Università
Ca'Foscari
Venezia

Corso di Laurea magistrale
in Economia e finanza

Tesi di Laurea

Ca' Foscari
Dorsoduro 3246
30123 Venezia

Il modello Black e Litterman per l'allocazione ottima di titoli:

teoria ed applicazione

Relatore
Prof. Marco Corazza

Laureando
Alice Sbrogiò
Matricola 831111

Anno Accademico
2012 / 2013

Indice

Introduzione ***5***

Capitolo 1 - I modelli precursori al modello di Black e Litterman ***9***

1.1. Il modello per la selezione di portafoglio di Markowitz 9

1.1.1. Le mancanze della teoria di portafoglio standard 16

1.2. Capital Asset Pricing Model (CAPM) 22

1.2.1. La tecnica dell'ottimizzazione inversa 25

1.3. Il teorema di Bayes 27

Capitolo 2 - Il modello di Black e Litterman (modello BL) ***31***

2.1. La specificazione dei rendimenti (il modello di riferimento) 33

2.2. L'equilibrio di mercato 34

2.2.1. La specificazione di π 35

2.2.2. La specificazione di $\Sigma\pi$ 37

2.3. Le views 39

2.4. Il teorema di Bayes nel modello di Black e Litterman 43

2.5. I rendimenti attesi e i pesi ottimi finali 49

2.6. Estensione: Il modello di Black e Litterman quando le views dell'investitore sono errate o parzialmente errate 51

Capitolo 3 - Un'applicazione del modello Black-Litterman ***57***

3.1. Gli asset all'interno del portafoglio 58

3.2. L'ottimizzazione con i rendimenti storici 61

3.3. L'ottimizzazione con i rendimenti impliciti 64

3.4. La definizione delle views 69

3.5. L'ottimizzazione unendo i rendimenti di equilibrio e le views 71

Conclusioni ***77***

Bibliografia ***81***

Sitografia ***84***

Introduzione

Cercare un modello matematicamente solido in grado di prevedere e far guadagnare sul futuro andamento di titoli finanziari è lo scopo degli economisti da decenni. Il primo vero contributo alla materia viene da un modello proposto da Harry Markowitz nei primi anni Cinquanta, un modello così importante per tutta l'economia da essere considerato oggi il punto di partenza della finanza moderna e con il quale tutti i modelli successivi si devono e si dovranno confrontare. Il primo capitolo di questa tesi tratta proprio del modello di selezione di portafoglio classico proposto dal Markowitz, la cui rivoluzione risiede nel fatto che per primo teorizza il beneficio portato dalla diversificazione degli asset all'interno del proprio portafoglio. Nonostante l'importanza scientifica che riveste questo modello per tutta la materia finanziaria, il suo utilizzo pratico nella realtà da parte degli investitori è stato veramente contenuto. Le motivazioni sono facilmente riconducibili alle mancanze del modello di Markowitz largamente descritte da vari autori e riprese anche in questa tesi. In generale il modello non offre dei risulati che possano essere considerati veramente affidabili dato che massimizza l'errore di stima, portando a sovrastimare quei titoli che presentano un elevato rendimento atteso, basso rischio e bassa correlazione con gli altri titoli. L'effetto di questo problema si nota nella composizione del portafoglio finale, che risulta essere molto concentrata in pochi asset. Inoltre il modello, oltre a non essere affidabile nei risultati, non è nemmeno affidabile nel tempo dato che è sufficiente una piccola variazione negli input per ottenere come output una media, una varianza e una composizione del portafoglio ottimo completamente diversi da quelli calcolati precedentemente.

Dal modello di Markowitz sono nati altri modelli e approcci volti ad offrire un'alternativa agli investitori che volessero affidare le proprie scelte d'investimento ad un modello matematico affidabile. Uno degli ultimi in ordine di tempo è il modello sviluppato dagli americani Fisher Black e Robert Litterman all'interno di Goldman Sachs nei primi anni Novanta. Questo modello viene descritto in modo approfondito nella seconda parte di questa tesi. L'aspetto innovativo del modello Black Litterman risiede nel fatto che riesce a mettere insieme due tipo di informazioni diverse tra loro grazie al

teorema di Bayes, l'equilibrio di mercato e le opinioni dell'investitore sul futuro andamento del mercato, per ottenere un vettore e una matrice di varianza covarianza ottimi degli asset presi a riferimento per il proprio portafoglio. I risulati ottenuti verranno poi utilizzati dal classico approccio di ottimizzazione media-varianza per calcolare media, varianza e conseguentemente anche la composizione del portafoglio ottimo.

Uno dei punti di forza di questo modello è dato dal fatto che si basa su solidi modelli economici riuscendo ad ottenere dei risultati formalmente credibili. Infatti oltre ad affidarsi all'ottimizzazione media-varianza per trovare il portafoglio ottimo finale, il modello Black Litterman sfrutta la tecnica dell'ottimizzazione inversa, derivata dal Capital Asset Pricing Model (CAPM), per trovare i rendimenti di equilibrio utilizzati come punto di riferimento dal modello. Come scritto precedentemente, il modello Black Litterman non prende in considerazione solamente l'equilibrio di mercato come informazione di input, ma anche le opinioni, o views, dell'investitore e la sua fiducia in queste. Il portafoglio finale ottenuto sarà la media pesata di queste due informazioni: più le views dell'investore saranno estreme e/o maggiore sarà la sua fiducia nelle stesse, allora il portafoglio finale sarà sbilaciato verso le views, al contrario se le views si discostano poco dai rendimenti di equilibrio e/o è stata espressa poca *confidance*, allora il portafoglio finale sarà molto vicino a quello di equilibrio. Fino al caso estremo in cui l'investitore non abbia espresso nessuna view, in questo caso il portafoglio ottimo finale detenuto sarà uguale al portafoglio di mercato; il portafoglio di mercato è quel portafoglio che è composto dagli asset in misura proporzionale alla loro capitalizzazione di mercato e rappresenta infatti il punto d'equilibrio per il CAPM.

Nell'ultima parte della tesi sarà descritta un'applicazione del modello Black Litterman. Per farlo viene costruito un portafoglio composto da sette indici settoriali europei scelti tra i diciotto facenti parte del gruppo chiamato *STOXX Europe 600 Supersector Indices*. Dati questi indici vengono ottenuti tre portafogli ottimi utilizzando tre approcci differenti che alla fine verranno confrontati:

- un portafoglio calcolato utilizzando il classico modello di selezione del portafoglio di Markowitz, considerando perciò i rendimenti attesi e la matrice di

varianza covarianza ottenuti dai rendimenti storici e applicando l'ottimizzazione media-varianza;

- un portafoglio calcolato applicando la tecnica dell'ottimizzazione inversa derivata dal CAPM e ottenendo di conseguenza il portafoglio di mercato che, per questo modello, rappresenta l'equilibrio di mercato;
- il terzo portafoglio infine è quello ottenuto con il modello Black e Litterman, in questo caso quindi, attraverso il teorema di Bayes, vengono uniti i rendimenti impliciti precedentemente calcolati con alcune views. Si otterrà un vettore di rendimenti e una matrice di varianza covarianza che diventano gli input da inserire del classico approccio di ottimizzazione media-varianza per arrivare ad ottenere il portafoglio ottimo finale.

Capitolo 1 - I modelli precursori al modello di Black e Litterman

Il modello di Black e Litterman venne ideato dai due economisti americani agli inizi degli anni Novanta nel tentativo di trovare un approccio scientifico che potesse essere usato per definire la quantità di investimento più efficiente per ogni singolo titolo da inserire all'interno del proprio portafoglio. Fino a quel momento erano stati ideati vari modelli nel tentativo di trovare una soluzione ai limiti del modello di Markowitz, modello ideato agli inizi degli anni Cinquanta e considerato da tutta la letteratura il punto di partenza della finanza moderna. Tutti i modelli successivi a questo, compreso quello di Black e Litterman, hanno sempre cercato di trovare un approccio diverso al problema della selezione del portafoglio rispetto al modello di Markowitz che nel corso del tempo ha dimostrato di possedere vari limiti, che ne hanno causato un limitato uso pratico da parte degli investitori. Nonostante questo però, per dimostrare l'importanza che ha avuto il processo di ottimizzazione media-varianza, basti dire che rimane comunque il punto di partenza di tutti i successivi modelli finanziari.

Uno dei punti di forza del modello BL risiede nell'aver usato modelli e teoremi già noti per arrivare ad un approccio del tutto nuovo nella selezione di portafoglio. La novità del modello risiede nell'aver unito informazioni diverse per ottenere un vettore di pesi ottimi finali dei titoli che andranno a comporre il portafoglio. Questi due input sono rappresentati dai rendimenti di equilibrio ottenuti attraverso il Capital Asset Pricing Model e la tecnica dell'ottimizzazione inversa, e le views, cioè le opinioni che l'investitore possiede sul futuro andamento di mercato. Black e Litterman mettono insieme questi input con l'utilizzo del teorema di Bayes che permette di unire e pesare i due tipi di informazioni.

