente calcolato il valore nella sua forma tradizionale.

(103)

dove Y rappresenta la probabilità di morte.

In particolare, $\hat{Y}_i$ rappresenta il valore della probabilità di morte così come prevista dal modello, mentre Y_i è il valore osservato. Tale coefficiente esprime allora la frazione della varianza totale della variabile dipendente che può essere spiegata dalle variabili indipendenti (in questo caso tutti i fattori presenti nella parte destra delle equazioni nei modelli Lee-Carter e Cairns-Blake-Dowd).

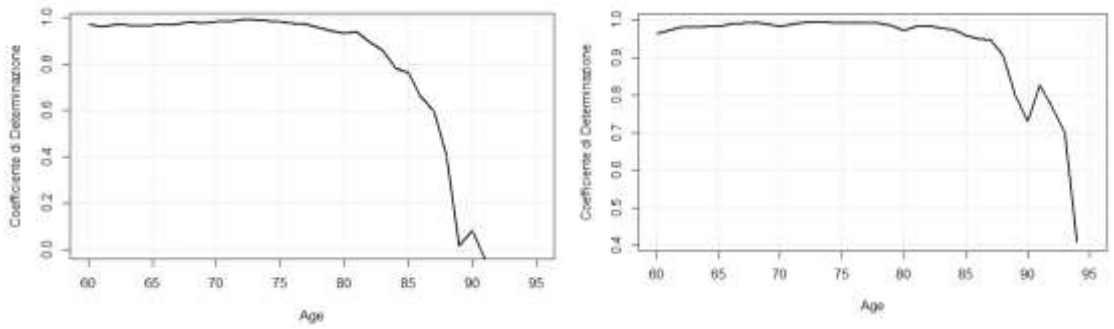


Figura 40: Coefficiente di determinazione per il modello di Lee-Carter per uomini (sx) e donne (dx)

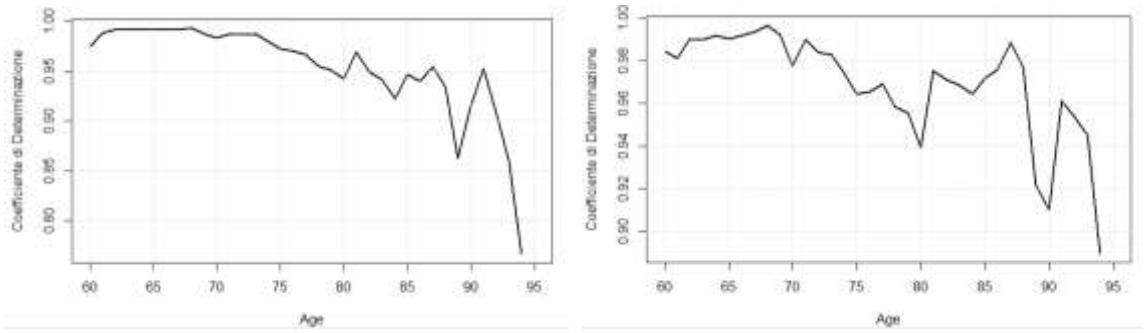


Figura 41: Coefficiente di determinazione per il modello di Cairns-Blake-Dowd per uomini (sx) e donne (dx)

Il modello di Lee-Carter funziona in maniera ottimale (con R^2 superiore al 90%) nel caso della popolazione maschile fino agli 80 anni, così come nel caso della popolazione femminile, in questo caso fino a circa gli 87-88 anni.

Il modello di Cairns-Blake-Dowd riesce a adattarsi ai dati in maniera piuttosto efficace addirittura fino ai 90 anni sia per gli uomini che per le donne, e ciò testimonia la sua

particolare utilità quando si tratta di valutare i tassi di mortalità in contesti di età molto avanzate.

I valori nelle figure 40-41 mancanti (sopra i 90 anni) sono probabilmente effetto di una gran variabilità nei tassi di morte, originata dalla scarsa presenza di dati per età estremamente avanzate, che impedisce ai modelli di funzionare correttamente e determina valori negativi/distorti del coefficiente R^2, non coerenti con la ratio dello stesso, per definizione compreso tra 0 e 1.

Residui

Si prosegue ora con l'analisi dei residui dei modelli, la cui ispezione risulta fondamentale. Infatti, le performance di un modello sono valutate in termini di aleatorietà dei residui stessi, e una mancanza di aleatorietà potrebbe indicare la presenza di pattern regolari non catturate, cioè strutture età-tempo.

Tali elementi indicherebbero allora l'incapacità del modello di descrivere i dati in maniera accurata. Poiché entrambi i modelli presentano una componente aleatoria di tipo Poisson, la devianza residuale viene calcolata nel seguente modo (Villegas et al., 2018):

$$r_{xt} = \text{sign}\left(d_{xt} - \hat{d}_{xt}\right)\sqrt{\frac{\text{dev}\,(x,t)}{\hat{\phi}}}, \hat{\phi} = \frac{D\left(d_{xt}, \hat{d}_{xt}\right)}{K - \nu} \tag{104}$$

dove

$$\text{dev}\,(x,t) = 2\left[d_{xt}\log\left(\frac{d_{xt}}{\hat{d}_{xt}}\right) - \left(d_{xt} - \hat{d}_{xt}\right)\right] \tag{105}$$

e

$$D\left(d_{xt}, \hat{d}_{xt}\right) = \sum_x \sum_t \omega_{xt}\text{dev}\,(x,t) \tag{106}$$

è la devianza totale del modello, $K = \sum_x \sum_t \omega_{xt}$ è il numero di osservazioni nei dati e ν rappresenta l'effettivo numero di parametri del modello.

Le figure da 42 a 47 mostrano delle rappresentazioni grafiche dei residui per il modello Lee-Carter e per il modello Cairns-Blake-Dowd.

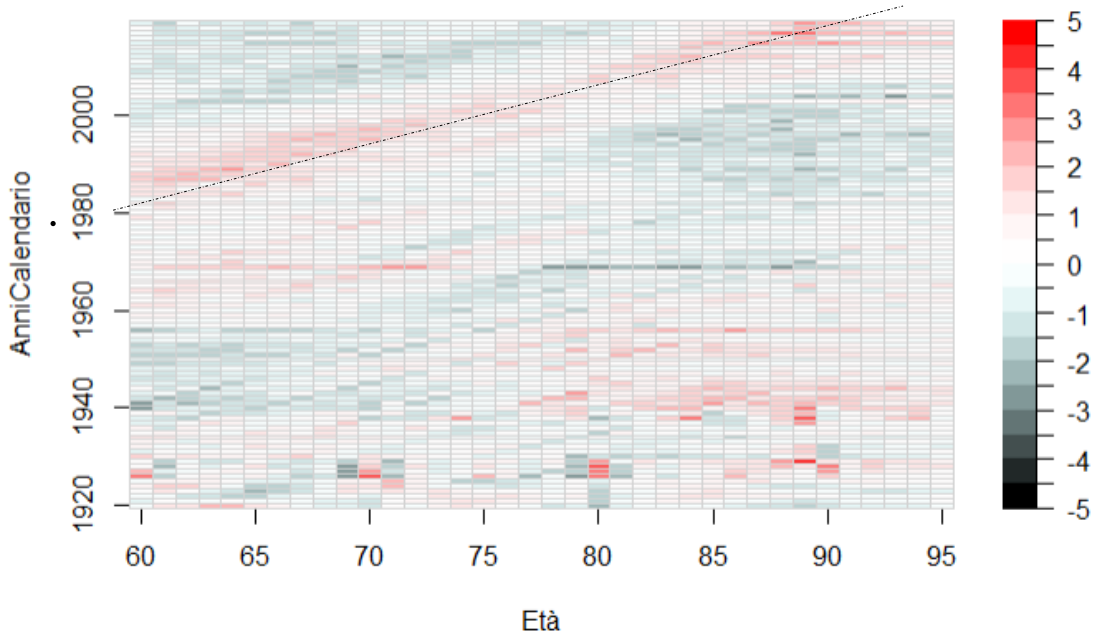


Figura 42: Residui del modello Lee-Carter per la popolazione maschile italiana.
La retta tratteggiata nella figura indica la presenza di un effetto-coorte.

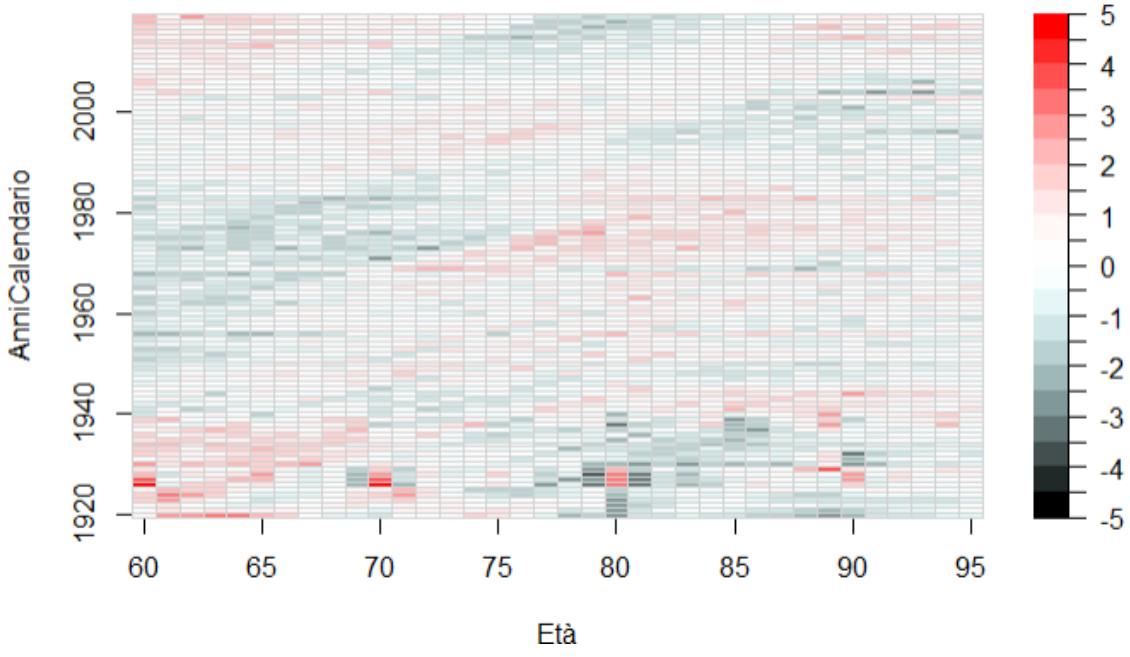


Figura 43: Residui del modello Lee-Carter per la popolazione femminile italiana

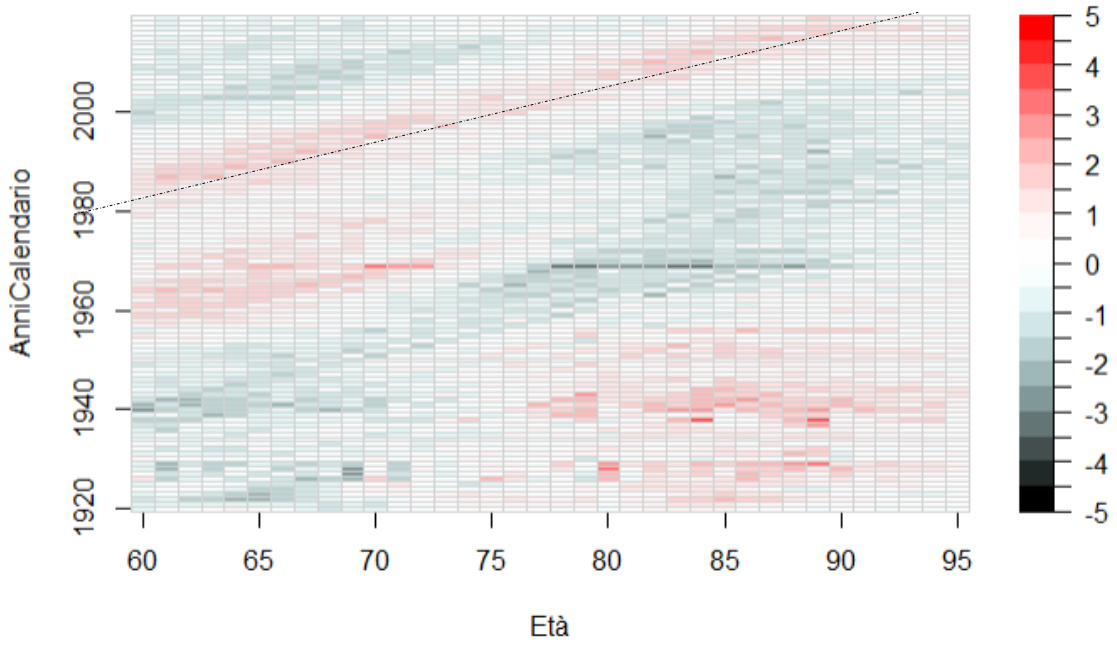


Figura 44: Residui del modello Lee-Carter per l'intera popolazione italiana

La retta tratteggiata nella figura indica la presenza di un effetto-coorte.

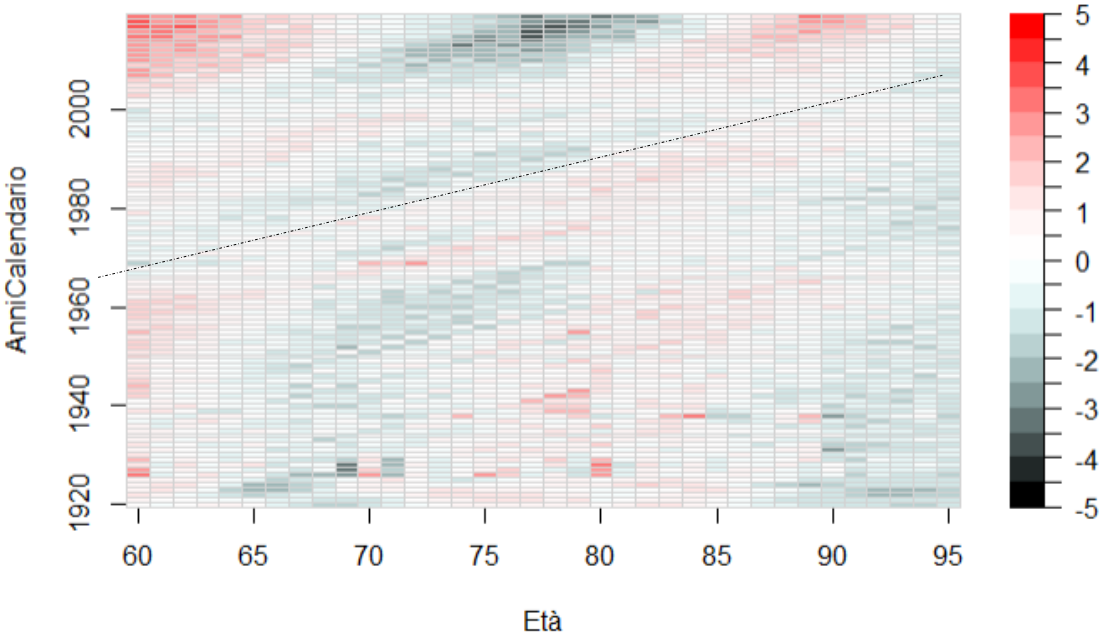


Figura 45: Residui del modello Cairns-Blake-Dowd per la popolazione maschile italiana