1.1. Il modello per la selezione di portafoglio di Markowitz

La vera sfida nella costruzione di un portafoglio finanziario è trovare quella combinazione di titoli che dia un alto rendimento affrontando il minor rischio possibile. La ricerca di questa combinazione ha dato vita per la prima volta ad un filone di studi

soltanto dopo la pubblicazione dell'articolo *Portfolio Selection* scritto da Harry Markowitz e pubblicato nel 1952[1]. Fino a quel momento negli studi finanziari si erano sempre presi in considerazione soltanto i movimenti di singoli titoli finanziari. Nel modello proposto da Markowitz invece l'autore afferma che non è sufficiente considerare soltanto le caratteristiche dei titoli presi individualmente, ma che è necessario tenere conto anche dei co-movimenti che avvengono tra loro e che sono rappresentati dalla covarianza tra gli assets. Markowitz infatti afferma che se l'investitore studia anche le correlazioni tra gli assets nella costruzione di un portafoglio, allora può costruirne di migliori, cioè che perfomino un rendimento atteso maggiore con lo stesso livello di rischio o che offrano un rischio minore aventi lo stesso livello di rendimento, rispetto a portafogli costruiti ignorando appunto gli effetti delle correlazioni tra gli assets. Nel modello di Markowitz il rischio è misurato dalla varianza. La varianza del portafoglio quindi è composta dalla varianza dei singoli titoli che formano il portafoglio e dalle correlazioni tra i titoli stessi. Per l'implementazione del modello quindi gli inputs richiesti sono: il rendimento atteso di ogni asset, la varianza di ogni asset e la covarianza tra i vari titoli.

Markowitz dimostra che un investitore, sotto determinate assunzioni, può costruire portafogli ottimi che, attraverso combinazioni efficienti di media, varianza e covarianza, massimizzino il rendimento atteso dato un certo livello di rischio, o, ugualmente, che minimizzino il rischio dato un certo livello di rendimento atteso. Questo effetto è raggiunto attraverso la diversificazione dei titoli all'interno del portafoglio. Lo stesso Markowitz nel suo articlo specifica che per diversizicazione non si intende che il portafoglio deve essere composto da una numero elevato di assets, ma che gli assets devono appartenere a settori che non siano caratterizzati da alti livelli di correlazione. Anche prima del 1952 la diversificazione era una strategia accettata per diminuire il rischio senza allo stesso tempo diminuire il rendimento, ma fino a quel momento non esisteva nessun fondamento teorico che la supportava. Il modello di Markowitz per la selezione di portafoglio basato sul criterio media-varianza è considerato ancora oggi il punto d'inizio della moderna teoria di portafoglio.

Nel modello descritto da Markowitz, il rischio è misurato come deviazione standard (volatilità) dei rendimenti intorno al loro valore atteso. Secondo il criterio media-

[1] Markowitz H. (1952), "Portfolio Selection", *The Journal of Finance*, Vol. 7, No. 1, pp. 77-91.

varianza un investitore non sceglierà mai un titolo (o un portafoglio) dominato da un altro asset, cioè che offra un rendimento minore e allo stesso tempo un rischio maggiore rispetto al secondo asset. Inserendo come input del procedimento, oltre al rendimento e al rischio, anche la covarianza è possibile disegnare un'iperbole, detta frontiera efficiente, che individua in ogni suo punto le combinazioni di asset che danno il maggior rendimento atteso dato un certo livello di rischio (o allo stesso modo il minor rischio dato un certo livello di rendimento). Nella figura sottostante (Figura 1) si può trovare un esempio di frontiera efficiente. La freccia evidenzia il Global Minimum Variance Portafolio, ossia il portafoglio che ha minor varianza rispetto a tutti i portafoglio che si trovano sulla frontiera, sulla parte superiore della frontiera rispetto al Global Minimum Variance Portafolio giacciono i portafogli efficienti, mentre, al contrario, tutti i portafogli che giacciono sulla parte inferiore della frontiera rispetto al Global Minimum Variance Portafolio sono portafogli inefficienti perchè, come si può vedere dalla figura, è possibile trovare dei portafogli che, offrendo lo stesso rischio, danno un rendimento più elevato.

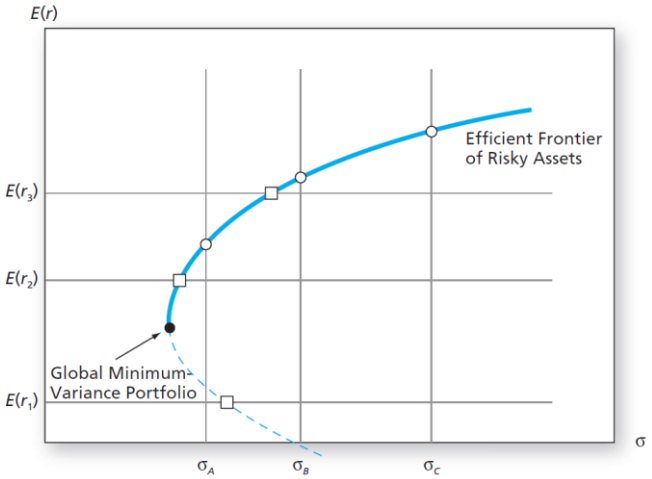

Figura 1: Esempio di frontiera efficiente.
Fonte: Bodie, Kane, Marcus (2011)

Il rendimento atteso e la varianza di ogni portafoglio *p* possono essere calcolati con le seguenti formule dove *w* identifica il peso che ha ogni titolo all'interno del portafoglio:

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^{n} w_i E(r_i)$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j Cov(r_i, r_j)$$

La frontiera efficiente alla Figura 1 descrive un numero illimitato di portafogli, tra tutti come è possibile identificare quale sia l'ottimo per un investitore? Il portafoglio ottimo per un investitore dipende dalla sua propensione al rischio. Infatti un investitore cerca di massimizzare la sua utilità, per farlo risolve la seguente funzione quadratica:

$$U = E(r) - A\sigma^2$$

Dove A identifica il coefficiente di avversione al rischio dell'investitore, quindi l'utilità (U) aumenta con rendimenti attesi alti, ma decresce con rischio elevato.

Nel piano media-varianza, se oltre alla frontiera efficiente viene disegnata anche la curva di indifferenza dell'investitore, cioè la curva che in ogni suo punto identifica i portafogli che gli sono indifferenti in base alla propria avversione al rischio e che massimizzano l'utilità, allora il portafoglio ottimo si trova nel punto di tangenza delle due curve. Nella Figura 2 sono rappresentate la frontiera efficiente e due curve di indifferenza: dalla pendenza delle due curve è possibile affermare che la curva il cui punto di tangenza con la frontiera efficiente a più a destra identifica un investore con molta avversione al rischio dato che ad un aumento del rischio viene richiesto un minore aumento del rendimento per riportare l'utilità al livello massimo.

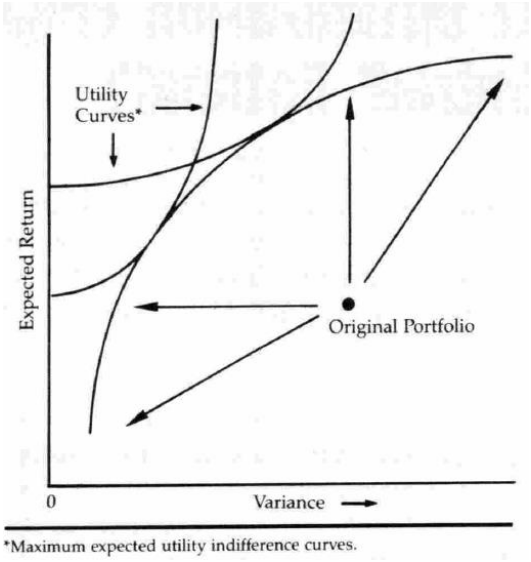

Figura 2: Tangenza tra frontiera efficiente e curve di indifferenza.
Fonte: Michaud (1989) [2]

La diversificazione dei titoli all'interno del portafoglio

Ruolo fondamentale nell'ottenimento di un portafoglio efficiente lo gioca la diversificazione dei titoli presenti al suo interno come dimostrato da Markowitz nel suo articolo. Infatti tutti i titoli, se presi singolarmente, giacciono a destra della frontiera efficiente dimostrandosi quindi inefficienti. Questo a sostegno che la diversificazione porta a maggiori livelli di rendimento atteso e minori livelli di deviazione standard.

Si può dimostrare che la diversificazione porta a portafogli maggiormente efficienti se viene definita la varianza media e la covarianza media degli assets rispettivamente come:

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2$$

$$\overline{Cov} = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\sum_{i=1}^{n} Cov(r_i, r_j)$$

[2] Michaud R.O. (1989), "The Markowitz optimization enigma: is 'optimized' optimal?", *Financial analysts journal*, Vol. 45, No. 1, pp. 31-42.

Da qui è possibile definire la varianza di portafoglio:

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{n}\bar{\sigma}^2 + \frac{n-1}{n}\,\overline{Cov}$$

Come si può notare dalla formulazione sopra espressa, quando la covarianza media tra il rendimento degli asset è zero, situazione che si verifica quando tutto il rischio è rappresentato da rischio sistematico[3], la varianza del portafoglio può essere quasi annullata, infatti il secondo termine a destra dell'espressione sarà zero mentre il primo termine a destra, che rappresenta il rischio specifico del titolo, si avvicina a zero quanto più il numero dei titoli (n) diventa elevato. Perciò quando i rendimenti dei vari titoli sono incorrelati tra di loro, la diversificazione può portare ad ottenere un valore del rischio di portafoglio molto basso. Viceversa, nel caso in cui la covarianza media tra i titoli sia positiva, anche se il portafoglio viene maggiormente diversificato al suo interno, la sua varianza rimane comunque positiva, infatti il secondo termine presente nella parte destra dell'equazione sopra descritta si avvicina alla covarianza media $\overline{Cov}$ tanto più n diventa elevato. Perciò il rischio di un portafoglio diversificato dipende dalla covarianza dei rendimenti dei titoli, che a sua volta è funzione del rischio sistematico presente nell'economia. Da quanto descritto si può fare un'ulteriore considerazione: quando un investitore detiene già un portafoglio diversificato e vuole aggiungere un ulteriore asset, il contributo che questo titolo porta al rischio totale del portafoglio dipende dalla covarianza del rendimento del titolo con quelle degli altri titoli, e non dalla sua varianza.