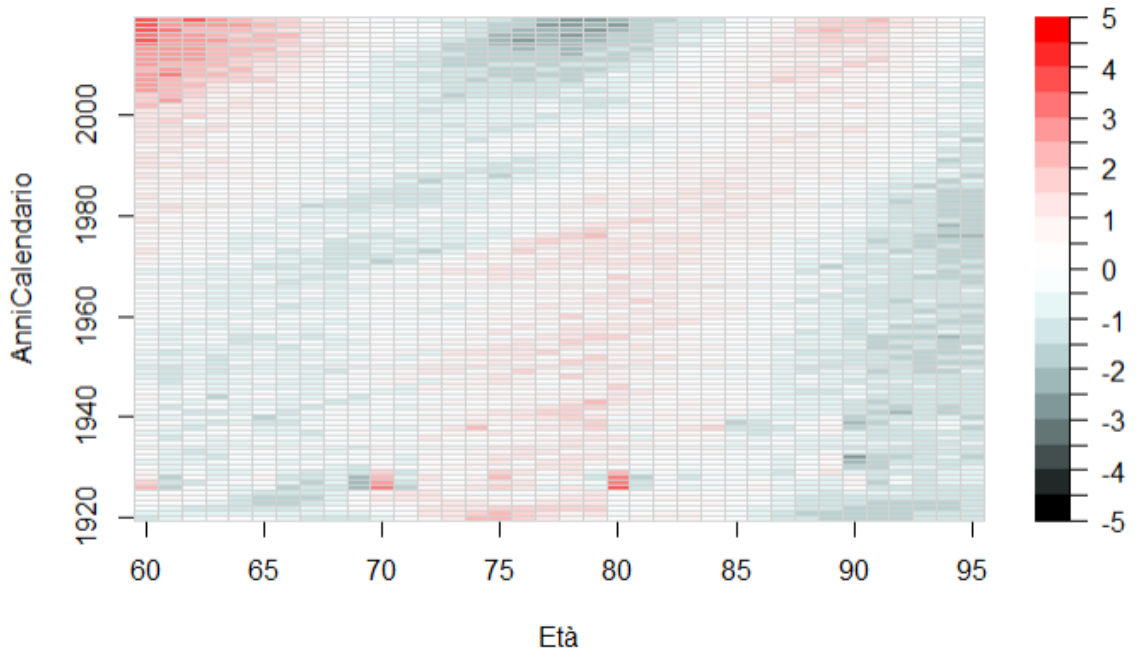


Figura 46: Residui del modello Cairns-Blake-Dowd per la popolazione femminile italiana

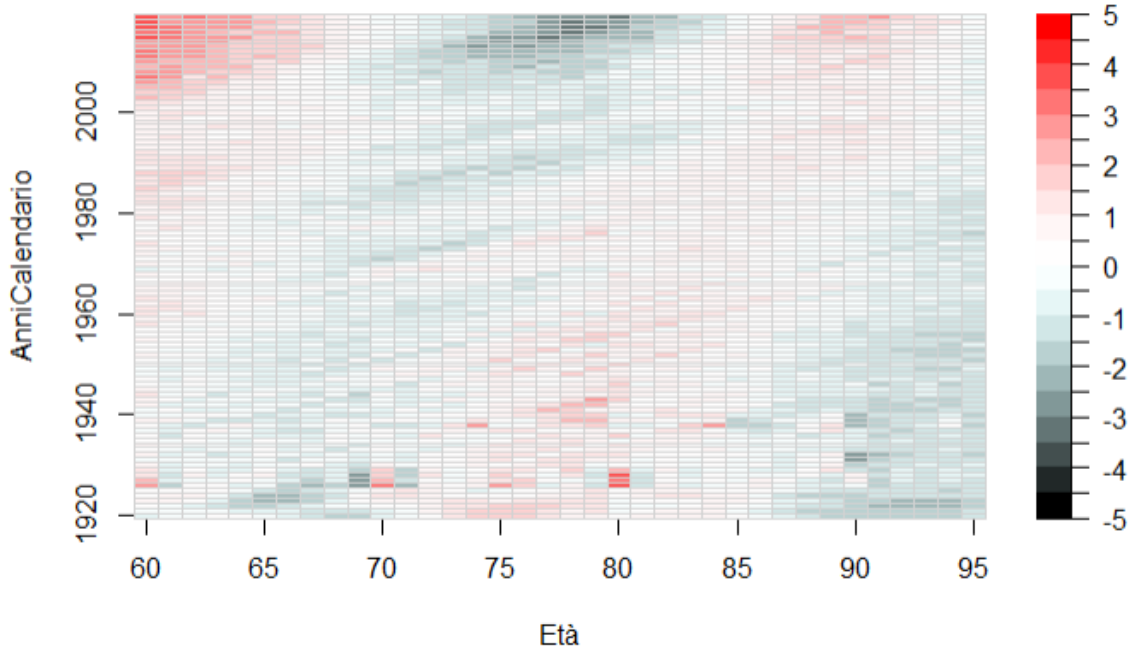


Figura 47: Residui del modello Cairns-Blake-Dowd per la popolazione italiana totale

L’analisi delle figure 42 e 44 per il modello Lee-Carter mostra la presenza di significativi effetti coorte, in particolare per la generazione di maschi italiani nata intorno al 1920, similmente a quanto Willets (2004) aveva osservato per la popolazione inglese e gallese. Tale evidenza empirica viene confermata anche dall’analisi dei residui per anno di nascita.

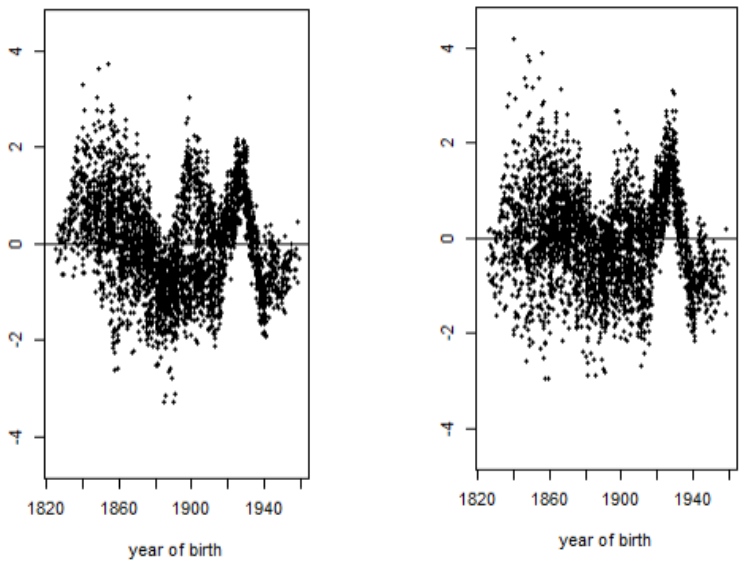


Figura 48: Residui LC della popolazione maschile (sx) e totale (dx) per anno di nascita

Si noti come i residui siano dispersi in maniera piuttosto casuale attorno allo 0 per quasi tutte le corti, fatta eccezione per quella nata a cavallo degli anni ’20, per cui si possono osservare residui fortemente positivi.

I residui per il modello Cairns-Blake-Dowd tendono ad essere invece essere “sparpagliati” in modo abbastanza casuale, anche se è comunque possibile notare un leggero effetto coorte sempre la generazione nata intorno al 1920 e altre deboli strutture per anno di coorte. Si possono inoltre osservare residui fortemente positivi e negativi dopo l’anno 2000, ad indicare che forse il modello non è il più adatto per descrivere la mortalità della popolazione italiana in anni recenti.

Questi elementi ci permettono di confermare come entrambi i modelli Lee-Carter e Cairns-Blake-Dowd siano incapaci di evidenziare la presenza di effetti coorte, essendo privi di parametri che ne consentano di apprezzare l’entità.

A puro scopo comparativo, viene proposto il grafico dei residui per la popolazione totale italiana derivanti dal modello Age-Period-Cohort (APC)[70]. Strutture "diagonali" che definiscono effetti coorte sono completamente assenti.

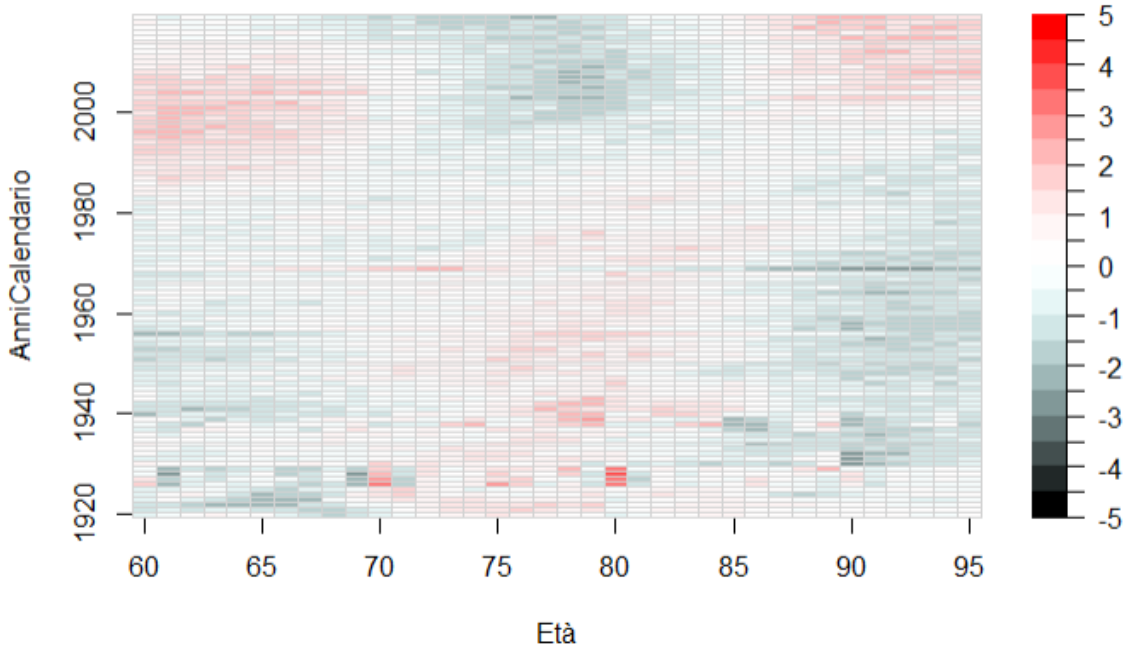


Figura 49: Residui del modello APC per la popolazione italiana totale

5.3 Previsioni della mortalità

Tanto il modello di Lee-Carter che il modello di Cairns-Blake-Dowd considerano i fattori temporali (quindi k_t per il modello LC e $k_t^{[1]}, k_t^{[2]}$per il CBD) come processi stocastici[71]. L'utilizzo della tecnica Box-Jenkins (1976) permette di modellizzare ed effettuare proiezioni di tali fattori, così da ottenere tassi di mortalità specifici per età in un periodo futuro specificato.

[70] Si ricordi che tale modello presenta il fattore γ_{t-x} che cattura l'effetto coorte.
[71] Un processo stocastico può essere definito come un insieme di variabili casuali, indicizzate dal parametro t (tempo). Una serie storica è invece una parte finita di una realizzazione di un processo stocastico, cioè una delle sue infinite traiettorie possibili.

5.3.1 Modello di Lee-Carter

Le dinamiche di k_t possono essere trattate come la realizzazione di un processo stocastico, modellato utilizzando la rappresentazione ARIMA[72] (Autoregressive Integrated Moving Average). Una formulazione analitica di un processo ARIMA, mediante l'utilizzo dei polinomi dei ritardi L[73] , è la seguente:

$$\left(1 - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k L^k\right)(1-L)^d X_t = \left(1 + \sum_{k=1}^{q} \beta_k L^k\right)\varepsilon_t \tag{107}$$

La procedura di Box-Jenkins permette di inferire il modello statistico (AR, MA o ARMA, ossia il processo che presenta come regressori tanto componenti a media mobile che autoregressivi, o più in generale un ARIMA(p,d,q)) che permette di approssimare meglio il "data generating process" del processo stocastico, cioè il modello reale da cui i dati vengono originati, che non è di fatto conoscibile con assoluta precisione, ma può essere solamente stimato.

Utilizzando la rappresentazione più generale ARIMA (p,d,q), è necessario in prima battuta identificarne gli ordini, e cioè p-l'ordine della componente autoregressiva, d-l'ordine di differenziazione e q- l'ordine della componente a media mobile.
Le procedure di analisi delle serie storiche richiedono però che le variabili studiate siano stazionarie. Il processo k_t può essere definito debolmente stazionario se la sua media e la sua varianza sono costanti nel tempo, e la covarianza dipende solo dalla lunghezza dell'intervallo tra le due variabili casuali considerate. In pratica,

---

[72] L'analisi di un processo ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average) può partire dall'analisi delle singole componenti che lo compongono, ed in particolare:

- "Autoregressive" indica un processo di tipo AR, autoregressivo. Rappresenta un modello in cui una variabile viene spiegata dal proprio passato (attraverso ritardi). Un modello generale in cui vengono considerati p ritardi è il seguente:
$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \cdots + \beta_p Y_{t-p} + \epsilon_t$$
- "Integrated" indica che la serie storica è appunta integrata, cioè differenziata. La differenziazione è uno strumento utilizzato per poter trasformare una serie storica da non stazionaria a stazionaria. In sostanza, se Y_t è non stazionaria, ΔY_t è stazionaria o integrata di primo ordine.
- "Moving Average" si riferisce ad un processo MA, o a media mobile. In tale modello, l'osservazione presente dipende solamente dagli shock passati (fino a q). In pratica,
$$y_t = \epsilon_t \quad + \beta_1 \epsilon_{t-1} + \beta_2 \epsilon_{t-2} + \cdots + \beta_q \epsilon_{t-q}$$
dove ϵ_t rappresenta un processo white noise (rumore bianco), caratterizzato da media nulla e varianza costante.

[73] Si ricordi che $Ly_t = y_{t-1}$.

- $E[k_t] = \mu, \forall t \in t_1, \dots, t_n$
- $\text{Var}\ (y_t) = \sigma^2 < \infty, \forall t$
- $\text{Cov}\ (y_t, y_{t-k}) = \gamma_k, \forall t$ e $\forall k$

Esistono due principali cause di non stazionarietà in una serie storica, ed in particolare:

- La presenza di un trend deterministico, con una componente tendenziale non aleatoria, che può essere rimossa mediante opportune procedure;
- La presenza di un trend stocastico, in cui la componente tendenziale varia in maniera casuale (vi è cioè la presenza di una radice unitaria). Il processo può essere reso stazionario applicando le differenze di primo ordine.

Analizzando la Figura 33, si può osservare la tendenza decrescente dei k_t nel tempo, che si connota per una certa aleatorietà, il che ci porta nella direzione della non stazionarietà. Per maggiori informazioni sulla tipologia di processo, può essere utile guardare alle funzioni di autocorrelazione (ACF[74]) e di autocorrelazione parziale (PACF[75]). Si prendono in considerazione le stime di k_t per la popolazione italiana totale.

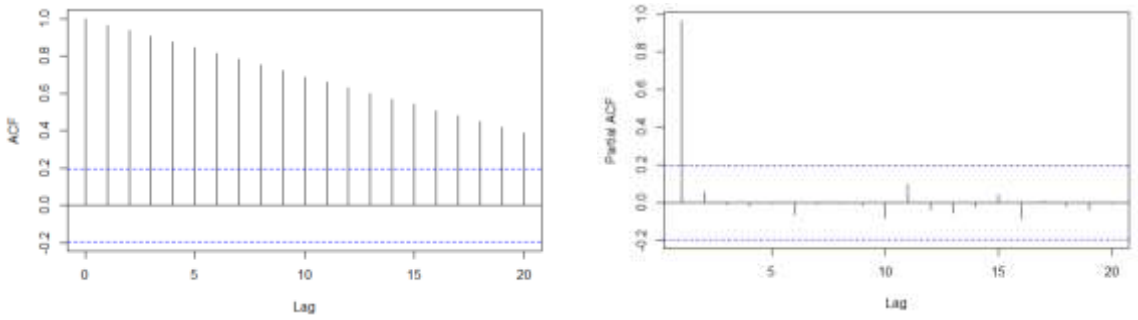


Figura 50: Funzione di autocorrelazione (sx) e di autocorrelazione parziale (dx) per la serie storica dei k_t della popolazione italiana totale.

[74] Se il processo è stazionario in forma debole, la funzione di autocorrelazione può essere calcolata come:

$$\rho_k = \frac{\text{Cov}(y_t, y_{t-k})}{\sqrt{\text{Var}\ (y_t)\text{Var}\ (y_{t-k})}}$$

Tale rapporto misura una sorta di dipendenza tra una variabile e la stessa variabile ritardata di un certo lag. Chiaramente, non essendo noto il processo generatore dei dati a monte, viene utilizzata la funzione di autocorrelazione empirica: al variare di k, le autocorrelazioni empiriche descrivono il cosiddetto correlogramma.

[75] La funzione di autocorrelazione parziale invece misura la correlazione tra y_t e y_{t-k} al netto della dipendenza con variabili intermedie $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-k+1}$.

La funzione di autocorrelazione nella figura 50 tende a decrescere molto lentamente nel tempo, mentre la funzione di autocorrelazione parziale ha valore pari a 1 al primo lag e zero in quelli successivi. Per tali ragioni, è possibile concludere che il processo sia un random walk, il modello più semplice tra quelli che generano un trend stocastico.

In effetti, un semplice test ADF[76] produce un p-value pari a 0.6987, per cui l'ipotesi (nulla) di non stazionarietà della serie viene accettata. La non stazionarietà vale anche per le serie storiche dei k_t della popolazione maschile e femminile.

In pratica le dinamiche dei k_t stimati possono essere spiegate attraverso un random walk con drift, essendo quest'ultimo particolarmente significativo[77]:

$$k_t = k_{t-1} + d + e_t \tag{108}$$

dove d è il parametro di drift e gli e_t si assumono essere indipendenti e normalmente distribuiti con media 0 e varianza σ^2.

Si procede analizzando la ACF e la PACF della serie alle differenze prime.

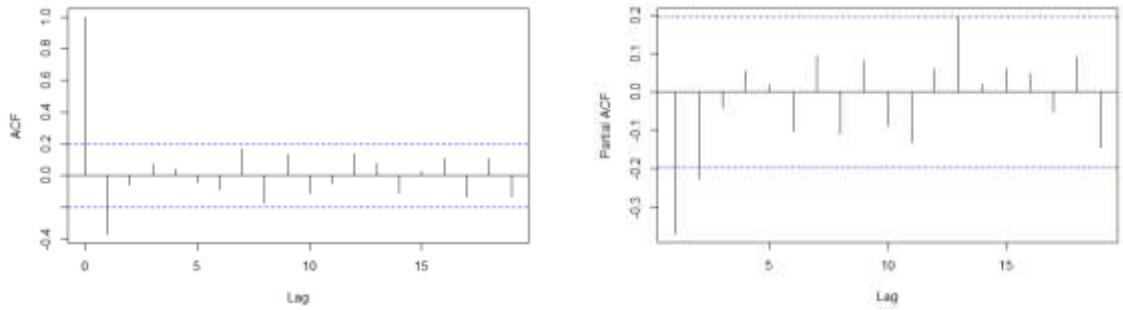


Figura 51: Funzione di autocorrelazione (sx) e autocorrelazione parziale per la serie storica dei k_t differenziata della popolazione italiana totale.

È noto che la funzione di autocorrelazione parziale di un processo stocastico MA(q) tende a zero al crescere di k, mentre la funzione di autocorrelazione va a zero prima della PACF per k > q. Nel nostro caso, l'autocorrelazione risulta significativa (e cioè "esce" dalle bande di Bartlett, le linee tratteggiate in blu nel grafico) per i primi due

[76] Il test Augmented-Dickey-Fuller è tra i più noti ed utilizzati test per l'analisi della non stazionarietà di una serie storica.

[77] L'analisi porta infatti all'eliminazione del trend, essendo non significativo in nessuno dei tre casi (maschile, femminile e totale) con un livello di significatività dell'1%, a differenza del drift che rimane sempre significativo.

ritardi, portando a pensare ad un processo MA (2). Essendo in realtà l'AIC[78] del processo k_t come ARIMA (0,1,2) più alto dell'AIC del processo k_t come ARIMA (0,1,1), si preferisce quest'ultimo, dotato di maggiore semplicità. Analisi successive condotte sulle serie dei k_t relativi alla popolazione italiana maschile e femminile permettono di concludere che in entrambi i casi trattasi di un processo ARIMA (0,1,1).

La previsione puntuale dell'indice temporale k_t per h passi in avanti è allora calcolabile (Pitacco et. al. , 2009) come:

$$\dot{k}_{t_n+h} = \mathrm{E}\left(k_{t_n+h} \mid k_{t_1}, \dots, k_{t_n}\right) = k_{t_n} + hd \tag{109}$$

in pratica una linea retta con pendenza d e intercetta k_{t_n}.Quest'ultimo parametro deve essere controllato attentamente per evitare distorsioni nelle future previsioni di mortalità.

La varianza condizionata della previsione risulta essere:

$$\mathrm{Var}\left(k_{t_n+h} \mid k_{t_1}, \dots, k_{t_n}\right) = h\sigma^2 \tag{110}$$

Quindi all'aumentare del numero di passi in avanti (cioè il numero di anni) nella previsione, la precisione della stessa diminuisce, dato che gli errori standard aumentano di un fattore pari a $\sqrt{h}$.

Infine, possono essere ottenuti valori proiettati del predittore, cioè nel nostro caso:

$$\dot{\eta}_{x,t_n+s} = \log\left(\dot{\mu}_{x,t_n+s}\right) = \alpha_x + \sum_{i=1}^{N} \beta_x^{(i)} \dot{\kappa}_{t_n+s}^{(i)} \tag{111}$$

con N = 1 nel Lee-Carter e N = 2 nel modello di Cairns-Blake-Dowd (in questo caso senza considerare α_x).

[78] L' "Akaike Information Criterion" è una misura statistica per la valutazione comparativa tra modelli in serie storica. Fornisce una stima dell'informazione persa quando un modello specifico viene utilizzato per rappresentare il processo generatore dei dati. Quando si comparano due o più modelli alternativi, quello con l'AIC minore è quello preferibile, in quanto garantisce equilibrio tra bontà di adattamento e complessità. La sua formulazione è la seguente:

$$\mathrm{AIC} = -2 \cdot \frac{\ell}{n} + 2 \cdot \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{n}}$$

n è il numero di dati o osservazioni, k è il numero di parametri stimati (regressori + intercetta) e ℓ è la log verosimiglianza del modello.

Dalla formula (108) si può ricavare che il processo $k_t - k_{t-1}$ è stazionario, con valore atteso pari a d e varianza σ^2. I valori campionari della media e della varianza sono ricavabili dalle stime di massima verosimiglianza o OLS, e cioè:

$$\hat{d} = \frac{1}{t_n - t_1} \sum_{t=t_2}^{t_n} \left(\hat{k}_t - \hat{k}_{t-1}\right) = \frac{\hat{k}_{t_n} - \hat{k}_{t_1}}{t_n - t_1} \tag{112}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{t_n - t_1} \sum_{t=t_2}^{t_n} \left(\hat{k}_t - \hat{k}_{t-1} - \hat{d}\right)^2 \tag{113}$$

Nella Tabella 4 vengono proposte le stime dei suddetti parametri.

	Popolazione totale	Popolazione maschile	Popolazione femminile
$\hat{d}$	-0,64361	-0,50856	0,793835
σ^2	1,525	1,468	1,564

Tabella 4: Stime dei valori del drift e della varianza residuale per la popolazione italiana totale, maschile e femminile, secondo il modello LC applicato per età 60-95 e anni 1920-2019.

Secondo Pitacco et. al (2009), in linea di massima, il modello random walk con drift risulta essere il più adeguato a effettuare previsioni, dal momento che modelli più complessi (come nell'esempio in precedenza, con un ARIMA (0,1,1/2)) producono risultati molto simili a quelli di un ARIMA (0,1,0).

La procedura seguita nel presente elaborato prevede l'utilizzo del modello ARIMA che risulta migliore secondo il criterio AIC.
Nelle figure dalla 52 alla 55, si presentano i risultati ottenuti calcolando previsioni con h = 100, quindi per 100 anni in avanti fino al 2119, con il fattore temporale descritto sulla base di un modello ARIMA (0,1,1) con drift per la popolazione italiana maschile femminile e totale, utilizzando il modello di Lee-Carter.

Un orizzonte temporale così esteso determina chiaramente ampi errori di previsione, come si è visto in (110), ma tale esercizio può essere comunque utile per determinare fino a quale punto si spingerebbero i miglioramenti nella mortalità se i tassi di mortalità seguissero un modello come il Lee-Carter. Ovviamente, come già si è detto all'inizio del capitolo IV, tale è il limite dei modelli in serie storica, cioè l'incapacità di considerare fattori esterni (come miglioramenti medici) come variabili esogene del modello: il futuro sarà sempre funzione dei dati passati.

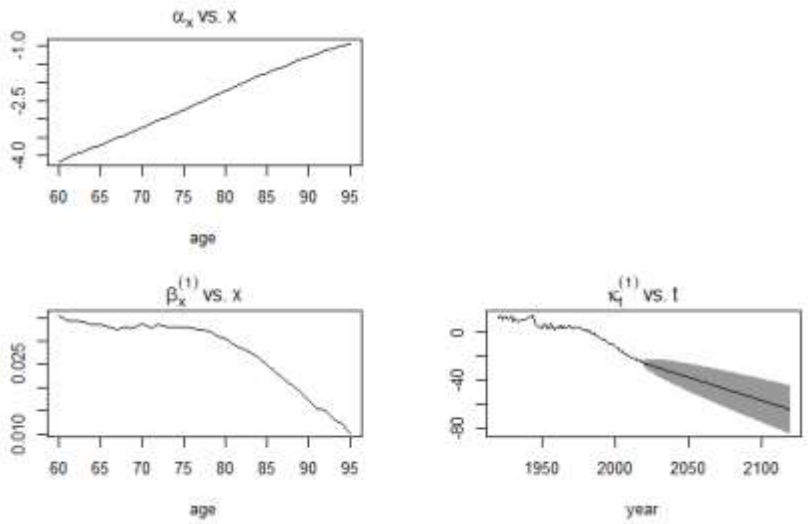


Figura 52: Valori di α_x, β_xe k_t per la popolazione italiana maschile. Il grafico dei k_t, presenta intervalli di confidenza al 95%.

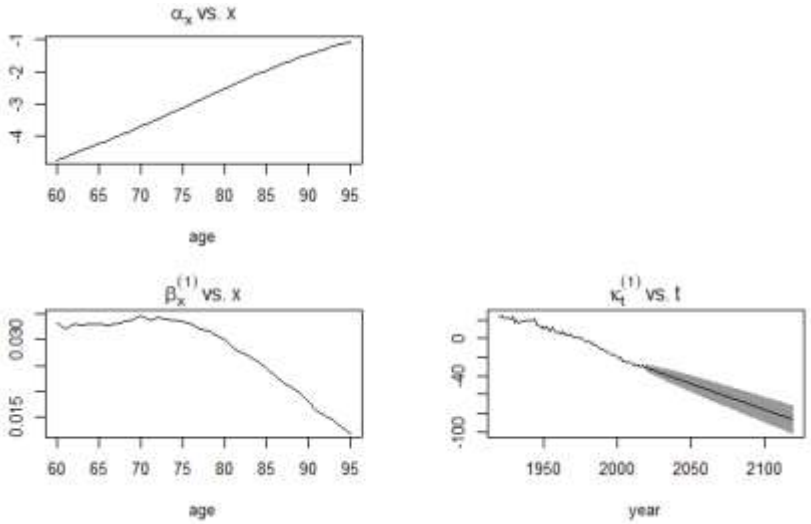


Figura 53: Valori di α_x, β_xe k_t per la popolazione italiana femminile. Il grafico dei k_t, presenta intervalli di confidenza al 95%.

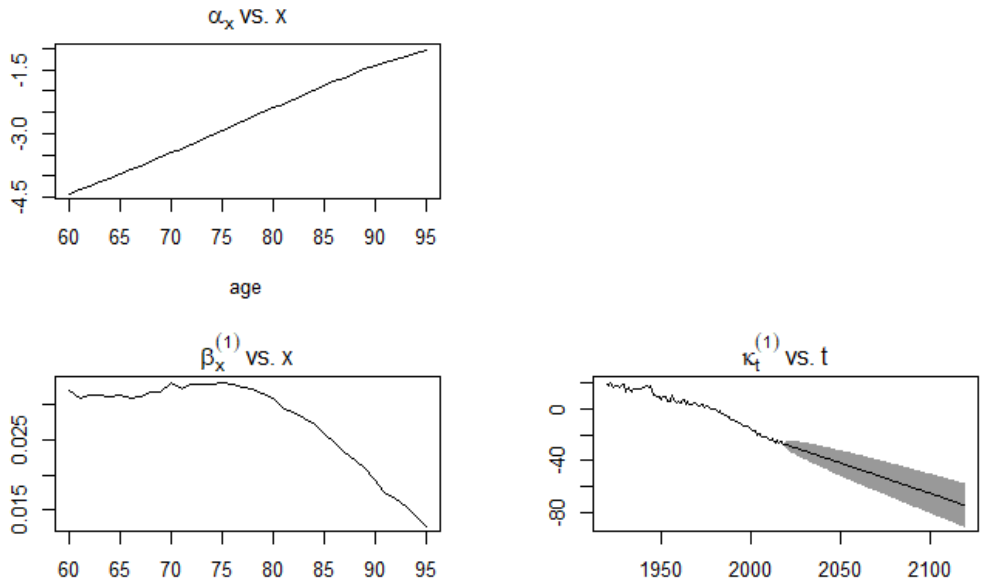


Figura 54: Valori di α_x, β_xe k_t per la popolazione italiana totale. Il grafico dei k_t, presenta intervalli di confidenza al 95%.

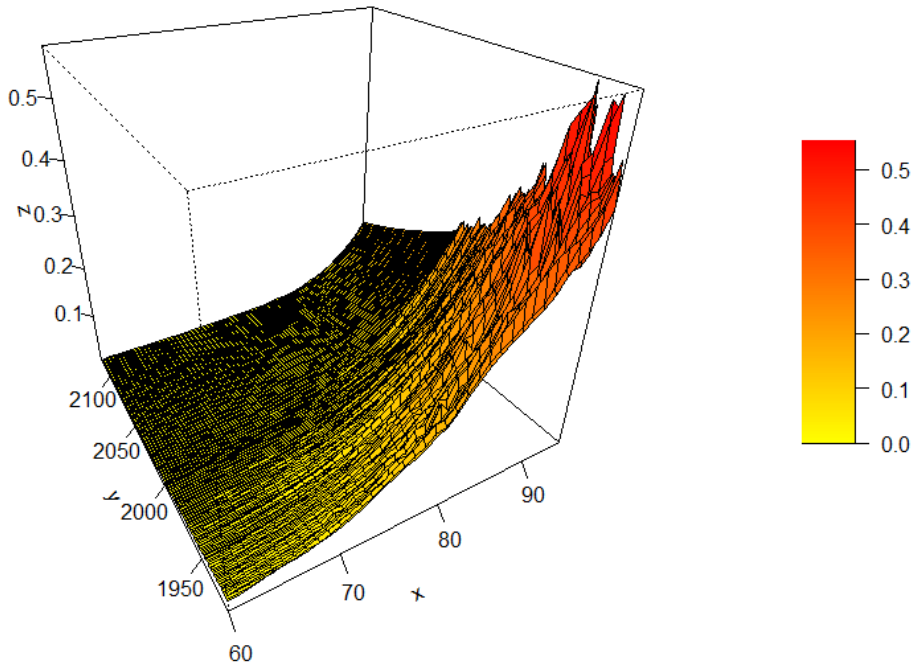


Figura 55: Tassi di mortalità previsti per la popolazione italiana totale secondo il modello di Lee-Carter. Sull'asse x sono definite le età (60-95), sull'asse y gli anni (1920-2119).