Il rapporto tra rischio sistematico e correlazione tra i titoli diventa maggiormente intuibile se si ipotizza che tutti gli asset abbiano una deviazione standard rappresentata da σ e tutte le coppie di asset abbiano un coefficiente di correlazione comune rappresentato da ρ. In questo modo la covarianza di tutte le coppie di titoli è $\rho\sigma^2$ e l'equazione sopra espressa diventa

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{n}\sigma^2 + \frac{n-1}{n}\,\rho\sigma^2$$

[3] Il rischio sistematico è il rischio legato all'oscillazione del mercato che non può essere ridotto con la diversificazione e si contrappone al rischio idiosincratico che è il rischio specifico dello strumento finanziario

Ora è più immediato intuire quello che è stato descritto precedentemente sulla correlazione: quando $\rho = 0$ viene confermato il principio che la varianza del portafoglio si avvicina a zero quanto più il numero dei titoli al suo interno diventa grande, mentre quando $\rho > 0$ la varianza del portafoglio rimane positiva, infatti prendendo il caso limite di $\rho = 1$, la varianza del portafoglio è uguale a σ^2, non importa quanto sia elevato il numero di asset al suo interno, dimostrando perciò che la diversificazione non porta nessun beneficio. Si può quindi affermare che nel caso in cui la correlazione sia perfetta, tutto il rischio sia rappresentato da rischio sistematico.

Anche se ancora oggi la teoria del portafoglio di Markowitz rappresenta il pilastro su cui si basa tutta la successiva finanza moderna, il suo impatto pratico nelle decisioni di investimento è stato incredibilmente contenuto. Da un punto di vista politico si possono ricondurre a due le principali motivazioni di questo fenomeno:

- l'ottimizzazione rispetto alla media e alla deviazione standard implica un trade-off tra rischio e rendimento lungo la frontiera efficiente ed i pesi del portafoglio sono soltanto il risultato di questa relazione, nella realtà però gli asset managers ragionano direttamente in termini di pesi. Trovano infatti che il procedimento per derivare pesi da un processo di ottimizzazione sia estremo, non intutivo, e perciò inappropriato per essere implementato ai portafogli dei clienti[4];
- nelle società d'investimento, le decisioni principali e maggiormente sensibili riguardanti gli asset su cui investire e soprattuto il loro peso all'interno del portafoglio vengono prese da commissioni composte da managers senior, queste figure vedrebbero minacciata la loro posizione dall'introduzione dell'uso di un modello matematico che indichi il portafoglio migliore in cui investire. Il maggior uso di un modello quantitativo infatti porterebbe a rivedere tutta la struttura organizzativa delle società d'investimento, e

[4] He G., Litterman R. (1999), "The intuition behind Black-Litterman model portfolios", *Working paper*.

maggiore importanza avrebbero figure con alti profili matematici e statistici a discapito delle attuali figure senior[5].

1.1.1. Le mancanze della teoria di portafoglio standard

Se le ragioni per le quali la teoria di portafoglio standard sia stata così poco usata dalle società d'investimento risiedesse solo in motivazioni politiche, è facile pensare che il modello di Markowitz sarebbe stato implementato da società più giovani e meno strutturate al loro interno se questo avesse dimostrato di poter ottenere portafogli che dessero rendimenti maggiori rispetto a quelli ottenuti con le tecniche adottate fino a quel momento. In realtà però è possibile dimostrare che il modello di Markowitz ha al suo interno diversi limiti che gli precludono il fatto di essere usato anche dalle società d'investimento più favolevoli ai cambiamenti.

L'ammontare di dati necessari

La bontà del portafoglio ottenuto con il processo di ottimizzazione risiede principalmente nella qualità dei dati di input necessari, cioè nella stima dei rendimenti attesi e nella matrice di varianza-covarianza; l'ammontare di questi dati però aumenta esponenzialmente con l'aumentare dei titoli presi in considerazione per il portafoglio rendendo difficile la loro stima. Ad esempio se un analista volesse prendere in considerazione 50 titoli da inserire nel portafoglio allora dovrebbe calcolare:

$$n = 50 \text{ stime di rendimenti attesi}$$
$$n = 50 \text{ stime di varianza}$$
$$(n^2 - n)/2 = 1225 \text{ stime di covarianza}$$

Il totale di stime da calcolare risulta 1325, un numero molto elevato per un portafoglio con una quantità di titoli relativamente bassa. Raddoppiando i titoli a 100 allora il numero di stime quasi quadruplicherebbe, infatti sarebbe di 5150. Mentre se ad esempio *n* fosse pari a 3000, numero vicino alla quantità di titoli presenti alla borsa di New York, sarebbero necessarie più di 4,5 milioni di stime.

[5] Michaud R.O. (1989), "The Markowitz optimization enigma: is 'optimized' optimal?", *Financial analysts journal*, Vol. 45, No. 1, pp. 31-42.

La massimizzazione dell'errore di stima

Forse il limite principale della tecnica ideata da Markowitz per il calcolo del portafoglio ottimo risiede nel fatto che il procedimento porta ad una massimizzazione dell'errore di stima, dove con errore di stima si intende la possibilità di commettere errori nel calcolo del portafoglio dovuta a imprecisioni nella stima degli input necessari per il processo di ottimizzazione. Questo processo infatti porta a sovrastimare quei titoli che presentano un elevato rendimento atteso, correlazioni negative e bassa varianza facendo di questi asset i principali componenti del portafoglio, sono questi titoli però quelli che sono maggiormente soggetti ad un'importante errore di stima. Naturalmente se gli input non presentassero errori di stima allora il processo di ottimizzazione media-varianza garantirebbe che il portafoglio calcolato sia quello ottimo, purtroppo però gli input non possono non avere errori di stima dato che sono delle stime statistiche essendo impossibile conoscere il loro valore reale ex-ante.

Il valore reale del rendimento, della varianza e della covarianza tra gli asset è possibile osservarlo soltanto ex-post, quindi un analista per inserirlo come input nella procedura dovrà calcolarlo, ottenendo delle stime che per assunto si distribuiscono come delle variabili casuali. La stima calcolata di tutti gli input necessari cadrà in un intervallo di confidenza che rappresenta la probabilità che il valore calcolato si avvicini al valore corretto. Quindi se gli input hanno un intervallo di confidenza, anche intorno alla frontiera efficiente reale è possibile definire una banda superiore e inferiore che determina lo spazio di tolleranza in cui cadrà la frontiera efficiente calcolata ex-ante, in altre parole non è possibile essere assolutamente certi che la frontiera efficiente calcolata sia quella reale, la probabilità che le due si avvicinino dipende dall'intervallo di confidenza. Nella Figura 3 è possibile vedere un esempio di questo concetto: la frontiera BE è la frontiera reale, mentre la frontiera AF rappresenta il limite superiore dell'intervallo di confidenza e la frontiera CD ne rappresenta quello inferiore. L'ampiezza dell'intervallo di confidenza è proporzionale all'errore di stima degli input e, come dimostrato da Dhingra (1980)[6], l'intervallo aumenta all'aumentare dei rendimenti attesi.

[6] Dhingra H. L. (1980), "Effects of estimation risk on efficient portfolios: a Monte Carlo simulation study", *Journal of Business Financial & Accounting*, Vol. 7, No. 2, pp. 277-295.

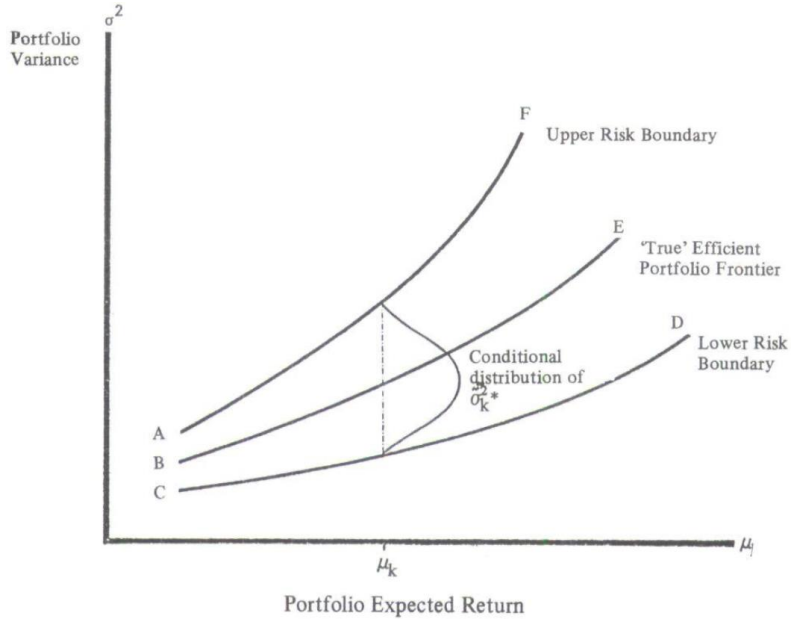

Figura 3: Rappresentazione dell'intervallo di confidenza intorno alla vera frontiera efficiente e della distribuzione condizionale della sua varianza.
Fonte: Dhingra (1980)

Il processo di ottimizzazione media-varianza porta quindi a sovrastimare i titoli che presentano una stima del rendimento atteso elevato, stima che però può non corrispondere al vero valore del rendimento portando alla definizione di un portafoglio che in realtà non è quello ottimo, dato appunto che si basa su stime che presentano degli errori. Un'altra conseguenza della sovrastima di determinati asset a discapito di altri è rappresentata dal fatto che il portafoglio ottenuto avrà un'importante partecipazione concentrata in pochi titoli. Un portafoglio del genere nella pratica è poco credibile e rinnega il principio della diversificazione che come dimostrato è uno dei punti chiave di ogni teoria di scelta di portafoglio.

Per quanto riguarda l'importanza relativa degli errori di stima di media, varianza e covarianza, Chopra e Ziemba (1993)[7] dimostrano che, in generale, l'errore nella stima dei rendimenti è dieci volte più importante rispetto agli errori di stima di varianza e covarianza, e che l'errore sulle varianze è importante circa il doppio rispetto all'errore sulle covarianze. I due autori però sostengono anche che l'importanza relativa varia a seconda del grado di avversione al rischio dell'investitore. Infatti per gli investitori con

[7] Chopra V., Ziemba W. (1993), "The effect of errors in means, variances, and covariances on optimal portfolio choice", *The Journal of Portfolio Management*, Vol. 19, No. 2, pp. 6-11

una tolleranza al rischio medio-alta gli errori di stima sul rendimento hanno un'importanza maggiore rispetto agli errori delle stime di varianze e covarianze dato che questi due paramatri influenzano in misura minore il processo di ottimizzazione media-varianza rispetto alla media; viceversa per un investitore con una propensione al rischio bassa, minimizzare la varianza del portafoglio è più importante rispetto all'aumentare del rendimento, perciò per questo investitore gli errori di stima della media sono in una certa misura meno importanti rispetto agli errori di varianza e covarianza.

Uno dei modi più efficaci per ridurre l'errore di stima in un processo di ottimizzazione media-varianza è quello di imporre dei vincoli, ad esempio impedendo l'assunzione di posizioni corte[8] (limite ragionevole dato che alcune legislazioni non consentono del tutto o in parte questa pratica), oppure imponendo dei vincoli di peso minimo e massimo nella percentuale di un titolo detenuto all'interno del portafoglio, in questo modo implicitamente si evitano eccessive concentrazioni di asset e viene determinato un numero minimo di titoli detenuti.

L'instabilità della composizione del portafoglio ottimo

Un altro dei problemi pricipali del processo di ottimizzazione media-varianza risiede nel fatto che la composizione del portafoglio ottimo risulta essere molto instabile, questo significa cioè che a piccoli cambiamenti negli input corrispondono grandi cambiamenti nella composizione del nuovo portafoglio ottenuto con i nuovi input. Nella pratica variazioni nelle stime degli input, dovuti ad esempio a nuove previsioni di mercato, sono abbastanza frequenti e quindi anche il ricalcolo del portafoglio ottimo che vede di volta in volta la modifica della sua composizione interna, ma questo è difficilmente accettabile dagli investitori perchè erode il livello di fiducia in tutto il procedimento e fa aumentare i costi da sostenere per detenere il proprio portafoglio. Inoltre non sono soltanto i titoli su cui si sono cambiati gli input a variare il proprio peso all'interno del portafoglio, ma varia il peso di tutti i titoli a causa delle forti interazioni tra tutti gli asset all'interno del mercato.

[8] Assumere una posizione corta nel mercato significa vendere titoli che ancora non si posseggono per ricomprarli successivamente, il guadagno si ottiene quindi se il prezzo del titolo nel frattempo è sceso. Al contrario si assume una posizione lunga quando si compra il titolo e poi lo si rivende, in questo caso il guadagno c'è quando il prezzo del titolo nel frattempo è salito.

Best e Grauer (1991)[9] a sostegno del problema dell'instabilità nella composizione del portafoglio ottimo dimostrano come i pesi del portafoglio calcolato, come il suo rendimento e la sua varianza siano estremamente sensibili a cambiamenti dei rendimenti degli assets. Nella Figura 4, al punto A viene indicato il portafoglio composto da dieci titoli con pesi ugualmente distibuiti tra loro, successivamente il rendimento di uno dei titoli viene aumentato di 0,5 % e l'investitore, che ha una tolleranza al rischio pari a 0,342, vede muoversi il proprio portafoglio ottimo al punto B, posizionato nella frontiera efficiente superiore. I due autori però arrivano a risultati diversi nel momento in cui vengono imposti dei vincoli di non-negatività, in questo caso infatti ottengono dei risultati che confermano che la composizione del portafoglio ottenuto con il procedimento media-varianza sia molto instabile, ma non lo è il suo rendimento. Infatti un piccolo incremento nel rendimento di un titolo compreso nel portafoglio ottimo porta a una variazione di metà della sua composizione, però il rendimento e la sua deviazione standard rimangono praticamente inalterate.

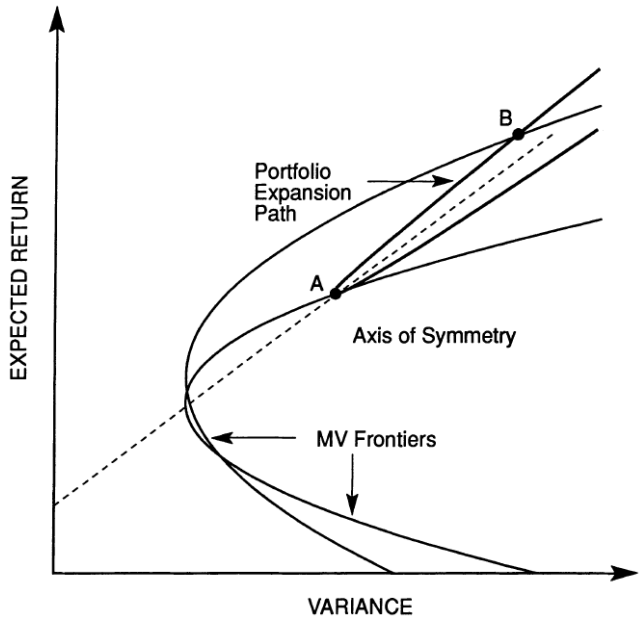

Figura 4: Variazione della frontiera effiente e del portafoglio ottimo a seguito di un cambiamento nella stima del rendimento di un titolo. Fonte: Best e Grauer (1991).

[9] Best M. J., Grauer R. R. (1991), "On the sensitivity of mean-variance-efficient portfolios to changes in assets means: Some analytical and computational results", *The review of Financial Studies*, Vol. 4, No. 2, pp. 315-342.

Altri limiti

Il processo di ottimizzazione di Markowitz non differenzia tra le views dell'investitore su cui è fermamente convinto e quelle su cui ha solo una vaga opinione, cioè il processo non distingue tra i diversi livelli di confidenza associate alle variabili di input. Inoltre queste opinioni, che dovranno essere tradotte in rendimenti attesi, possono essere solo assolute e non relative, cioè l'ipotesi che l'investitore può sostenere è che le caratteristiche di un certo titolo nel futuro cresceranno o si abbasseranno, ma non può sostenere che le caratteristiche di un titolo si alzeranno o abbasseranno rispetto ad altri titoli perché il modello di Markovitz quest'ultima osserazione non è in grado di tradurla in rendimenti.

Un'ulteriore critica molto rilevante mossa nei confronti del modello è l'impossibilità di confrontare le scelte finanziarie sostenute da due individui che hanno propensioni al rischio differenti. Questo è motivato dal fatto che per Markowitz la combinazione di titoli che soddisfa nel modo migliore l'investitore dipende anche dalla sua personale e unica propensione al rischio, che in un piano grafico è rappresentata dalla sua curva di utilità. Come è stato illustrato, è proprio il punto di tangenza tra la frontiera efficiente e la curva di utilità che determina il portafoglio migliore per un investitore. Questo portafoglio però, che rappresenta comunque una combinazione efficiente di titoli, è soggettivo e di conseguenza non può essere confrontato con nessun'altra combinazione scelta da un altro investitore che abbia una propensione al rischio, e quindi una diversa curva di utilità, diversa dal primo investitore. Questo mancanza è spiegabile dal fatto che Markowitz, per definire la frontiera efficiente, prende in considerazione solamente titoli rischiosi: sarà grazie ad altri modelli sviluppati negli anni successivi, come il Capital Asset Pricing Model (CAPM), che verrà superato questo limite includendo tra gli asset che possono essere scelti da un investitore anche un titolo risk free. Questo concetto come, in generale, il CAPM verranno sviluppati nel capitolo successivo.

Date le diverse difficoltà che comporta l'utilizzo nella pratica del modello di Markowitz, alcuni esperti si sono allontanati dal processo di ottimizzazione media-varianza per risolvere problemi lineari che sottostassero a vari vincoli volti alla massimizzazione dei rendimenti indipendentemente dalla varianza. Questi processi

quindi servono alla formazione di un portafoglio che non sia quello matematicamente più ottimale, ma soltanto uno più fattibile da implementare nella pratica.