5.3.2 Modello di Cairns-Blake-Dowd

La medesima analisi condotta per il modello di Lee-Carter può essere qui applicata.
Inoltre, quando il modello Cairns-Blake-Dowd viene applicato ai dati, bisogna tenere presente che i cambiamenti sull'indice temporale $\boldsymbol{k_t} = \left[k_t^{[1]}, k_t^{[2]}\right]^T$ hanno un trend lineare; quindi, un random walk bivariato con drift può essere considerato generalmente come un modello adeguato per descrivere le dinamiche di $\boldsymbol{k_t}$ (Pitacco et al.,2009).
In pratica,

$$\boldsymbol{k_t} = \begin{cases} k_t^{[1]} = k_{t-1}^{[1]} + d^{[1]} + \xi_t^{[1]} \\ k_t^{[2]} = k_{t-1}^{[2]} + d^{[2]} + \xi_t^{[2]} \end{cases} \tag{114}$$

dove $d = \left[d^{[1]}, d^{[2]}\right]^T$ sono i parametri relativi al drift e $\xi = \left[\xi^{[1]}, \xi^{[2]}\right]^T$ sono i termini d'errore indipendenti e normalmente distribuiti, con matrice di varianza e covarianza pari a:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \tag{115}$$

I parametri di drift risultano pari a:

$$\hat{d}_j = \frac{\hat{\kappa}_{t_\pi}^{[i]} - \hat{\kappa}_{t_1}^{[i]}}{t_1 - t_1}, i = 1{,}2 \tag{116}$$

mentre le varianze marginali sono stimate come

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{t_n - t_1} \sum_{t=t_2}^{t_n} \left(\hat{k}_i^{[i]} - \hat{k}_{t-1}^{[i]} - \hat{d}_i\right)^2, i = 1{,}2 \tag{117}$$

Le covarianze risultano pari a

$$\hat{\sigma}_{12} = \frac{1}{t_n - t_1} \sum_{s=l_1}^{t_n - 1} \sum_{f=l_1}^{t_n - 1} \left(\hat{\kappa}_{s+1}^{[1]} - \hat{\kappa}_s^{[1]} - \hat{d}_1\right)\left(\hat{\kappa}_{t+1}^{[2]} - \hat{\kappa}_t^{[2]} - \hat{d}_2\right) \tag{118}$$

L'applicazione di tali formule produce i seguenti risultati.

	$\hat{d}^{[1]}$	$\hat{d}^{[2]}$	$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$	$\hat{\sigma}_{12}^2 = \hat{\sigma}_{21}^2$
Popolazione totale	-0,0136	0,000278	0,00276	3,67 x e-06	-5,03 x e-36
Popolazione maschile	-0,0114	0,000233	0,00271	3,98 x e-06	-2,37 x e-36
Popolazione femminile	-0,0159	0,000390	0,00290	3,40 x e-06	4,92 x e-36

Tabella 5: Stime dei valori del drift e della varianza residuale per la popolazione italiana totale, uomini e donne.

Anche in questo caso si segue una procedura di previsione che utilizza il miglior modello ARIMA possibile (cioè quello con minore AIC). In particolare, per la popolazione italiana totale $k_t^{[1]}$ segue un ARIMA (0,1,1) con drift e $k_t^{[2]}$ un ARIMA (0,1,2) con drift. Sia la popolazione maschile che femminile presentano un $k_t^{[1]}$ e un $k_t^{[2]}$ descritti da un ARIMA (0,1,1) con drift.

Nelle seguenti figure si propongono le previsioni nei parametri $k_t^{[1]}$ e $k_t^{[2]}$ per la popolazione italiana maschile, femminile e totale.

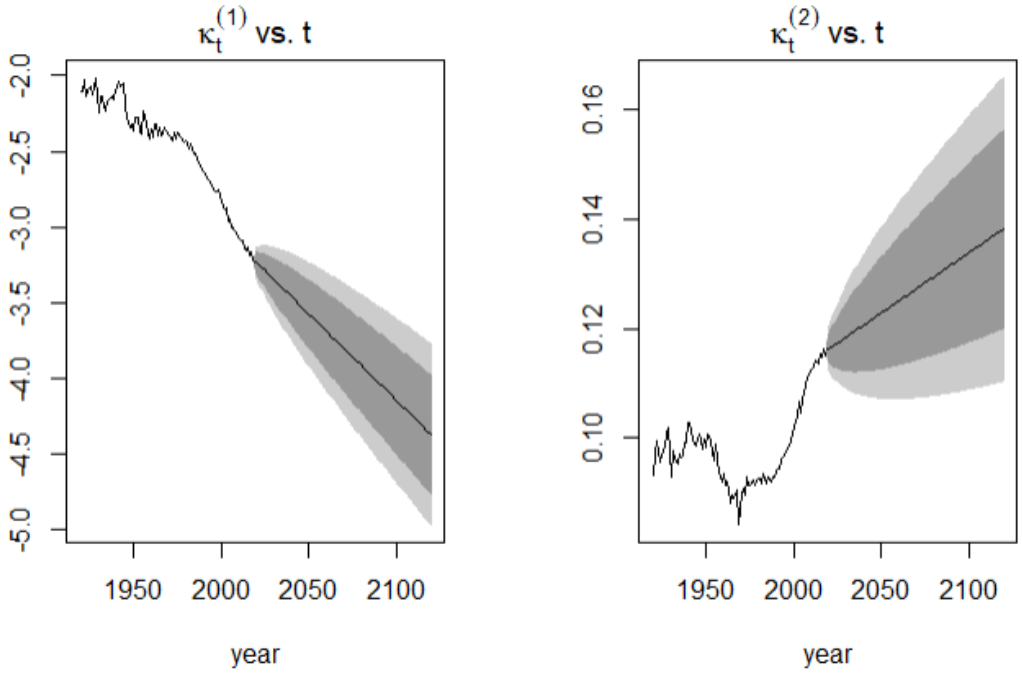


Figura 56: Previsioni a 100 anni degli indici periodali del modello Cairns-Blake-Dowd applicato alla popolazione maschile italiana per età 60-95, con intervalli di confidenza all'80 e 95%.

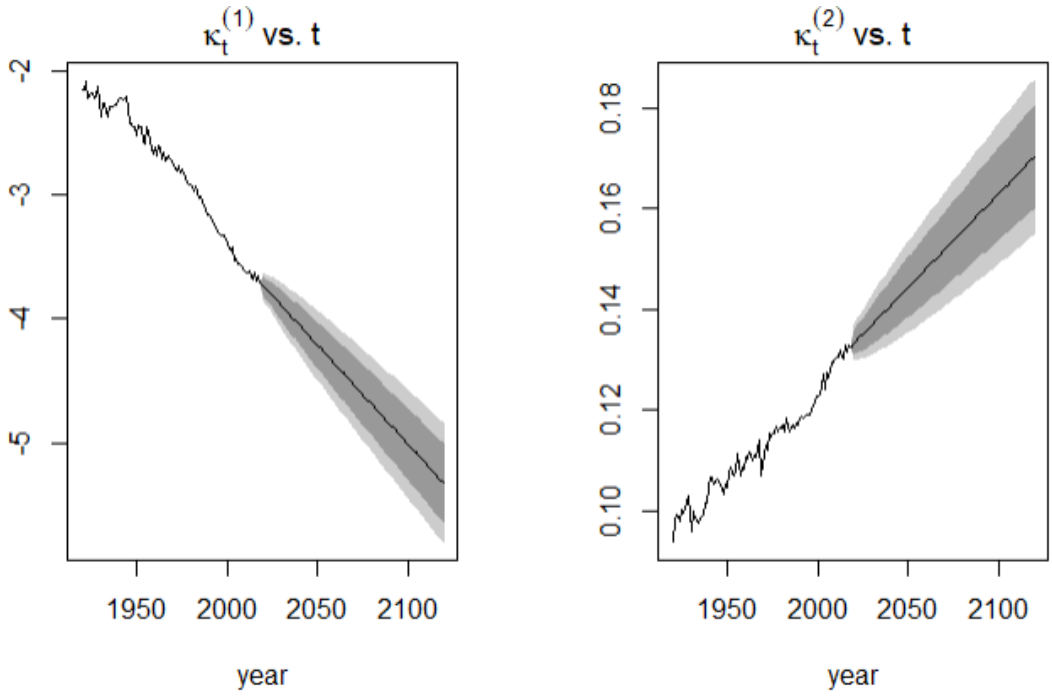


Figura 57: Previsioni a 100 anni degli indici periodali del modello Cairns-Blake-Dowd applicato alla popolazione femminile italiana per età 60-95, con intervalli di confidenza all'80 e 95%.

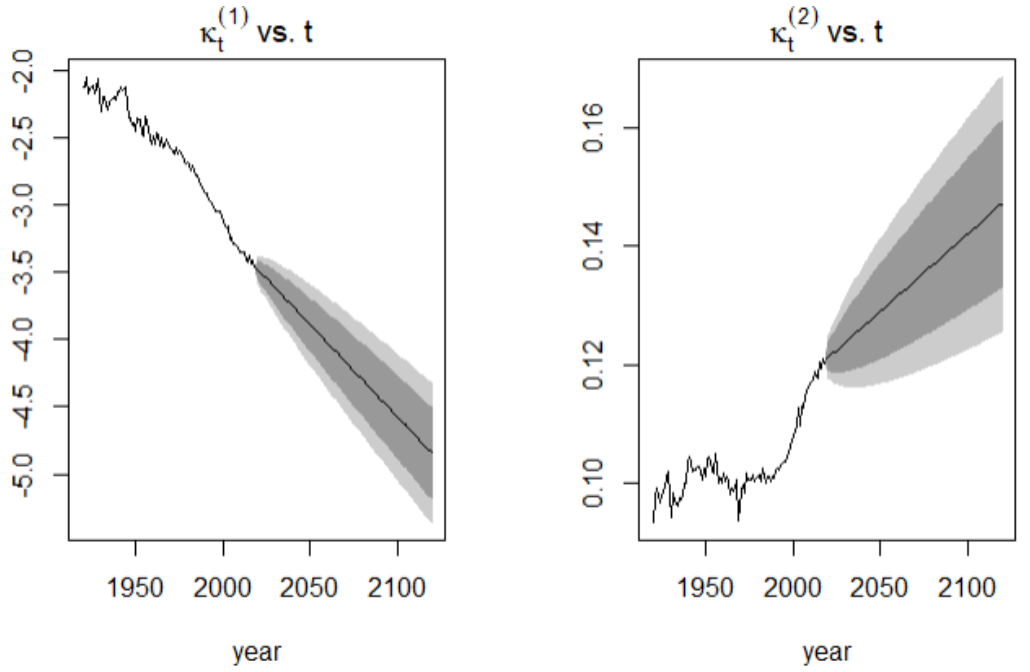


Figura 58: Previsioni a 100 anni degli indici periodali del modello Cairns-Blake-Dowd applicato alla popolazione totale italiana per età 60-95, con intervalli di confidenza all'80 e 95%.

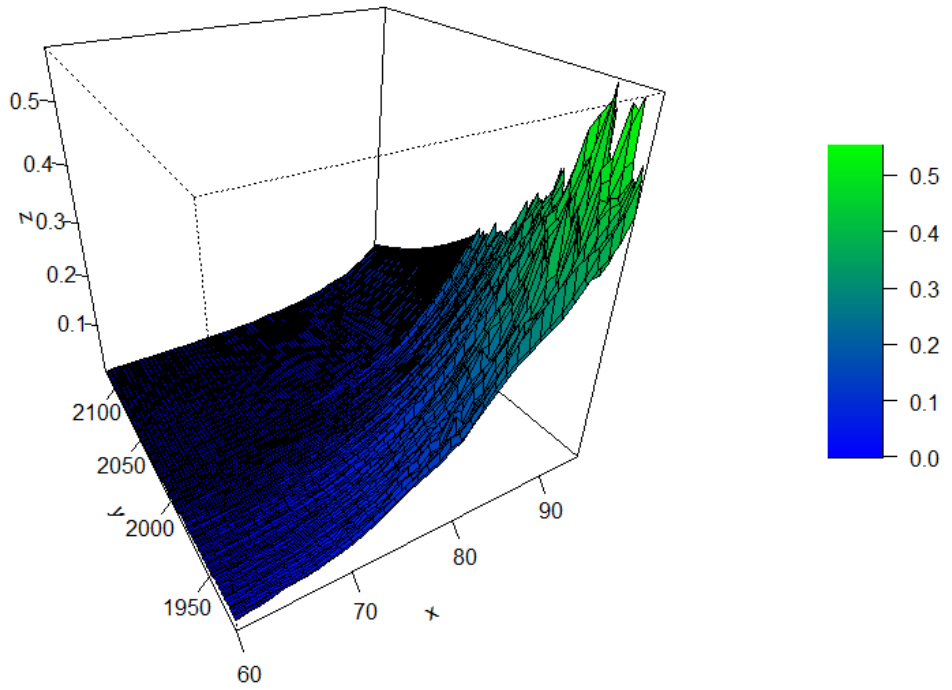


Figura 59: Tassi di mortalità previsti per la popolazione italiana totale secondo il modello di Cairns-Blake-Dowd. Sull'asse x sono definite le età (60-95), sull'asse y gli anni (1920-2119).

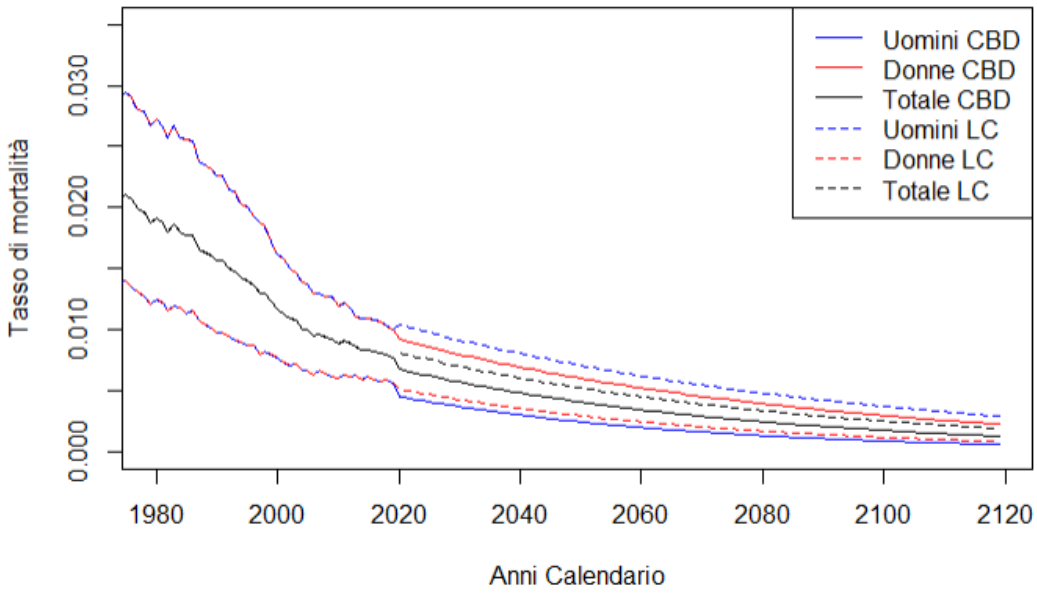


Figura 60: Confronto tra i tassi di mortalità previsti secondo i modelli Lee-Carter e Cairns-Blake-Dowd per la popolazione sessantacinquenne italiana maschile, femminile e totale.