1.2. Capital Asset Pricing Model (CAPM)

Più di un decennio dopo la pubblicazione del modello di selezione di portafoglio scritto da Markowitz, l'analisi media-varianza è sempre il punto di partenza di un nuovo modello proposto da Sharpe[10] che studia il rapporto tra rendimento e rischio dei titoli finanziari sotto l'ipotesi di equilibrio tra domanda e offerta: il Capital Asset Pricing Model (CAPM). Come verrà spiegato in questo capitolo, uno dei risultati principali del CAPM risiede nel mostrare che non tutto il rischio di un asset viene ricompensato dal mercato sotto forma di un maggior rendimento, ma soltanto quella parte che non può essere ridotta con la diversificazione.

Questo modello si basa su alcune ipotesi iniziali:

- si assume che tutti gli investitori siano avversi al rischio, e che le loro decisioni si basino sull'osservanza dei rendimenti attesi e della varianza;
- nell'universo ci sono molti investitori, ognuno dei quali è piccolo se confrontato con la totalità. Questo significa che gli investitori sono *price-takers*, cioè che le loro azioni non influenzano l'andamento generale del mercato;
- il periodo considerato è uniperiodale;
- gli investimenti possono essere fatti solo su un universo limitato di titoli pubblicizzati[11], come azioni e obbligazioni, e un titolo privo di rischio, inoltre gli individui possono prendere e dare in prestito un qualsiasi ammontare di denaro ad un unico tasso d'interesse rappresentato dall'asset privo di rischio;
- il mercato è perfettamente competitivo, non ci siano tasse e costi di transazione[12] da sostenere.

[10] Questo modello è stato proposto per la prima volta da William Sharpe nell'articolo "Capital Asset Prices: a Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk", *Journal of Finance* (1964), e viene sviluppato successivamente da Lintner (1965) e da Mossin (1966).
[11] Non viene preso in considerazione dal modello il fatto che un investimento può essere sostenuto anche su asset non finanziari, come il capitale umano.
[12] I costi di transazione sono le spese che devono essere sostenute da chi vuole effettuare uno scambio. In questo caso, per un investitore che vuole acquistare o vendere dei titoli finanziari, essi sono rappresentati ad esempio dal pagamento della parcella dell'intermediario, spese legali ecc.

Dato che tutti gli investitori hanno a disposizione le stesse informazioni e ottimizzano il proprio interesse con la metodologia media-varianza di Markowitz, ognuno detiene una combinazione ottimale del portafoglio di mercato[13] e dell'asset risk free. Infatti a causa delle assunzioni elencate precedentemente tutti gli individui inseriscono gli stessi input nel processo di ottimizzazione arrivando allo stesso risultato: il portafoglio migliore da detenere è una porzione di quello di mercato e dell'asset risk-free. La misura di quanto l'asset privo di rischio sia detenuto all'interno del portafoglio ottimo dipente dal grado di avversione al rischio (o più in generale dagli obiettivi d'investimento). È proprio l'esistenza di questo titolo risk free nel CAPM la principale e più significativa differenza con il modello di selezione del portafoglio di Markowitz perchè in questo modo vengono eliminate dal modello le curve di utilità e quindi la forte componente soggettiva nella scelta del portafoglio efficiente, infatti tutti gli individui investono nello stesso portafoglio di tangenza, ciò che cambia sono i pesi al suo interno dati ai diversi titoli, e in particolare al titolo privo di rischio.

In base a queste ipotesi, l'espressione formale del CAPM è la seguente:

$$E(r_i) - r_f = \beta_i(E(r_m) - r_f)$$

Dove:

$E(r_i)$ è il rendimento atteso dell'asset rischioso *i*

r_f è il rendimento dell'asset risk free

$E(r_m)$ è il rendimento atteso del portafoglio di mercato

β_i è un coefficiente uguale a $\frac{\text{Cov (R,Rm)}}{\text{Var(Rm)}}$ ed è una misura del rischio sistematico dell'asset *i*.

Quest'ultimo rapporto definito da β misura il contributo di *i* alla varianza del portafoglio di mercato come una parte della varianza totale del portafoglio di mercato: se la covarianza di *i* con il resto del portafoglio è negativa, allora il suo contributo stabilizzerà il rendimento dell'interro portafoglio, mentre se la covarianza di *i* nei

[13] Il portafoglio di mercato contiene al suo interno tutti gli asset presenti nel mercato con pesi proporzionali alla loro capitalizzazione di mercato.

confronti del portafoglio è positiva allora la sua inclusione ne rafforzerà gli andamenti variabili.

La differenza $E(r_i) - r_f$ è chiamata extrarendimento e rappresenta la distanza tra il rendimento atteso di un titolo rischioso e il rendimento di un titolo non rischioso. Dato che si assume che gli individui siano avversi al rischio, essi non investirebbero mai in titoli rischiosi se l'extrarendimento fosse pari a zero. Nel mercato infatti deve esistere almeno un titolo rischioso con rendimento maggiore al titolo risk free, altrimenti il titolo risk free dominerebbe tutti i titoli rischiosi e tutti gli investitori investirebbero in quest'ultimo titolo. Allo stesso modo la differenza $E(r_m) - r_f$ è la distanza tra il rendimento atteso del portafoglio di mercato e il rendimento del titolo non rischioso. In altre parole rappresenta il premio al rischio che l'individuo ottiene quando investite in titoli rischiosi e non nell'asset risk free.

Dall'espressione precedente si può notare come esista una relazione lineare tra il rendimento dell'asset risk free e il rischio. Sotto la teoria del CAPM il rischio idiosincratico può essere diminuito attraverso la diversificazione. Perciò l'investitore è premiato per il rischio sistematico misurato da β, ma non è premiato se assume rischio idiosincratico (appunto perché può essere annullato).

Il CAPM può essere espresso anche come regressione lineare:

$$r_{i,t} - r_f = \alpha + \beta(r_{m,t} - r_f) + \varepsilon_{i,t}$$

Dove:

$r_{i,t}$ è il rendimento dell'asset i al tempo t

$r_{m,t}$ è il rendimento del portafoglio di mercato al tempo t

$\varepsilon_{i,t}$ rappresenta l'errore, misura del rischio idiosincratico

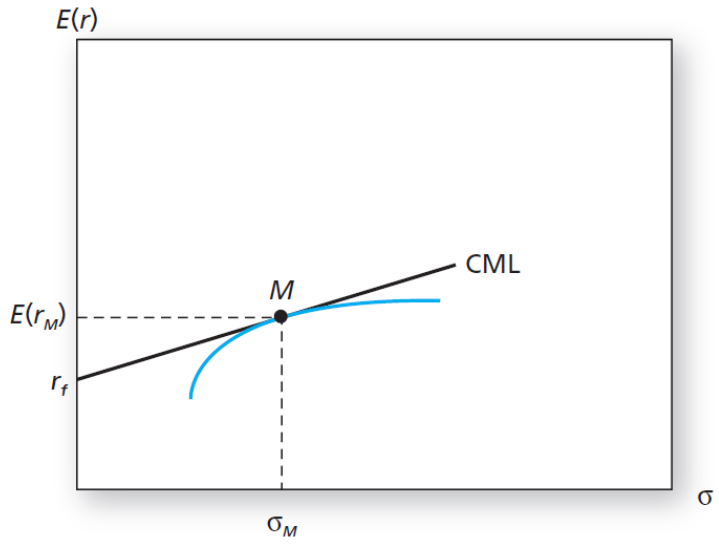

Figura 5: La frontiera efficiente e la Capital Market Line.
Fonte: Bodie, Kane, Markus (2011)

Nella Figura 4 è possibile osservare un esempio grafico del modello CAPM. Nello spazio media-varianza il punto M identifica il portafoglio di mercato che giace sulla frontiera efficiente, mentre la retta Capital Market Line (CML) è disegnata partendo dal tasso d'interesse del titolo privo di rischio e che passa per il portafoglio ottimo, da un diverso punto di vista il portafoglio ottimo rappresenta il punto di tangenza tra la retta e la frontiera efficiente. La pendenza di questa retta è misurata dall'indice di Sharpe che rappresenta la differenza tra il rendimento del portafoglio e il rendimento del titolo risk free rapportato alla varianza del portafoglio:

$$\text{Indice di Sharpe} = \frac{E(r_m)-r_f}{\sigma_m^2}$$

1.2.1. La tecnica dell'ottimizzazione inversa

Il metodo dell'ottimizzazione inversa (Sharpe (1974))[14] deriva dal modello CAPM e descrive come i rendimenti attesi possano essere calcolati in via implicita attraverso la conoscenza di alcuni parametri. Questa tecnica viene proposta da Sharpe con lo scopo di suggerire un metodo agli investitori comuni che possa cercare di svelare i processi di selezione di portafoglio delle imprese di investimento, ma anche per fornire

[14] Sharpe W.F. (1974), "Imputing expected security returns from portfolio composition", *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 9, No. 3, pp. 463-472.

uno strumento in più agli investitori istituzionali e non per migliorare l'efficienza nella selezione della composizione del portafoglio ottimo.

Per implementare la tecnica dell'ottimizzazione inversa e trovare il rendimento atteso del portafoglio ottimo, è necessario assumere che il portafoglio ottimo sia quello di mercato. Questa è un'ipotesi legittima se si assume che nel mercato tutti gli individui hanno le stesse informazioni e conoscenze scientifiche e coefficiente di avversione al rischio, condizione che porterebbe tutti gli investitori a considerare come ottimo il portafoglio di mercato.