Un modo per rappresentare l'incertezza associata alle previsioni dei due modelli considerati consiste nel simulare (utilizzando sempre il migliore ARIMA sulla base del criterio AIC per descrivere l'indice temporale) traiettorie dei tassi di mortalità nel periodo di previsione, quindi in questo caso per i successivi cento anni, producendo così delle rappresentazioni di tipo "fan", grafici a ventaglio che mostrano tanto stime centrali che intervalli di confidenza, che permettono il confronto tra più modelli GAPC (Villegas et al., 2018).

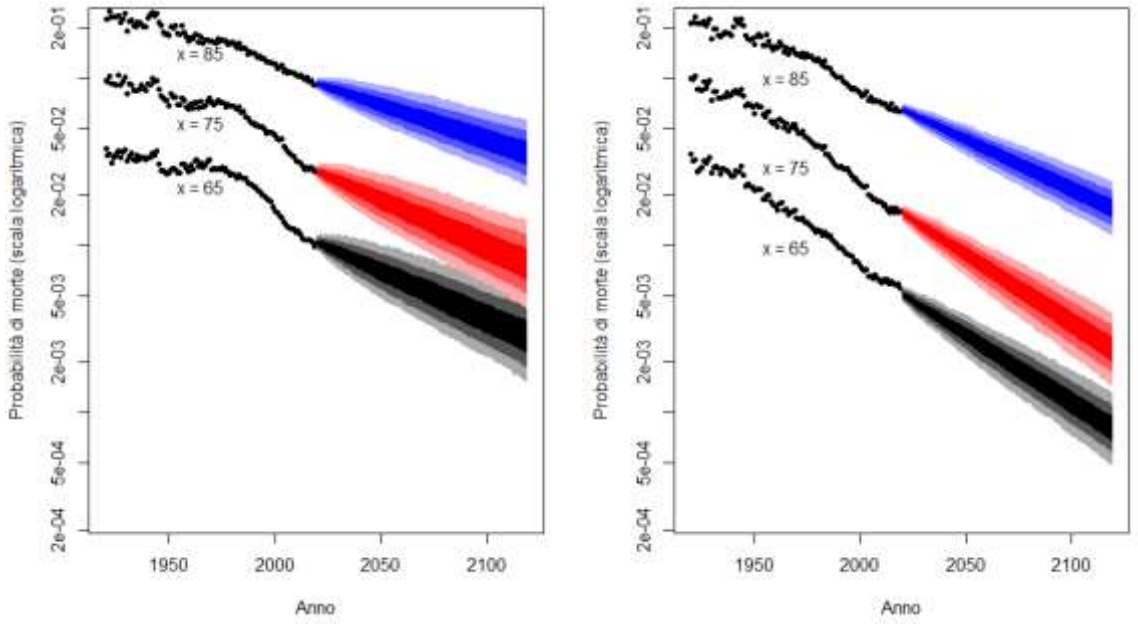


Figura 61: Fan chart per le probabilità di morte in scala logaritmica per età x=65 (nero), x=75 (rosso), x=85 (blu) derivante dal modello Lee-Carter per la popolazione maschile (sinistra) e femminile (destra) italiana, dal 2020 al 2119. I punti mostrano i tassi di mortalità storici dal 1920 al 2019. Le ombre rappresentano gli intervalli di confidenza al 50, 80 e 95%.

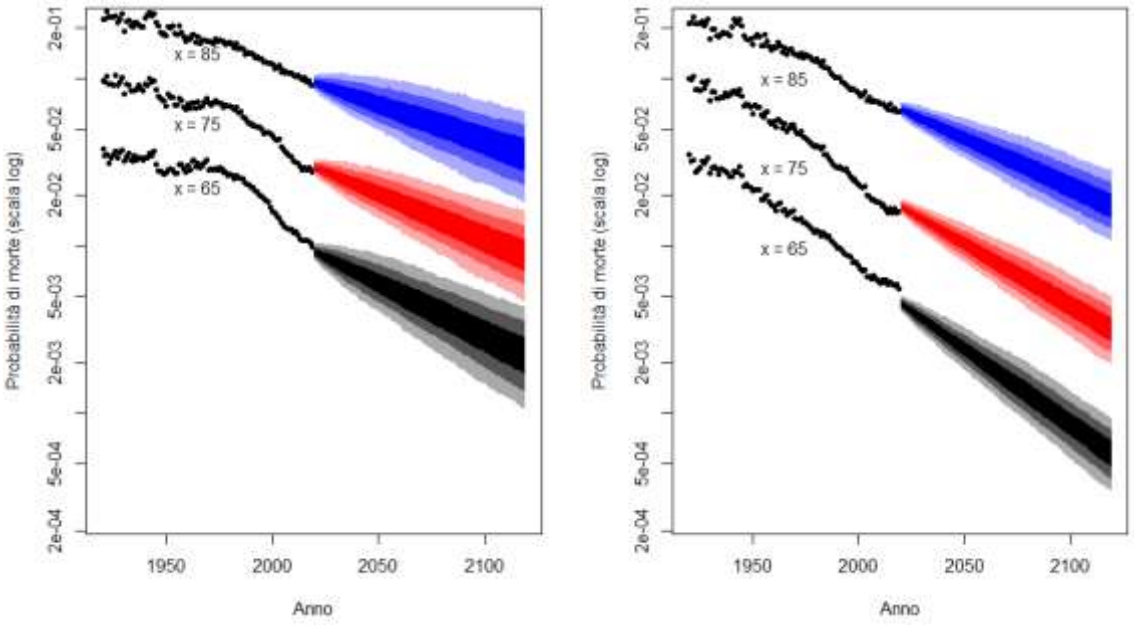


Figura 62: Fan chart per le probabilità di morte in scala logaritmica per età x=65 (nero), x=75 (rosso), x=85 (blu) derivante dal modello Cairns-Blake-Dowd per la popolazione maschile (sinistra) e femminile (destra) italiana, dal 2020 al 2119. I punti mostrano i tassi di mortalità storici dal 1920 al 2019. Le ombre rappresentano gli intervalli di confidenza al 50, 80 e 95%.

Secondo quanto specificato da Cairns et al. (2011), storicamente una maggiore volatilità del grafico "fan" dovrebbe essere associata ad età maggiori (quindi a 85 anni rispetto a 75 e soprattutto 65 anni). Per entrambi i modelli utilizzati tale aspetto non si evidenzia in modo netto, ad indicarne la non efficienza nel condurre previsioni.

5.4 Analisi delle aspettative di vita

Riprendendo quanto esaminato nel capitolo III, le aspettative di vita costituiscono degli utili indicatori statistici, in quanto capaci di riassumere gli andamenti della mortalità di una popolazione.

È innanzitutto importante distinguere le aspettative di vita di periodo da quelle di coorte. Le prime sono calcolate usando i tassi di mortalità per età di un dato periodo (ad esempio un anno), senza considerare cambiamenti futuri nella mortalità. Le aspettative di vita di coorte invece sono calcolate a partire da tavole di coorte, che utilizzano dati di

mortalità non di un medesimo anno, ma di anni successivi, seguendo un approccio diagonale.

Quindi le aspettative di vita di coorte all'età di 65 anni nel 2022 sarebbero ottenute usando le probabilità di morte per l'età 65 nel 2022, per l'età 66 nel 2023, per l'età 67 nel 2024 e così via, mentre quelle di periodo utilizzerebbero le probabilità di morte a 65, 66, 67 ... anni tutte del 2022.

Sia $\bar{e}_x^{\uparrow}(t)$ l'aspettativa di vita di periodo all'età x nell'anno calendario t. La freccia ↑ indica che stiamo lavorando lungo una banda verticale (come in Tabella 2), con i tassi di mortalità associati ad un determinato periodo di tempo (in questo caso un anno). La formula per il calcolo delle aspettative di vita di periodo è la seguente:

$$\begin{aligned}\bar{e}_x^{\dagger}(t) &= \int_{\xi\geq 0} \exp\left(-\int_0^{\xi} \mu_{x+\eta}(t)\mathrm{d}\eta\right)\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1-\exp\left(-\mu_x(t)\right)}{\mu_x(t)} \\ &\quad + \sum_{k\geq 1}\left(\prod_{j=0}^{k-1}\exp\left(-\mu_{x+j}(t)\right)\right)\frac{1-\exp\left(-\mu_{x+k}(t)\right)}{\mu_{x+k}(t)}\end{aligned} \tag{119}$$

In tale formula il rapporto $\left(1-\exp\left(-\mu_{x+k}(t)\right)/\mu_{x+k}(t)\right)$ rappresenta la frazione media dell'anno vissuta da un individuo vivo all'età x + k, e il prodotto $\prod_{j=0}^{k-1}\exp\left(-\mu_{x+j}(t)\right)$ è la probabilità ${}_kp_x^{\uparrow}(t)$ di raggiungere l'età x + k calcolata attraverso la tavola di mortalità di periodo.

Nella seguente figura si fornisce una rappresentazione delle serie storiche delle aspettative di vita di periodo. La "serie temporale" delle aspettative risulta così composta:

- le aspettative di vita "storiche" di periodo, costruite a partire dai dati di mortalità storici, scaricati dall'HMD e opportunamente convertiti fino al 2019.
- le aspettative di vita "proiettate" di periodo, ottenute sulla base dei tassi di mortalità ricavati applicando il modello di Lee-Carter e quello di Cairns-Blake-Dowd nel periodo 1920-2019, e in previsione dal 2020 al 2119, e quindi opportunamente convertiti.

L’approccio seguito non prende in considerazione l’evoluzione e i miglioramenti nella mortalità, proprio perché trattasi di aspettative di vita di “periodo”, ma consente comunque di visualizzare anno dopo anno la crescita delle aspettative di vita secondo una logica più statica, focalizzata sul singolo anno preso in considerazione, sapendo che più si avanza nel futuro, e meno le stime saranno precise.

Le tabelle 6-7 permettono quindi di confrontare le aspettative di vita per la popolazione sessantacinquenne maschile e femminile, di periodo come indicato sopra, costruite utilizzando i dati storici della mortalità fino al 2019 e quelli proiettati dal 2020 al 2119, unitamente alle proiezioni fino al 2070 costruite dall’Istat, l’Istituto Nazionale Italiano di Statistica, sulla base di modelli dalla stessa sviluppati.

Si può innanzitutto notare l’incremento di tale indicatore negli ultimi quarant’anni, che passa da 14 a 19 anni per la popolazione maschile, e da 17,5 a 23 circa per quella femminile.
Mentre il modello Lee-Carter e quello di Cairns-Blake-Dowd tendono a sottostimare le aspettative di vita per la popolazione maschile rispetto ai dati Istat, il Lee-Carter è molto più “ottimista” per quanto concerne i dati femminili.

Al 2119, centesimo anno di previsione, per quanto le stime siano poco precise a causa degli alti standard errore nella previsione e i risultati siano quindi inficiati da una grande imprecisione, si prevedono comunque aspettative di vita per la popolazione sessantacinquenne italiana pari a circa 26,5 anni secondo il modello di Lee-Carter e 25 per il modello di Cairns-Blake-Dowd nel caso maschile, e 31 anni per il modello LC e 28 per il modello CBD per la popolazione femminile.

In sostanza, una persona di sesso maschile di sessantacinque anni, secondo tali modelli, vivrà, sulla base di una media dei risultati ottenuti dai due modelli, 6,575 anni in più, mentre una persona di sesso femminile 6,915 anni in più nel 2119 rispetto al 2019.
Questo ovviamente comporta delle conseguenze dal punto di vista della maggiore spesa che un piano pensionistico (pubblico o privato) dovrà sopportare.

	Lee-Carter	Cairns-Blake-Dowd	Istat		Lee-Carter	Cairns-Blake-Dowd	Istat
2020	19,22662	19,41947	18,5	2070	23,15623	22,76864	23,2
2021	19,31008	19,49184	18,7	2071	23,2289	22,82878	/
2022	19,39339	19,56467	18,9	2072	23,30132	22,88862	/
2023	19,47653	19,63706	19,1	2073	23,37348	22,94817	/
2024	19,55951	19,70932	19,3	2074	23,44539	23,00743	/
2025	19,64233	19,78134	19,5	2075	23,51704	23,0664	/
2026	19,72498	19,85315	19,7	2076	23,58843	23,12507	/
2027	19,80745	19,92474	19,8	2077	23,65956	23,18345	/
2028	19,88975	19,99612	20,0	2078	23,73043	23,24153	/
2029	19,97187	20,06727	20,1	2079	23,80104	23,29932	/
2030	20,05381	20,1382	20,2	2080	23,87139	23,35681	/
2031	20,13557	20,20891	20,3	2081	23,94148	23,414	/
2032	20,21714	20,27938	20,4	2082	24,01131	23,47089	/
2033	20,29852	20,34962	20,5	2083	24,08087	23,52749	/
2034	20,3797	20,41963	20,6	2084	24,15018	23,58379	/
2035	20,4607	20,4894	20,7	2085	24,21922	23,63979	/
2036	20,54149	20,55894	20,8	2086	24,288	23,69549	/
2037	20,62209	20,62824	20,9	2087	24,35652	23,75089	/
2038	20,70248	20,69729	21,0	2088	24,42478	23,806	/
2039	20,78267	20,7661	21,0	2089	24,49277	23,8608	/
2040	20,86265	20,83466	21,1	2090	24,5605	23,9153	/
2041	20,94242	20,90298	21,2	2091	24,62797	23,9695	/
2042	21,02198	20,97105	21,3	2092	24,69518	24,0234	/
2043	21,10133	21,03886	21,4	2093	24,76212	24,077	/
2044	21,18046	21,10642	21,5	2094	24,8288	24,1303	/
2045	21,25937	21,17372	21,6	2095	24,89521	24,1833	/
2046	21,33806	21,24077	21,6	2096	24,96137	24,236	/
2047	21,41653	21,30756	21,7	2097	25,02726	24,2884	/
2048	21,49478	21,37409	21,8	2098	25,09289	24,34049	/
2049	21,5728	21,44035	21,9	2099	25,15825	24,39229	/
2050	21,65059	21,50635	21,9	2100	25,22336	24,44378	/
2051	21,72815	21,57208	22,0	2101	25,2882	24,49498	/
2052	21,80549	21,63755	22,1	2102	25,35279	24,54587	/
2053	21,88258	21,70275	22,1	2103	25,41711	24,59647	/
2054	21,95945	21,76768	22,2	2104	25,48117	24,64676	/
2055	22,03608	21,83233	22,3	2105	25,54497	24,69675	/
2056	22,11247	21,89671	22,4	2106	25,60851	24,74645	/
2057	22,18862	21,96082	22,4	2107	25,67179	24,79584	/
2058	22,26453	22,02465	22,5	2108	25,73481	24,84494	/
2059	22,34019	22,0882	22,5	2109	25,79758	24,89374	/
2060	22,41562	22,15148	22,6	2110	25,86008	24,94223	/
2061	22,4908	22,21447	22,7	2111	25,92233	24,99044	/
2062	22,56573	22,27719	22,7	2112	25,98432	25,03834	/
2063	22,64042	22,33962	22,8	2113	26,04606	25,08595	/
2064	22,71486	22,40177	22,8	2114	26,10754	25,13326	/
2065	22,78905	22,46363	22,9	2115	26,16876	25,18027	/
2066	22,86299	22,52521	23,0	2116	26,22973	25,22699	/
2067	22,93668	22,5865	23,0	2117	26,29045	25,27341	/
2068	23,01012	22,6475	23,1	2118	26,35091	25,31954	/
2069	23,0833	22,70822	23,1	2119	26,41112	25,36537	/

Tabella 6: Aspettative di vita di periodo a 65 anni, per la popolazione italiana maschile, secondo le previsioni Lee-Carter, Cairns-Blake-Dowd e Istat (disponibili fino al 2070).