Riportando uno schema di Sharpe in uno dei sui articoli più recenti[15] sul processo di ottimizzazione inversa, viene definito il portafoglio ottimo come la somma di determinati parametri:

Rendimenti attesi + Rischio + Correlazioni
+ Coefficiente di avversione al rischio → Portafoglio ottimo

Considerando il portafoglio di mercato come quello ottimo e riorganizzando i parametri di cui sopra, è possibile derivare indirettamente i suoi rendimenti attesi:

Portafoglio di mercato + Rischio + Correlazioni
+ Coefficiente di avversione al rischio → Rendimenti attesi

In termini più formali, dal CAPM è possibile derivare il calcolo degli extrarendimenti di equilibrio impliciti esprimendo così il rendimento di equilibrio del portafoglio di mercato e di Π:

$$r_m = \sum_{j=1}^{N} w_j r_j$$

$$\Pi_i = E(r_i) - r_f$$

allora

[15] Sharpe W.F. (2007), "Expected utility asset allocation", *Financial Analysts Journal*, Vol. 63, No. 5, pp. 18.

$$\Pi_i = \beta_i(E(r_m) - r_f)$$

$$\Pi_i = \frac{cov(r_i, r_m)}{\sigma_m^2}\ (E(r_m) - r_f)$$

$$\Pi_i = \frac{E(r_m) - r_f}{\sigma_m^2}\ \sum_{i=1}^{N} cov\left(r_i, r_j\right) w_j$$

$$\Pi = \delta \Sigma w$$

Con Σ, cioè la matrice di varianza covarianza, definita in questo modo:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} cov\ (r_1, r_1) & \cdots & cov\ (r_1, r_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ cov\ (r_m, r_1) & \cdots & cov\ (r_m, r_n) \end{bmatrix}$$

Dove:

Π è il vettore degli extrarendimenti di equilibrio (Nx1 vettore colonna)

δ è il coefficiente di avversione al rischio[16]

Σ è la matrice di varianza covarianza dei rendimenti (matrice NxN)

w rappresenta i pesi di capitalizzazione di mercato degli assets (Nx1 vettore colonna)

1.3. Il teorema di Bayes

Il teorema di Bayes consiste in una formula matematica che consente il calcolo di probabilità condizionali. In statistica, per probabilità condizionale si intende la possibilità di calcolare la probabilità che un determinato evento accada data la probabilità che un altro evento collegato al primo avvenga. Il teorema di Bayes, formalizzato nella seconda metà del 1700 e ripreso da varie discipline scientifiche, è una pietra miliare della statistica perchè consente di esplicitare in modo chiaro le differenti probabilità derivanti da decisioni alternative.

[16] Il coefficiente di avversione al rischio descrive il trade-off tra rischio e rendimento. E' il tasso al quale un investitore rinuncia a rendimento per ottenere minore varianza.

Il teorema di Bayes esprime che la probabilità dell'avvenimento di A dato B è uguale al rapporto tra la probabilità condizionata dell'avvenimento di B dato A per la probabilità di A e la probabilità di B:

$$P\,(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

Dove:

P(A|B) è la probabilità condizionata (o congiunta) dello stato A dato B, infatti la probabilità che B avvenga modifica la probabilità che A avvenga

P(B|A) è la probabilità condizionata dello stato B, dato A

P(A) è la probabilità che si verifichi lo stato A. Rappresenta la probabilità a priori (*prior distribution*) perché l'avvenimento di A non dipende da B

P(B) è la probabilità che si verifichi lo stato B. E' una costante di normalizzazione.

P(A|B) viene detta probabilità a posteriori (*posterior distribution*), cioè significa che la probabilità che avendo osservato l'evento B questo sia generato dalla causa A, in funzione delle probabilità a priori P(A) e di P(B|A).

Per chiarire il teorema di Bayes, viene descritto un esempio tratto da Piccolo (2010)[17].

Si suppone che un certo sintomo B (come la febbre) possa essere l'effetto soltanto di tre malattie, A_1, A_2, A_3 con la rispettiva probabilità:

$P(B|A_1) = 0{,}90$

$P(B|A_2) = 0{,}10$

$P(B|A_3) = 0{,}30$

Inoltre è stato calcolato che le tre malattie hanno la seguente probabilità a priori di verificarsi:

[17] Piccolo D. (2010), *Statistica*, Il Mulino, Bologna.

$P(A_1) = 0{,}03$

$P(A_2) = 0{,}70$

$P(A_3) = 0{,}27$

Bisogna quindi calcolare quale delle tre malattie possa avere contratto un paziente che ha riscontrato il sintomo B, in altre parole bisogna calcolare e confrontare tra loro le probabilità a posteriori $P(A_1|B)$, $P(A_2|B)$, $P(A_3|B)$.

Osservando i dati sopra esposti è possibile affermare come sia, a priori, la malattia A_2 la più probabile ad essere contratta da un paziente, mentre il sintomo B è più probabile che venga osservato a seguito della malattia A_1, che però è la meno diffusa.

Sapendo che P(B) è uguale a:

$$P(B) = P(A_1)\,P(B|A_1) + P(A_2)\,P(B|A_2) + P(A_3)\,P(B|A_3)$$

Allora il teorema di Bayes applicato all'esempio da le seguenti probabilità a posteriori:

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)}$$

$$P(A_1|B) = \frac{(0{,}03)(0{,}90)}{(0{,}03)(0{,}09) + (0{,}70)(0{,}10) + (0{,}27)(0{,}30)} = 0{,}15169$$

$$P(A_2|B) = \frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)}$$

$$P(A_2|B) = \frac{(0{,}70)(0{,}10)}{(0{,}03)(0{,}09) + (0{,}70)(0{,}10) + (0{,}27)(0{,}30)} = 0{,}39326$$

$$P(A_3|B) = \frac{P(B|A_3)P(A_3)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)}$$

$$P(A_3|B) = \frac{(0{,}27)(0{,}30)}{(0{,}03)(0{,}09) + (0{,}70)(0{,}10) + (0{,}27)(0{,}30)} = 0{,}45505$$

Dai risultati ottenuti, la presenza del sintomo B ha modificato la graduatoria delle malattie, infatti se prima la malattia più probabile era la A_2, ora la presenza di B fa in modo che il paziente abbia riscontrato con maggior probabilità la malattia A_3, seguita da A_2 e da A_1.

Capitolo 2 - Il modello di Black e Litterman (modello BL)

Nei primi anni Novanta Fischer Black e Robert Litterman[18] svilupparono, all'interno di Goldman Sachs, un modello per il calcolo dei pesi ottimali di portafoglio che fin dal primo momento ha guadagnato la fiducia di molti operatori istituzionali grazie al fatto che trova una soluzione a diversi punti critici del modello di Markowitz. In generale il modello BL permette di combinare in modo efficace l'equilibrio di mercato con le opinioni dell'investitore, producendo alla fine sia un set di rendimenti attesi e varianza dei singoli assets da utilizzare poi come input nella classica procedura di ottimizzazione media-varianza di Markowitz per ottenere il rendimento atteso e la varianza del portafoglio ottimo e la sua composizione interna. Uno dei punti di forza del modello BL risiede nel fatto che i pesi del portafoglio finale si scosteranno da quello di mercato (considerato quello neutrale, di equilibrio) a seconda di quanto le opinioni siano estreme e della fiducia che l'investitore ripone nelle stesse. Intuitivamente quindi se il manager non avesse nessuna views, deterrebbe in mano una fetta del portafoglio di mercato, dato che il portafoglio di equilibrio viene calcolato attraverso il Capital Asset Pricing Model e la tecnica dell'ottimizzazione inversa. Si può vedere il modello BL come due regressioni lineari: la prima tra i rendimenti attesi di equilibrio (derivati con la teoria del CAPM) e i rendimenti attesi dall'investitore (che rappresentano le sue opinioni sul futuro andamento del mercato), e la seconda tra i rendimenti attesi calcolati dalla prima regressione lineare e i rendimenti attesi che nel tempo si verranno a verificare nella realtà[19]; in questo modo è possibile costruire un portafoglio sempre vicino ai dati reali.

Il modello BL utilizza l'approccio bayesiano per calcolare i rendimenti attesi degli assets. Il teorema di Bayes viene infatti ripreso da Black e Litterma per unire i due tipi di input: le views dell'investitore rappresentano la *prior distribution* e l'equilibrio di

[18] Black F., Litterman R. (1991), "Asset Allocation: combining investor views with market equilibrium", *The Journal of Fixed Income*, September, pp. 7-18
Black F., Litterman R. (1992), "Global Portfolio Optimization", *Financial Analysts Journal*, Vol. 48, No. 5, pp. 28-43.

[19] La distribuzione a posteriori che era stata calcolata dalla prima regressione lineare ora diventa un'informazione a priori per la costruzione del nuovo portafoglio.

mercato l'informazione aggiuntiva, e grazie al teorema di Bayes è possibile unire queste informazioni e ottenere il set di rendimenti attesi dei titoli considerati. Questo approccio può essere criticato perché si ritiene non sia abbastanza oggettivo. Si può però replicare come, alla fine, ogni tipo di approccio sia soggettivo, dato che è impossibile testare ogni singola combinazione di variabili, considerando nella pratica soltanto quelle che si ritiene siano più "sensate"; inoltre, nello specifico, il modello BL supera la criticità della soggettività perché prende come riferimento un modello di equilibrio (CAPM).