	Lee-Carter	Cairns-Blake-Dowd	Istat		Lee-Carter	Cairns-Blake-Dowd	Istat
2020	22,54407	22,26633	21,9	2070	27,08623	25,81073	25,8
2021	22,64154	22,35083	22	2071	27,16598	25,86767	/
2022	22,74453	22,43478	22,1	2072	27,24533	25,92408	/
2023	22,84501	22,51819	22,3	2073	27,32426	25,97998	/
2024	22,94577	22,60104	22,5	2074	27,4028	26,03535	/
2025	23,04583	22,68335	22,7	2075	27,48093	26,09022	/
2026	23,14554	22,7651	22,8	2076	27,55866	26,14457	/
2027	23,24476	22,84631	22,9	2077	27,63599	26,19842	/
2028	23,34355	22,92695	23,1	2078	27,71294	26,25175	/
2029	23,44188	23,00704	23,1	2079	27,78949	26,30459	/
2030	23,53976	23,08658	23,2	2080	27,86565	26,35692	/
2031	23,63719	23,16555	23,3	2081	27,94143	26,40875	/
2032	23,73417	23,24397	23,4	2082	28,01682	26,46009	/
2033	23,83069	23,32182	23,5	2083	28,09183	26,51094	/
2034	23,92676	23,39912	23,5	2084	28,16647	26,56129	/
2035	24,02237	23,47586	23,6	2085	28,24073	26,61116	/
2036	24,11753	23,55203	23,7	2086	28,31461	26,66055	/
2037	24,21223	23,62764	23,8	2087	28,38813	26,70945	/
2038	24,30648	23,70269	23,8	2088	28,46129	26,75787	/
2039	24,40027	23,77718	23,9	2089	28,53408	26,80582	/
2040	24,4936	23,85111	24	2090	28,6065	26,8533	/
2041	24,58649	23,92447	24,1	2091	28,67858	26,9003	/
2042	24,67891	23,99727	24,1	2092	28,75029	26,94684	/
2043	24,77088	24,06951	24,2	2093	28,82166	26,99291	/
2044	24,8624	24,14119	24,3	2094	28,89267	27,03852	/
2045	24,95347	24,2123	24,4	2095	28,96334	27,08368	/
2046	25,04408	24,28286	24,4	2096	29,03367	27,12838	/
2047	25,13424	24,35285	24,5	2097	29,10365	27,17263	/
2048	25,22395	24,42229	24,6	2098	29,1733	27,21643	/
2049	25,31321	24,49117	24,6	2099	29,24262	27,25978	/
2050	25,40202	24,55949	24,7	2100	29,3116	27,3027	/
2051	25,49038	24,62725	24,8	2101	29,38026	27,34517	/
2052	25,5783	24,69446	24,8	2102	29,44859	27,38721	/
2053	25,66577	24,76111	24,9	2103	29,5166	27,42881	/
2054	25,7528	24,82721	24,9	2104	29,58429	27,46999	/
2055	25,83938	24,89276	25	2105	29,65167	27,51073	/
2056	25,92553	24,95775	25	2106	29,71873	27,55106	/
2057	26,01123	25,0222	25,1	2107	29,78548	27,59096	/
2058	26,0965	25,0861	25,2	2108	29,85192	27,63045	/
2059	26,18133	25,14945	25,2	2109	29,91807	27,66952	/
2060	26,26573	25,21225	25,3	2110	29,98391	27,70819	/
2061	26,34969	25,27452	25,3	2111	30,04945	27,74644	/
2062	26,43322	25,33624	25,4	2112	30,1147	27,78429	/
2063	26,51633	25,39742	25,5	2113	30,17965	27,82175	/
2064	26,59901	25,45806	25,5	2114	30,24432	27,8588	/

2065	26,68126	25,51817	25,6	2115	30,3087	27,89546	/
2066	26,76309	25,57774	25,6	2116	30,3728	27,93172	/
2067	26,8445	25,63678	25,7	2117	30,43662	27,9676	/
2068	26,92549	25,69529	25,7	2118	30,50017	28,0031	/
2069	27,00607	25,75328	25,8	2119	30,56343	28,03821	/

Tabella 7: Aspettative di vita di periodo a 65 anni, per la popolazione italiana femminile, secondo le previsioni Lee-Carter, Cairns-Blake-Dowd e Istat (disponibili fino al 2070).

5.5 Calcolo attuariale di una rendita vitalizia

Seguendo l'approccio di Spedicato e Clemente (2013), si propone il calcolo del valore attuariale di una rendita vitalizia pagata in anticipo (equazione 2) per una persona di età pari a x = 65, che paga annualmente un'unità monetaria per ogni anno in cui il soggetto sopravvive, sulla base di un tasso di interesse nominale del 4% e con un tasso di inflazione ipotetico del 2%[79].

La metodologia consiste nel ricavare tavole di mortalità di coorte per varie generazioni, dal 1920 fino all'ultima per cui i dati risultano disponibili, del 2030, sulla base dei tassi di mortalità storici e proiettati, ricavati nei passaggi precedenti con il modello di Lee-Carter e Cairns-Blake-Dowd (un approccio quindi diagonale, seguendo la Tabella 2), e su queste tavole viene applicata l'equazione propria delle rendite vitalizie.

Per la costruzione delle tavole, si considerano ora i passaggi dei paragrafi precedenti (fitting e previsione) per età da 1 a 100 anni, ipotizzando che le età superiori (cioè da x = 101) decrescano uniformemente in 20 passi (Spedicato e Clemente, 2013).

Le tabelle 8 e 9 evidenziano come i miglioramenti nella mortalità producono un effettivo aumento reale nel valore attuariale di una rendita di tipo "whole life" per una persona in età di pensionamento (che ipotizziamo essere costante pari a 65 anni).

[79] Quindi, sulla base della formula $r + 1 = \frac{1+i}{1+p*}$, in cui i è il tasso nominale e p^* il tasso d'inflazione, il tasso reale considerato risulta pari al 1,96%.

La conseguenza è chiara: la spesa pensionistica aumenta sensibilmente (dai grafici si deduce almeno un +50%), e ciò può determinare una riduzione negli assegni pensionistici erogati e/o l'aumento dell'età prevista per il pensionamento.

Tali risultati, con riferimento anche ai risultati ottenuti nei paragrafi precedenti, non mostrano il rischio di longevità nel senso proprio del termine (come rischio di deviazioni sistematiche), ma permettono comunque di visualizzare un percorso di mortalità atteso, dal cui allontanamento possono derivare i rischi di cui si è discusso nel capitolo II del presente elaborato.

Coorte	Lee-Carter	Cairns-Blake-Dowd
1920	12,44	9,17
1930	13,63	9,43
1940	15,02	10,20
1950	15,54	10,23
1960	16,03	10,40
1970	16,58	11,00
1980	17,11	12,01
1990	17,62	13,21
2000	18,11	14,33
2010	18,57	15,03
2020	19,01	15,57
2030	19,35	16,10

Tabella 8: Valore attuariale di una rendita vitalizia per un sessantacinquenne appartenente a varie coorti.

Coorte	Lee-Carter	Cairns-Blake-Dowd
1920	15,54	9,97
1930	16,59	10,37
1940	17,40	11,35
1950	17,91	12,10
1960	18,57	12,91
1970	19,17	13,95

1980	19,74	15,02
1990	20,26	16,02
2000	20,74	16,70
2010	21,19	17,31
2020	21,61	17,92
2030	21,80	18,51

Tabella 9: Valore attuariale di una rendita vitalizia per una sessantacinquenne appartenente a varie coorti.

5.6 Il rischio di longevità come rischio di parametro

I grafici "fan chart" (figure 61 e 62) permettono di raffigurare intervalli di confidenza nei tassi di mortalità di una popolazione, ma tengono in considerazione solamente l'incertezza derivante da errori nella previsione degli indici periodali, ignorando quella derivante dalla stima dei parametri nei modelli GAPC.
Si ricordi (capitolo II) che il rischio di longevità può essere inteso come rischio di modello (errata specificazione del modello di mortalità rilevante), ma anche come rischio di parametro (valutazione parziale e/o errata dei parametri rilevanti del modello). Sono quindi necessarie opportune procedure per poter derivare analiticamente la "parameter uncertainty", che unitamente all'incertezza nella previsione, permette di visualizzare allora quello che è effettivamente il rischio di longevità, data l'impossibilità, con gli strumenti finora utilizzati, di ricavarne una quantificazione[80] (Pitacco et al., 2009; Villegas et al.,2018).

L'idea chiave è allora quella di utilizzare una procedura di tipo bootstrap.
Tale procedura consiste nel ricampionare dai dati originali, in modo da creare dataset replicati, dai quali la variabilità delle quantità d'interesse può essere valutata. È un metodo "computer-intensive", dal momento che richiede una grande potenza di calcolo per poter essere eseguito, ma risulta particolarmente utile in casi in cui i calcoli teorici sono troppo complessi.

[80] La ragione è insita nel fatto che le quantità di interesse, come le aspettative di vita o il valore attuariale di rendite, sono complicate funzioni non lineari dei parametri α_x , β_x and k_t e dei parametri ARIMA, per cui i relativi intervalli di confidenza non sono ricavabili in maniera analitica (Pitacco et al., 2009).

In pratica, il bootstrap va a generare campioni α_x^b, β_x^b e $k_x^b, con\ b = 1,2, \dots, B$ dei modelli Lee-Carter e Cairns-Blake-Dowd, o di un modello GAPC in generale, che possono essere poi utili per costruire intervalli di confidenza e di predizione delle quantità demografiche e attuariali di interesse.

Si propone in questo elaborato un bootstrap di tipo Poisson o semiparametrico (Brouhns et al. 2005).
Partendo dalle osservazioni (ETR_{xt} , D_{xt}), la procedura genera B campioni (ETR_{xt} , $D_{x,t}^b$) dove $D_{x,t}^b$ sono realizzazioni derivanti da una distribuzione Poisson con media $ETR_{x,t}\hat{m}_{x,t} = D_{x,t}$. Le morti sono ottenute applicando un rumore Poisson al numero di morti osservato. Per ogni campione, i parametri α_x, β_x e k_t sono stimati.
L'approccio seguito riprende il lavoro svolto da Li (2014) e Villegas et al. (2018).
Si propone un'applicazione per il modello Lee-Carter (per età 0-100), applicato alla popolazione italiana maschile, di un bootstrap di tipo Poisson, in cui B=500.

Nella figura 63 si illustrano i parametri di α_x, β_x e k_t, ricavati. Si noti che gli intervalli di confidenza sono poco presenti a causa del basso numero di ricampionamenti effettuati, ma è comunque visibile una certa incertezza soprattutto per il parametro β_x .

Successivamente, si effettuano delle simulazioni per h passi (in questo caso h = 100) avanti del modello con bootstrap, così da ottenere traiettorie simulate che tengono in considerazione tanto di errori legati alla previsione dell'indice periodale che quelli relativi alla stima dei parametri del modello considerato.

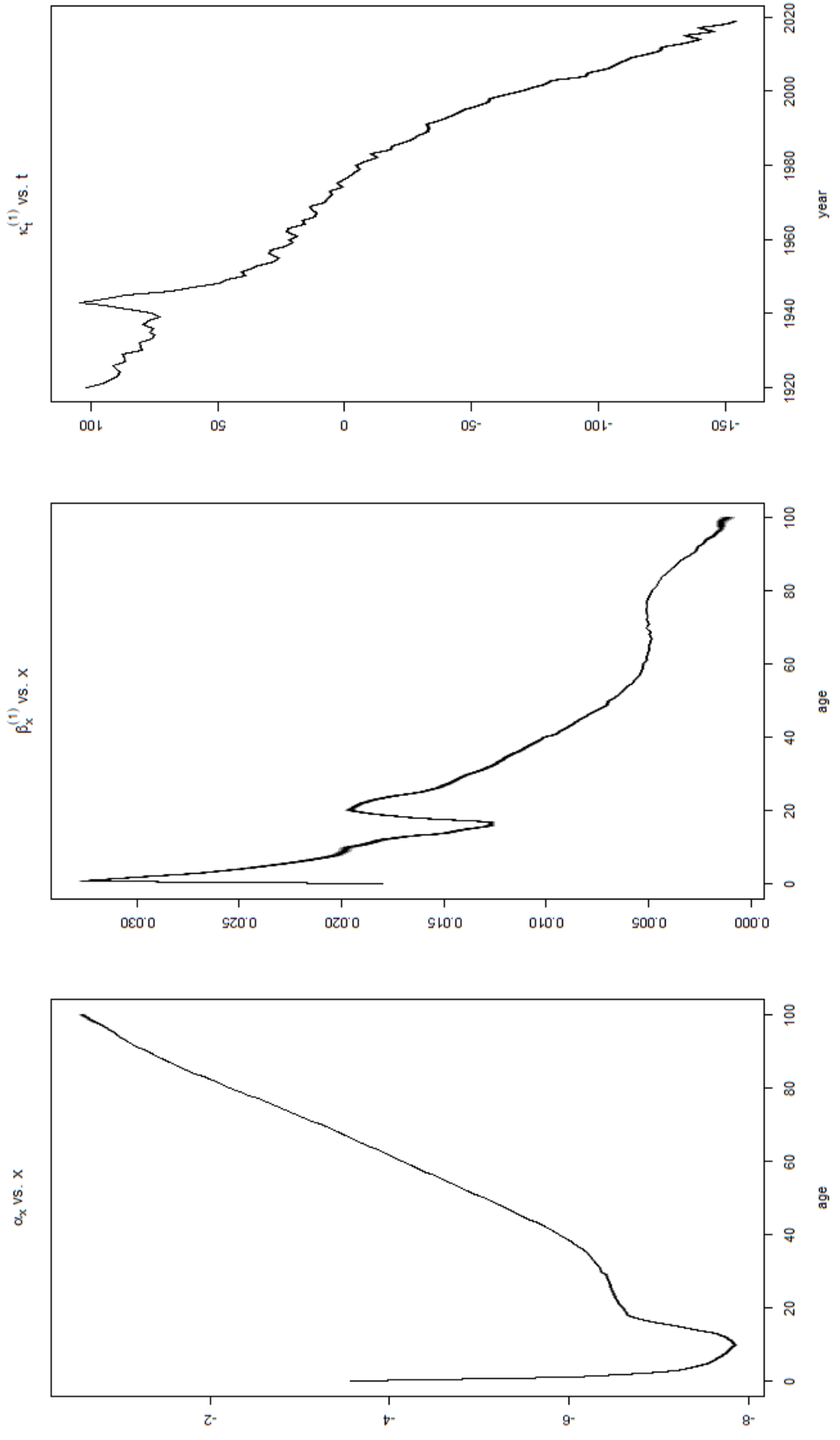

α_x vs. x
-2
-4
-6
-8
0
20
40
60
80
100
age
$\beta_x^{(1)}$ vs. x
0.000
0.005
0.010
0.015
0.020
0.025
0.030
0
20
40
60
80
100
age
$\kappa_t^{(1)}$ vs. t
100
50
0
-50
-100
-150
1920
1940
1960
1980
2000
2020
year

Figura 63: Parametri di un bootstrap di tipo Poisson per il modello di Lee-Carter con distribuzione delle morti di tipo Poisson, applicato alla popolazione italiana maschile, età 0-100, anni 1920-2019. Le ombre rappresentano intervalli di confidenza al 50%, 80% e 95%.

Per evidenziare l'impatto del rischio di parametro sulle proiezioni dei tassi di mortalità, è interessante comparare intervalli predittivi che prevedano e che non prevedano l'incertezza legata al parametro.
Nella figura 64 allora si mostrano tassi di mortalità per 100 anni in avanti insieme a 500 traiettorie possibili del modello Lee-Carter con distribuzione delle morti di tipo Poisson.

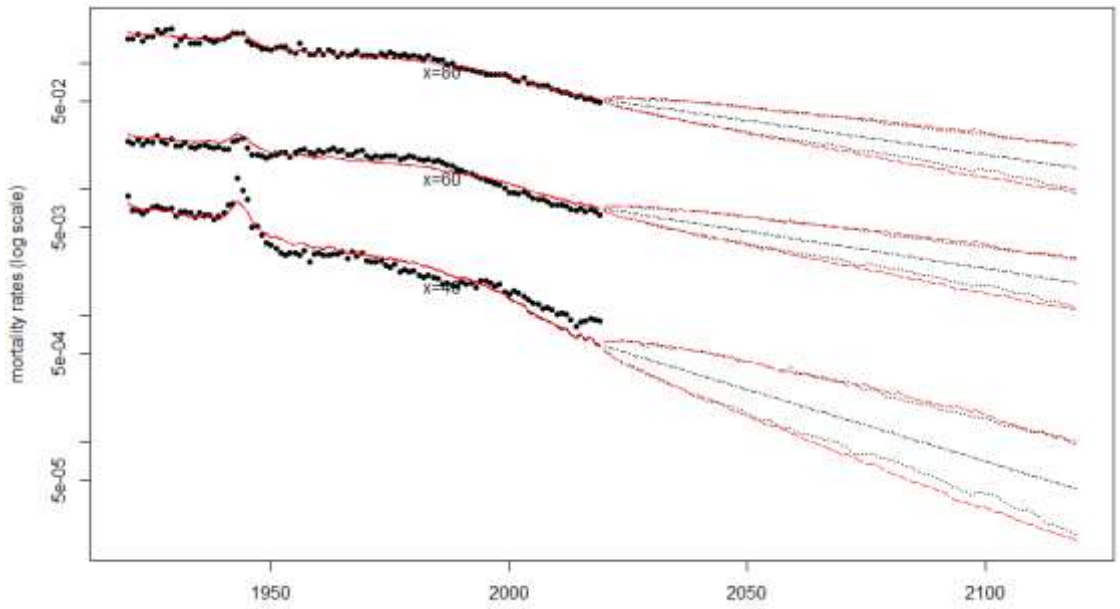


Figura 64: Intervalli predittivi al 95% per i tassi di mortalità m_{xt} per età x = 40 (in basso), x = 60 (in centro) e x = 80 (in alto) per il modello Poisson Lee-Carter, applicato alla popolazione italiana maschile per età 0-100 e periodo 1920-2019. I punti mostrano i tassi di mortalità storici nel periodo 1920 – 2019 e le linee continue nere mostrano i valori previsti dal modello. Le linee tratteggiate rappresentano la previsione centrale, le linee nere a punti rappresentano intervalli predittivi al 95% senza rischio di parametro (solo rischio predittivo) e le linee rosse tratteggiate rappresentano intervalli al 95% con incertezza di parametro.

La figura 64 evidenzia come l'incertezza di parametro può avere un impatto sugli intervalli di previsione. Infatti, si può notare come per tutte le età considerate la larghezza degli intervalli predittivi relativamente ai tassi di mortalità m_{xt} con incertezza

di parametro risulta maggiore di quella che contempla solamente il rischio previsionale, e ciò rappresenta una misura dell'impatto del rischio legato alla longevità.

Ancora, si analizzino le figure 65 e 66.

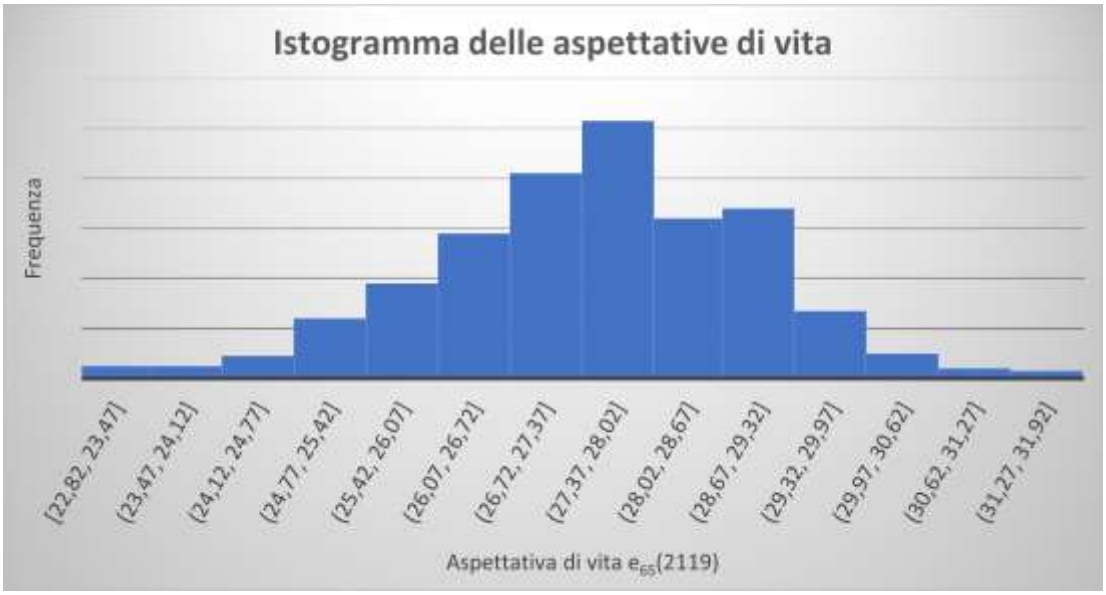


Figura 65: Istogramma di 500 valori delle aspettative di vita di periodo all'età 65 anni nel 2119 per la popolazione maschile italiana

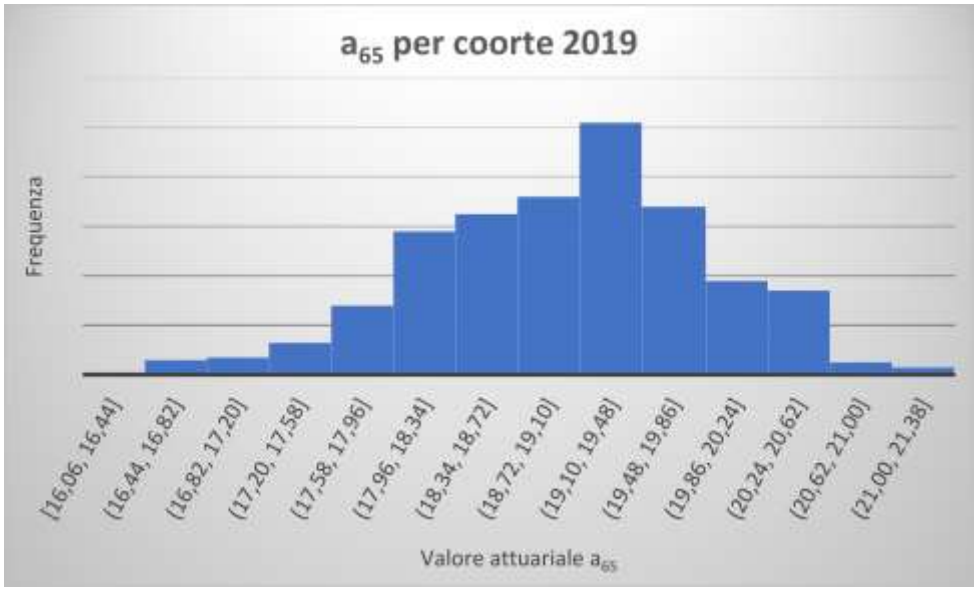


Figura 66: Istogramma di 500 valori attuariali di una rendita vitalizia, sottoscritta all'età di 65 anni, per la coorte nata nel 2019, per la popolazione maschile italiana

I valori delle aspettative di vita per la popolazione maschile sessantacinquenne nel 2119, ultimo anno di previsione, ricavati in figura 65 sulla base dei dati bootstrap, hanno una media pari a 27,49 anni, contro una previsione puntuale pari a 26,41, così come ricavata nel paragrafo 5.5. Poiché il 95% dei e_{65} (2119) ricavati sulla base di 500 ricampionamenti cadono nell'intervallo (24,60; 30,37), è possibile considerare tale range come un intervallo approssimato per il valore non noto e_{65} (2119).

Per quanto concerne la figura 66, che presenta invece i valori attuariali di una rendita vitalizia anticipata per la coorte nata nel 2019 (con x = 65, tasso d'interesse nominale pari al 4%, e tasso d'inflazione uguale al 2%), ottenuti sulla base dei dati bootstrap, la media risulta pari a 19 (con la previsione puntuale che risultava pari a 19,01 per la coorte del 2020) e l'intervallo di confidenza al 95% è (18,15;19,88).
In alternativa all'utilizzo di tale intervallo, una compagnia assicurativa o un fondo pensione potrebbe sfruttare anche la stima della funzione di densità di probabilità di $\ddot{a}_{65}$ per la coorte nata nel 2019 per decidere l'intensità del caricamento di sicurezza (Brouhns et al., 2002). Infatti, l'azienda assicurativa potrebbe far pagare il 90° percentile (in questo caso 20,106) o il 95° percentile (pari a 20,378) di $\ddot{a}_{65}$ per la coorte del 2019. La procedura implementata con il bootstrap ha il vantaggio di offrire una più chiara comprensione di come il "safety loading" viene calcolato.

Le figure 65 e 66 mostrano allora il rischio di longevità come rischio di parametro e dimostrano l'esistenza di significativi rischi sistematici per le imprese assicurative che forniscono rendite vitalizie, considerata l'ampiezza degli intervalli di confidenza al 95% che racchiudono i possibili futuri valori delle aspettative di vita e rendite vitalizie a 65 anni.
In precedenza, nel capitolo II, si era in realtà detto che il rischio di longevità risulta formato da due componenti: il rischio di parametro (che si è preso in considerazione in questo paragrafo) e il rischio di modello. Nonostante interessanti proposte e ricerche effettuate, poca attenzione è stata rivolta alla definizione di un modello che contemplasse anche questa seconda tipologia di rischio.
In questo senso, si può far riferimento al modello di Yang, Li e Balasooriya (2015), che modifica la bootstrap semiparametrica utilizzata nel paragrafo 5.5 così da contemplare sia il rischio di incertezza di parametro che quello di modello.

Conclusioni

Il presente lavoro ha permesso di mettere in luce le principali problematiche associate al rischio di longevità e le soluzioni di hedging più opportune.
All'interno del mercato per il trasferimento del "longevity risk", sicuramente le soluzioni "insurance market based", che si avvalgono cioè di intermediari assicurativi e riassicurativi, costituiscono il principale mezzo con cui oggi le società sponsor di piani pensionistici e le aziende assicurative possono coprirsi dal rischio di longevità, mentre quelle "capital market based", con i relativi titoli "mortality-linked", continuano ad essere piuttosto limitate e poco utilizzate. Una delle proposte più recenti ed interessanti è costituita dai "reinsurance sidecar", attraverso cui è possibile condividere il rischio con investitori di capitali.

Successivamente, si è cercato di comprendere l'origine del rischio legato alla longevità.
Si è indagato su come sia possibile modellizzare l'andamento della mortalità di una popolazione (capitolo III), ed in particolare ci si è focalizzati sui principali modelli stocastici esistenti a tempo discreto (capitolo IV), utilizzati per ottenere proiezioni dei tassi futuri di morte, fondamentali per il corretto pricing degli strumenti mortality-linked sopracitati e per il calcolo dei valori attuariali delle prestazioni nelle polizze vita erogate dagli istituti assicurativi.

Nel capitolo V, vengono utilizzati allora i modelli di Lee-Carter e di Cairns-Blake-Dowd per investigare le tendenze nella mortalità della popolazione italiana.
Si prendono in considerazione solamente età avanzate, da 60 a 95 anni, in quanto le più rilevanti per quanto concerne le applicazioni in campo pensionistico ed assicurativo e l'arco temporale di esercizio dei metodi proposti è di un secolo, dal 1920 al 2019, sebbene un tale intervallo temporale possa comportare importanti criticità, che minano la qualità e l'efficienza dell'analisi stessa.

L'analisi del coefficiente di determinazione e dei residui dei modelli permette comunque di apprezzarne la capacità di adattamento ai dati, specie con riferimento al modello di Cairns-Blake-Dowd. Inoltre, vengono rilevate strutture diagonali,

compatibili con effetti di coorte, che, per carenze strutturali, né il Lee-Carter né il Cairns-Blake-Dowd sono capaci di apprezzare.
Successivamente vengono utilizzati i modelli per derivare proiezioni future dei tassi di mortalità per cento passi in avanti, dal 2020 al 2119, sulla base della tecnica Box-Jenkins.

Vengono quindi ricavate stime puntuali delle aspettative di vita e dei valori attuariali di una rendita vitalizia per la popolazione sessantacinquenne italiana, maschile e femminile per l'arco temporale 2020-2119; i risultati mostrano notevoli incrementi in tali valori, compatibili con il declino progressivo dei tassi di morte, e confermano le criticità che possono emergere dall'invecchiamento della popolazione per i sistemi pensionistici tradizionali di tipo "Pay-As-You-Go" e per le imprese assicurative, con riferimento all'innalzamento dell'età della pensione, ai decrescenti assegni pensionistici e all'aumento del costo attuariale dei benefici erogati.

È interessante notare come un evento catastrofale come l'epidemia di Covid-19, non oggetto di analisi nel presente elaborato in quanto successivo al 2019, abbia comportato di fatto una brusca interruzione in queste tendenze decrescenti, con un brusco incremento della mortalità, specie per la popolazione in età avanzate. Ecco perché, in Italia, i coefficienti di trasformazione del montante contributivo, attraverso cui il montante versato dal lavoratore durante la sua vita lavorativa viene trasformato nella pensione annua, normalmente aggiornati al ribasso, sono stati rivisti al rialzo per il biennio 2023-2024, sulla base del decreto interministeriale Lavoro-Economia del 1° dicembre 2022, con conseguenti pensioni erogate più alte.

Infine, nel paragrafo 5.6, emerge il vero e proprio rischio di longevità, come rischio legato all'incertezza nel parametro. Vista l'impossibilità di ricavare intervalli predittivi analiticamente, si utilizza una procedura di tipo bootstrap per calcolare intervalli di confidenza per valori attuariali e aspettative di vita, che mettono in luce quello che effettivamente il "longevity risk" può comportare per un fondo pensione.