Rispetto all'approccio proposto da Markowitz, il modello di Black e Litterman risolve alcuni dei suoi limiti per calcolare il portafoglio ottimo e le quantità d'investimento al suo interno:

- considera le capitalizzazioni di mercato dei vari titoli: questo perchè il modello di equilibrio è il CAPM che identifica nel portafoglio di equilibrio quello di mercato, questo portafoglio è composto da asset con una quantità proporzionale alla propria capitalizzazione di mercato;
- considera il grado di fiducia che l'investitore ha nei confronti degli input: per implementare il modello BL è necessario che venga definita la fiducia che viene riposta nelle views in quella che viene definita matrice di confidenza; invece per quanto riguarda il portafoglio di equilibrio, il grado di fiducia è considerata essere la sua varianza, quindi maggiore è il rischio e minore sarà il suo peso all'interno del portafoglio ottimo una volta uniti i vari input.

Nei capitoli seguenti verrà descritto il modello di Black e Litterman nel dettaglio: il processo con cui si arriva alla specificazione dei rendimenti attesi e della matrice di varianza covarianza è la novità che porta il modello BL nella teoria di scelta di portafoglio generale. Per l'implementazione di questo modello, l'investitore prende come riferimento la distribuzione della stima della media dei rendimenti $\mu \sim N(\Pi, \Sigma\tau)$ e ne calcola la media e la varianza utilizzando il modello CAPM e la tecnica dell'ottimizzazione inversa, Black e Litterman infatti fanno delle assunzioni secondo le quali il portafoglio di mercato rappresenta il portafoglio di equilibrio che tutti gli individui arrivano ad ottenere avendo le stesse informazioni. Contemporaneamente l'analista calcola la distribuzione dei rendimenti a seguito delle proprie opinioni sul futuro andamento del mercato. Anche in questo caso i rendimenti si distribuiscono come $N \sim (Q, \Omega)$, dove Q è un vettore che

incorpora le views dell'investitore e Ω è una matrice diagonale che contiene la sua *confidence* nei confronti delle views espresse. Unendo le due distribuzioni con il teorema di Bayes si viene ad ottenere un vettore di rendimenti attesi dei titoli che l'investitore ha considerato per il proprio portafoglio e che è più sbilanciato verso i rendimenti di equilibrio o le views a seconda di quanta fiducia l'analista ha riposto nelle stesse e di quanto le views siano estreme. Il vettore di rendimenti attesi e la matrice di varianza covarianza così ottenute vengono quini immesse nel classico processo di ottimizzazione di Markowitz che produce la frontiera efficiente e la definizione del portafoglio ottimo. Quando sarà necessario aggiornare i dati perchè l'investore vuole esprimere delle nuove previsioni, la distribuzione calcolata precedentemente, a cui si aggiungeranno le views, diventa il nuovo punto di partenza del modello BL. In questo modo, con il passare del tempo e l'aumentare degli update, si otteranno dei rendimenti sempre più stabili per l'elevato numero di dati immessi nel procedimento, questo porterà ad ottenere risultati più concentrati intorno alla media che può essere intesa come rendimento di lungo periodo per l'assunzione che i rendimenti di tutti i titoli tendo al proprio valore di equilibrio.

2.1. La specificazione dei rendimenti (il modello di riferimento)

Il modello di riferimento può essere considerato come la base su cui è costruito il resto del modello BL.

Si assume che i rendimenti attesi siano distribuiti come una normale con media μ e con varianza Σ

$$E(r) \sim N(\mu, \Sigma)$$

Viene definita anche μ, la media dei rendimenti attesi, come una variabile casuale distribuita come una normale. Questo perchè, dato che μ non può essere stimata con certezza, allora è modellata come una variabile casuale la cui dispersione rappresenta il possibile errore di stima

$$\mu \sim N(\pi, \Sigma_\pi)$$

dove π rappresenta la stima della media (cioè la migliore approssimazione a μ) e Σ_π è la varianza (distanza) della stima dalla media dei rendimenti μ. Un altro modo per rappresentare questa relazione lineare è la formula:

$$\pi = \mu + \varepsilon$$

Questa formula potrebbe sembrare incorretta dato che π si trova a sinistra. Però dato che π varia attorno al valore μ con un errore di ε, allora la fomula è specificata nel modo corretto.

ε si distribuisce come una normale di media 0 e di varianza Σ_π. Si assume che ε non sia correlata con μ. Possiamo completare il modello di riferimento definendo Σ_r come la varianza di π. Dalla formula precedente e dall'assunzione che ε e μ non sono correlati, allora la formula per calcolare Σ_r è:

$$\Sigma_r = \Sigma + \Sigma_\pi$$

Questa formula esprime che la relazione tra le varianze è ($\Sigma_r \geq \Sigma, \Sigma_\pi$).
Per assicurare che il modello di riferimento sia corretto, è possibile controllarlo testandolo nelle condizioni limite. In assenza dell'errore di stima, cioè $\varepsilon \equiv 0$, allora $\Sigma_r = \Sigma$. Se la stima peggiora, cioè Σ_π aumenta, allora Σ_r aumenta allo stesso modo.

Nel modello di riferimento quindi i rendimenti attesi sono specificati in questo modo:

$$E(r) \sim N(\pi, \Sigma_r)$$

2.2. L'equilibrio di mercato

Il portafoglio che rappresenta l'equilibrio di mercato è il portafoglio che un investitore dovrebbe detenere se non avesse nessuna view. Nella pratica infatti l'equilibrio può appunto fornire all'investitore un punto di riferimento importante nel caso non abbia nessuna opinione sul futuro andamento degli assets.

Da un punto di vista più formale, usare il portafoglio di neutrale come punto di riferimento per la costruzione del portafoglio ottimo è uno degli aspetti più importanti del modello BL perché permette di ottenere un portafoglio più stabile e con pesi più ragionevoli rispetto alla tecnica tradizionale di ottimizzazione media-varianza.

Black e Litterman individuano come definizione di "neutrale" un set di rendimenti attesi che porterebbero all'uguaglianza tra domanda e offerta di assets nel mercato se tutti gli investitori avessero le stesse informazioni (non ci sarebbero perciò views). Questo significa cioè che se le uniche informazioni in possesso degli investitori fossero

informazioni pubbliche e tecniche di calcolo uguali, allora è più sensato affidarsi ad approcci per il calcolo dell'equilibrio di mercato piuttosto che affidarsi alle proprie informazioni (che comunque sarebbero uguali a quelle di tutti gli altri individui) perché i rendimenti attesi si distribuirebbero con una media più affidabile e con una varianza minore. In poche parole si può affermare che, in questo caso, il mercato è più intelligente degli individui[20]. L'assunzione indica che tutte le informazioni pubbliche sono utilizzate dal mercato nella formazione del prezzo dei titoli e che perciò non possono portare ad ottenere rendimenti abnormi. In altre parole soltanto avendo a disposizioni informazioni private e tecniche superiori è possibile per i manager avere rendimenti superiori.

2.2.1. La specificazione di π

Black e Litterman utilizzano la tecnica dell'ottimizzazione inversa, derivata dal CAPM, per calcolare gli extrarendimenti attesi del portafoglio di equilibrio che, rispetto al modello di riferimento specificato precedentemente, rappresentano la media di μ. Dal CAPM è possibile esprimere gli extrarendimenti di equilibrio usando il metodo dell'ottimizzazione inversa dove il vettore degli extrarendimenti di equilibrio può essere espresso come funzione di tre parametri noti:

$$E(r_i) - r_f = \Pi = \delta \Sigma w$$

Dove:

Π è il vettore degli extrarendimenti di equilibrio (Nx1 vettore colonna)

δ è il coefficiente di avversione al rischio[21]

Σ è la matrice di varianza covarianza dei rendimenti (matrice NxN)

w rappresenta i pesi di capitalizzazione di mercato degli assets (Nx1 vettore colonna)

La tecnica dell'ottimizzazione inversa lavora al contrario (*backwards*). Assume infatti che il set di pesi del portafoglio w_{mrk} sia ottimo, e risolve l'equazione per trovare

[20] Ipotesi di efficienza del mercato semi-forte.
[21] Il coefficiente di avversione al rischio descrive il trade-off tra rischio e rendimento. E' il tasso al quale un investitore rinuncia a rendimento per ottenere minore varianza.

un vettore di extrarendimenti impliciti. Intuitivamente questo approccio è molto vicino al CAPM, infatto allo stesso modo si afferma che i prezzi si aggiusteranno finchè non si raggiungerà l'equilibrio di mercato dove i rendimenti attesi sono tali che la loro domanda sia perfettamente uguale all'offerta.

La formula precedente è derivata dal fatto che se il mercato è efficiente, il mercato massimizza la seguente funzione di utilità rispetto a *w*:

$$U(w) = w\Pi - \frac{\delta}{2} w\Sigma w$$

$$U'(w) = 0$$

$$\rightarrow \quad 0 = \Pi - \delta\Sigma w$$

$$\rightarrow \quad \Pi = \delta\Sigma w$$

Come si può intuire, la composizione del portafoglio ottimo che si ottiene usando i rendimenti impliciti invece di quelli storici ha pesi uguali alla capitalizzazione pesata degli asset che lo compongono all'interno del mercato. Questo perchè, usando la capitalizzazione dei titoli come input al processo di ottimizzazione per ottenere come risultato i rendimenti attesi, se si utilizza il processo standard media-varianza con input i rendimenti appena calcolati, il portafoglio ottimo avrà composizione uguale a quello di mercato.