Bibliografia

A., Glei Dana. «About Mortality Data for Italy.» 2022.

Aben, Maurits. «Overview of the Italian pension system.» 2011.

Antolin, Pablo. «Longevity Risk and Private Pensions.» OECD Working Paper on Insurance and Private Pensions No.3, 2007.

Antolin, Pablo, e Hans Blommestein. «Governments and the Market for Longevity-Indexed Bonds.» Working Paper on Insurance and Private Pensions, 2007.

Barr, Nicholas, e Peter Diamond . «The economics of pensions.» *Oxford Review of Economics Policy*, 2006.

Barrieu, Pauline, et al. «Understanding, Modeling and Managing Longevity Risk: Key issue and Main Challenges.» *Scandinavian Actuarial Journal*, 2012: 1 - 17.

Basel Committee on Banking Supervision. «Longevity Risk Transfer markets: market structure, growth drivers and impediments, and potential risk.» 2013.

Belzile, Lèo, Anthony Davison, Jutta Gampe, Holger Rootzèn, e Dmitrii Zholud. «Is There a Cap on Longevity? A Statistical Review.» *Annual Review of Statistics and Its Application*, 2022.

Biffis, Enrico, e David Blake. «Mortality-Linked Securities and Derivatives.» 2009.

Blake , D., A.J.G. Cairns, K. Dowd, e A.R. Kessler. «Still living with mortality: the longevity risk transfer market after one decade.» *British Actuarial Journal* , 2018: 1 - 65.

Blake , David, e John Pickles. *Apocalyptic demography? Putting longevity risk in perspective.* The Pensions Regulator, 2007.

Blake , David, Tom Boardman, e Andrew Cairns. «Sharing Longevity Risk: Why Governments Should Issue Longevity Bonds.» *North America Actuarial Journal*, 2014: 258-265.

Blake, D., A.J.G. Cairns, e Kevin Dowd. «Living with mortality: Longevity Bonds and Other Mortality - Linked Securities.» *British Actuarial Journal*, 2006.

Blake, D., e A.J.G. Cairns. «Longevity risk and capital markets: The 2019-2020 update.» *Insurance: Mathematics and Economics*, 2021.

Blake, D., e W. Burrows. «Survivor Bonds: Helping to Hedge Mortality Risk.» *Journal of Risk and Insurance*, 2001.

Blake, David. «Longevity: a new asset class.» *J Asset Manag*, 2018: 278-285.

Blake, David. «Pension Economics.» 1 - 10. 2006.

Blake, David, Andrew Cairns, e Kevin Dowd. «The Birth of the Life Market.» *Asia-Pacific Journal of Risk and Insurance*, 2008: 6-33.

Blake, David, Andrew Cairns, Guy Coughlan, Kevin Dowd, e Richard MacMinn. «The New Life Market.» *The Journal of Risk and Insurance* , 2013: 501-536.

Blake, David, Andrew Cairns, Kevin Dowd, e Richard MacMinn. «Longevity Bonds: Financial Engineering, Valuation, and Hedging.» *The Journal of RIsk and Insurance*, 2006: 647-660.

Booth, H., e L. Tickle. «Mortality Modelling and Forecasting: A review of methods.» *Annals of Actuarial Science*, 2008.

Booth, Heather, John Maindonald, e Len Smith. «Applying Lee-Carter under conditions of variable mortality decline.» 2002.

Brouhns , Natacha, Michel Denuit, e Ingrid Van Keilegom. «Bootstrapping the Poisson log-bilinear model for mortality forecasting.» *Scandinavian Actuarial Journal*, 2005.

Brouhns, Natacha, Michel Denuit, e Jeroen K. Vermunt. «A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables.» *Insurance: Mathematics and Economics*, 2002: 378-385.

Bugler, Nicholas, Kirsty Maclean, Vladimir Nicenko, e Patrick Tedesco. «Reinsurance Sidecars: The Next Stage in the Development of the Longevity Risk Transfer Market.» *North America Actuarial Journal*, 2021: 25-28.

Burne , Katy. «Swiss Re Longevity-Risk Deal Opens Door to More.» *Wall Street Journal*, 2011.

Cairns , Andrew J.G., David Blake, e Kevin Dowd. «A Two-Factor Model for Stochastic Mortality with Parameter Uncertainty: Theory and Calibration.» *The Journal of Risk and Insurance*, 2006.

Cairns, A.J.G., M. Kallestrup-Lamb, C.P.T. Rosenskjold, D. Blake, e K. Dowd. *Modelling socio-economic differences in the mortality of Danish males using a new affluence index.* Working Paper, Heriot-Watt University, 2017.

Cairns, A.J.G., M. Kallestrup-Lamb, P.T. Rosenskjold, D. Blake, e K. Dowd. «Modelling Socio-Economic Differences in the Mortality of Danish Males Using a New Affluence Index.» Pensions Institute Discussion Paper , 2019.

Cairns, Andrew J.G., David Blake, e Kevin Dowd. «Modelling and Management of Mortality Risk: A Review.» *Scandinavian Actuarial Journal*, 2008: 2-24.

Cairns, Andrew J.G., et al. «A Quantitative Comparison of Stochastic Mortality Models Using Data from England and Wales and the United States.» *North America Actuarial Journal*, 2009.

Coughlan, Guy D., David Epstein, Marwa Khalaf-Allah, e Chris Watts. «Hedging Pension Longevity Risk: Practical Capital Markets Solutions.» *Asia-Pacific Journal of Risk and Insurance*, 2008.

Coughlan, Guy, David Blake, Richard McMinn, Andrew J. G. Cairns, e Kevin Dowd. «Longevity Risk and Hedging Solutions.» In *Handbook of Insurance* , di Georges Dionne. Springer, 2013.

Coughlan, Guy, David Epstein , Amit Sinha, e Paul Honig. *q-Forwads : Derivatives for transferring longevity and mortality risk.* Report, Pension Advisory Group, 2007.

Currie , ID, M Durban, e PHC Eilers . «Generalized linear array models with applications to multidimensional smoothing.» *Journal of the Royal Statistical Society. Series B: Statistical Methodology*, 2006.

Davies, Ron. «Occupational pensions: second pillar provision in the EU policy context.» *European Network for Rural Development*, 2013.

De Waegenaere , Anja, Bertrand Melenberg, e Ralph Stevens. «Longevity Risk.» *De Economist*, 2010: 151-192.

Draper, Norman R., e Harry Smith. *Applied Regression Analysis.* New York: John Wiley & Sons, 2014.

Evandrou, Maria, e Jane Falkingham. «Ethic inequalities in limiting health and self-reported health in later life revisited.» *J Epidemiol Community Health*, 2016.

Federacion Internacional de Administradoras de Fondos de Pensiones. «The Notional Defined Contribution System: Analysis and International Experience.» *Pension Notes*, 2021.

Gintautas, Jakstas. «Quantyfing Longevity Risk.» Master of Science Thesis, 2014.

Haberman, S., e A. Renshaw. «A Comparative Study of Parametric Mortality Projection Models.» *Insurance: Mathematics and Economics*, 2011.

Hari, Norbert, Anja De Waegenaere, Bertrand Melenberg, e Theo Nijman. «Longevity Risk in portfolios of pension annuities.» *Insurance: Mathematics and Economics*, 2008: 505 - 519.

Human Mortality Database. «Brief Summary of the Methods Protocol for the Human Mortality Database.» Relazione, 2017.

ID, Currie. «On Fitting Generalized Linear and non-linear Models for Mortality.» *Scandinavian Actuarial Journal*, 2016.

Impavido, G. «Pension Funds.» In *Handbook of Key Global Financial Markets, Institutions, and Infrastructure*, di Gerard Caprio, 523 - 526. 2012.

International Labour Office. «The ILO Multi-Pillar pension model: Building equitable and sustainable pension systems.» 2018.

Jarner, Soren Fiig, e Thomas Moller. «A partial internal model for longevity risk.» *Scandinavian Actuarial Journal*, 2013.

Kessler, Amy. «New Solutions to an Age-Old Problem: Innovative Strategies for Managing Pension and Longevity Risk.» *North America Actuarial Journal*, 2019: 1-24.

Kirk, Baker. «Singular Value Decomposition Tutorial.» 2005.

Lannoo Karel, Mikkel Barslund, Ales Chmelar, e Marten Von Weder. *Pension Schemes.* Study, Policy Department A: Economic and Scientific Policy, 2014.

Lee, Ronald. «The Lee-Carter Method for Forecasting Mortality, with Various Extensions and Applications.» *North America Actuarial Journal*, 2000: 80-88.

Lee, Ronald, e Lawrence Carter. «Modeling and Forecasting U.S. Mortality.» *Journal of the American Statistical Association*, 1992: 659-668.

Lee, Ronald, e Timothy Miller . «Evaluating the performance of the lee-carter method for forecasting mortality.» *Demography*, 2001.

Levantesi, Susanna, e Massimiliano Menzietti. «I modelli di proiezione della mortalità.» *Giornata degli attuari delle pensioni.* Roma, 2011.

Li, J. «A Quantitative Comparison of Simulation Strategies for Mortality Projection.» *Annals of Actuarial Science*, 2014.

Li, Nan, e Ronald Lee. «Coherent mortality forecasts for a group of populations: An extension of the lee-carter method.» *Demography*, 2005.

Linda, Toneguzzo. *Longevity Risk: approccio Risk Management con estensione alle polizze LTC.* Tesi Magistrale, 2013.

Liu, Xiaoming. «Stochastic Mortality Modelling.» Tesi di dottorato, 2008.

Loeys, J., N. Panigirtzoglou, e R.M. Ribeiro. «Longevity: A Market in the Making.» J.P. Morgan Research Paper, London, 2007.

Maccheroni, Carlo, e Samuel Nocito. «Backtesting the Lee-Carter and the Cairns-Blake-Dowd Stochastic Mortality Models on Italian Death Rates.» Working Paper, 2017.

Marinelli, Nicoletta. *I fondi pensione in Italia. Aspetti peculiari e confronti internazionali.* Franco Angeli, 2011.

Marino, Marco. «Il rischio di longevità: Tecniche e strumenti di copertura.» Tesi Magistrale, 2014.

Mattil, Birgit. *Pension Systems.* Physica - Verlag, 2006.

Milevsky, Moshe A. *Life Annuties: an optimal product for retirement income.* The Research Foundation of CFA Institute, 2013.

Mulholland, Jeff, e Avery Michaelson. «Strategy for Increasing the Global Capacity for Longevity Risk Transfer: Developing Transactions that Attract Capital Markets Investors.» *The Journal of Alternative Investments*, 2014.

OECD. «Archtecture of national pension systems.» *Pension at a Glance 2017: OECD and G20 Indicators*, 2017: 86-87.

—. *Pensions at a Glance 2021*. 2021.

—. *Private Pensions: OECD Classification and Glossary.* 2005.

Olivieri , Annamaria, e Ermanno Pitacco. *Solvency Requirements for Pension Annuities.* Cambridge Univerisity Press, 2003.

Olivieri, Annamaria. «Uncertainty in mortality projections: an actuarial perspective.» *Insurance: Mathematics and Economics*, 2001: 231-245.

Olivieri, Annamaria, e Ermanno Pitacco. *Introduction to Insurance Mathematics.* Spriger International Publishing Switzerland, 2015.

—. *Life Annuities and Longevity Dynamics.* Università commerciale Luigi Bocconi, 2006.

Olivieri, Annamaria, e Ermanno Pitacco. «Stochastic Mortality in Life Insurance.» *Statistica Applicata*, 2006: 661-673.

Orsazg, Peter, e Joseph Stiglitz. «Rethinking pension reform: ten myths about social security systems.» In *New ideas about old age security: toward sustainable pension systems in 21st century*, di The World Bank. 2001.

Paci , Sergio. *Assicurazioni.* 2019.

Pigott, Christopher, e Michael Walker. «Longevity swap markets: why just the UK?» 2016.

Pirovano, Simone. «Projection of Mortality Tables: A Neural Network Approach.» Master of Science Thesis, 2020.

Pitacco, Ermanno. *Longevity Risk in Living Benefits.* Working Paper 23/02, Center for Research on Pensions and Welfare Policies, 2002.

Pitacco, Ermanno. «Survival models in a dynamic context: a survey.» *Insurance: Mathematics and Economics*, 2004: 279-286.

Pitacco, Ermanno, Michel Denuit, Steven Haberman, e Annamaria Olivieri . *Modelling Longevity Dynamics for Pensions and Annuity Business.* Oxford University Press, 2009.

Plat, Richard. «On Stochastic Mortality Modeling.» 2009.

Raggi, Davide. «Dispense di Econometria .» 2022.

Renshaw, A., e S. Haberman. «A Cohort-Based Extension to the Lee-Carter Model for Mortality Reduction Factors.» *Insurance: Mathematics and Economics*, 2006.

Russolillo, Maria. «Lee-Carter Mortality Forecasting: Methodological and Computational Issues.» Tesi di Dottorato in Matematica per l'Analisi Economica e la Finanza, 2005.

Spedicato, Giorgio Alfredo, e Gian Paolo Clemente. «Mortality projection with demography and lifecontingencies packages.» Paper, 2013.

Trzpiot, Grazyna, e Justyna Majewska. «Modeling longevity risk - the centrl European case.» 2015. 1 - 6.

Villegas, Andrès , e Steven Haberman. «On the modeling and forecasting of socioeconomic mortality differentials: an application to deprivation and mortality in England.» *North America Actuarial Journal*, 2014.

Villegas, Andrès. «Package "StMoMo".» 2018.

Villegas, Andrès, Pietro Millossovich, e Vladimir Kaishev. «StMoMo: An R Package for Stochastic Mortality Modeling.» Paper, 2018.

Willets, R.C. «The Cohort Effect: Insights and Explanations.» *British Actuarial Journal*, 2004.

World Bank Group. «Averting the old age crisis: policies to protect the old and promote growth.» Publication, Washington, 1994.

World Bank. «Notional Accounts: Notional Defined Contribution Plans as a Pension Reform Strategy.» *World Bank Pension Reform Primer Series*, 2005.

Yang, Bowen, Jackie Li, e Balasooriya Uditha. «Using bootstrapping to incorporate model error for risk-neutral pricing for longevity risk.» *Insurance: Mathematics and Economics*, 2015.

Yermo, Juan. *Revised Taxonomy for Pension Plans, Pension Funds and Pension Entities.* OECD, 2002.

Sitografia

- Annuario statistico regionale Lombardia, https://www.asr-lombardia.it
- Artemis, https://www.artemis.bm
- Bankpedia, https://www.bankpedia.org
- Commissione Europea, https://commission.europa.eu
- Employee Benefits, https://employeebenefits.co.uk
- Expat Info, https://www.iamexpat.nl/
- GitHub, GitHub: Let’s build from here · GitHub
- Human Mortality Database, https://mortality.org
- Il Sole 24 ore, https://www.infodata.ilsole24ore.com
- Investopedia, https://www.investopedia.com/
- Istat, http://dati.istat.it
- Knowable Magazine, https://knowablemagazine.org/
- OECD Data, https://data.oecd.org
- OECD, https://www.oecd.org
- PennState Eberly College of Science https://online.stat.psu.edu/
- RPubs, https://rpubs.com/
- Science Direct, ScienceDirect.com | Science, health and medical journals, full text articles and books.
- SWFI Institute, https://www.swfinstitute.org/
- Treccani https://www.treccani.it/enciclopedia/
- Wikipedia, https://en.wikipedia.org
- Wolters Kluwer, https://www.wolterskluwer.com