La specificazione di δ

È possibile calcolare il coefficiente di avversione al rischio del mercato moltiplicando entrambi i lati della formula precedente per w e sostituendo i vettori con scalari:

$$w\Pi = \delta w\Sigma w$$ [22]

$$\rightarrow E(r) - r = \delta\, \sigma_M^2$$

[22] wΠ rappresenta l'extrarendimento del portafoglio di mercato perciò è uguale a E(r) – r_f
wΣw rappresenta la varianza del portafoglio di mercato

$$\rightarrow \delta = \frac{E(r_m) - r_f}{\sigma_m^2}$$

Dove:

$E(r_m)$ è il rendimento del portafoglio di mercato

r_f è il tasso fisk free

σ_m^2 è la varianza del portafoglio di mercato

Il coefficiente di avversione al rischio in questo modo è definito come la performance di Sharpe; è ragionevole usare questo rapporto come misura dell'avversione al rischio perché la performance di Sharpe, come scritto precedentemente, misura quanto un investitore è premiato in termini di rendimento per il rischio assunto.

La specificazione di w

Il portafoglio di mercato è formato da tutti gli assets presenti nel mercato nella quantità della loro capitalizzazione rispetto alla capitalizzazione di mercato.

Per trovare il pesi dell'asset i-esimo:

$$w_i = \frac{ci}{cm}$$

Dove:

c_i è la capitalizzazione del titolo *i*

c_m è la capitalizzazione del mercato

2.2.2. La specificazione di Σπ

Ritornando al modello di riferimento, rimane ora da calcolare la varianza della stima della media dei rendimenti, Σ_π. Black e Litterman fanno l'assunzione che la struttura di questa matrice di varianza covarianza sia proporzionale alla matrice di varianza

covarianza dei rendimenti, cioè Σ. Hanno perciò creato un parametro, τ, come costante di proporzionalità. Data questa assunzione:

$$\Sigma_\pi = \tau\Sigma$$

Intuitivamente la distribuzione della media dei rendimenti di mercato è:

$$\mu \sim N(\Pi, \tau\Sigma)$$

Si arriva ad ottenere un vettore degli extrarendimenti di lungo periodo. L'assunzione è che il mercato non sia sempre in equilibrio, ma piuttosto che quando i rendimenti si allontanino dai loro valori di equilibrio aggiustamenti di mercato li riportino indietro. E' perciò naturale che un investitore voglia approfittare di questi scostamenti combinando quelle che sono le sue opinioni con i rendimenti e i prezzi di equilibrio. Anche se, in ogni caso, è improbabile che i rendimenti si allontanino eccessivamente dai valori di equilibrio.

La specificazione di τ

τ è uno scalare compreso tra 0 e 1, ma è spesso posto vicino a 0 [23]. Questo perché l'incertezza (varianza) riguardo la media della distribuzione è minore rispetto l'incertezza (varianza) dei rendimenti stessi. In altre parole τ misura il grado di certezza che l'investitore detiene sulla vicinanza di Π rispetto al vero valore di equilibrio, perciò appunto τ dovrebbe essere molto vicino a 0.

Solitamente, per convenzione, τ viene compreso tra 0,01 e 0,05. Altrimenti uno dei metodi per calibrare τ può essere ricavato dalla statistica di base. Quando si stima la media di una distribuzione, l'incertezza della stima sarà inversamente proporzionale al numero di osservazioni, perciò in questo caso maggiore è il dataset, minore è l'influenza degli errori e maggiore è la stima di Π, e il valore di τ decresce:

$$\tau = \frac{1}{T} \quad \textit{Stimatore di massima verosomiglianza}$$

$$\tau = \frac{1}{T-k} \quad \textit{Miglior stimatore quadratico}$$

[23] Autori come Satchell e Scowcroft (2000) invece affermano che τ sia invece uguale a 1 perché non considerano il fatto che la varianza venga aggiornata.

Dove:

T è il numero di osservazioni

k è il numero di asset considerati

Il valore di τ dovrebbe però essere misurato prendendo in considerazione anche il grado di incertezza che il manager detiene sulle proprie views in modo da dare coerenza a tutto il procedimento.

2.3. Le views

Come detto precedentemente, nel modello BL è possibile creare un portafoglio ottimo che abbia come base il portafoglio di mercato. Questo portafoglio può essere modificato aggiungendo nuovi dati a seconda delle informazioni in possesso dell'investitore e della sua fiducia in esse. Perciò se il manager non avesse nessuna views deterrebbe una fetta del portafoglio di mercato, al contrario se ne avesse, deterrebbe un portafoglio che si allontana da quello di equilibrio tanto sono più estreme e quanta più fiducia ha nelle sue opinioni.

Una delle maggiori novità del modello BL è che permette di esprimere due tipi di views:

- views assolute cioè il parere dell'investitore è che un asset dia un maggiore o minore rendimento rispetto ad esempio del suo rendimento registrato l'anno precente, questo è l'unico tipo di views che un investitore può inserire nel processo di Markowitz;
- views relative cioè il parere dell'investitore è che un asset dia un rendimento maggiore o minore rispetto al rendimento di un altro asset.

Quindi gli input da inserire per quanto riguarda le views sono le opinioni che ha l'investitore sul futuro andamento degli asset e una matrice che contenga la fiducia che ripone in esse. Le views possono anche essere in conflitto tra loro perché sarà poi il processo che combinerà le views e l'equilibrio con i rispettivi errori.

Ipotizzando che l'investitore abbia k diverse opinioni su un totale di n assets, le views sono rappresentate sottoforma di combinazioni lineari di rendimenti attesi:

$$P \cdot \mu = Q + \varepsilon^{v}$$

Dove:

P è una matrice (k x n) che contiene il peso di ogni views dell'investitore, ogni riga di P rappresenta una view, dove il valore è diverso da 0 se il corrispettivo asset è soggetto a un'opinione, altrimenti è uguale a 0 [24]. Se la view è relativa allora la somma dei pesi sarà uguale a 0, se la view è assoluta allora la somma dei pesi sarà uguale a 1

μ è il vettore (n x 1) che contiene la media dei rendimenti attesi

Q è un vettore (k x 1) che contiene i rendimenti previsti per ogni views

ε^{v} è un vettore (k x 1) che contiene gli errori casuali commessi nelle views

Esempio tratto da Bagasheva, Fabozzi, Hsu, Rachev (2008)[25].

Assumiamo di avere quattro assets, A, B, C, D, e tre views:

- il prossimo periodo l'asset A registrerà un rendimento del 7,4% *(view assoluta)*
- il prossimo periodo l'asset B registrerà un rendimento del 5,5% *(view assoluta)*
- il prossimo periodo l'asset C registrerà un rendimento superiore rispetto B, C e D del 2% *(view relativa)*

Le matrici P e Q sono specificate in questo modo:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 1 & -1/3 \end{bmatrix} \; ; \; Q = \begin{bmatrix} 0{,}074 \\ 0{,}055 \\ 0{,}02 \end{bmatrix}$$

[24] E' intuitivo quindi osservare che se il manager avesse tante views quanti sono gli assets, allora P avrà tante righe quanti sono gli assets.
[25] Bagasheva B.S., Fabozzi F.J., Hsu J., Rachev S. (2008), *Bayesian Methods in Finance*, John Wiley and Sons, New Jersey.

Gli errori delle views

Il termine d'errore misura il grado di incertezza dell'operatore rispetto alle proprie views, una maggiore incertezza è riflessa in un valore elevato di ε^v. ε^v si distribuisce come:

$$\varepsilon^v \sim N\,(0, \Omega)$$

Dove Ω è la matrice (k x k) di varianza covarianza delle views che rappresenta l'incertezza dell'investitore per ogni views. Ω è una matrice diagonale dato che le views devono essere indipendenti e incorrelate tra loro, non è necessario che tutti i valori sulla diagonale siano diversi da 0, infatti lo sono quando l'invesitore è assolutamente certo della sua previsione. La varianza di ogni termine d'errore, espressa come ω e che rappresenta la distanza da 0, formano Ω[26].

Le views quindi si distribuiscono come una normale con media Q e con varianza Ω:

$$P \cdot \mu \sim N(Q, \Omega)$$

Più interpretabile di Ω è generalmente la sua inversa, chiamata matrice di confidenza ed è infatti questa che viene utilizzata nel modello BL.

Ottenere Ω è uno degli aspetti più critici di tutto il modello perchè calcolare la matrice è compito dell'investitore, ma sono stati comunque stati elaborati alcuni metodi che aiutano alla sua definizione. Uno di questi è quello di usare una formula che permette di mantenere la varianza delle views proporzionale alla varianza dei rendimenti di equilibrio grazie all'inclusione di τΣ al suo interno. La formula, che è quella maggiormente usata in letteratura per calcolare la matrice d'incertezza delle views, è:

$$\Omega = diag\,(P\,(\tau\Sigma)\,P')$$

Un'altra possibile soluzione per il calcolo di Ω può consistere nel definire un intervallo di confidenza attorno alla media delle views per poi individuare il valore della varianza sfruttando l'ipotesi di normalità delle views stesse. Ad esempio un asset all'interno del portafoglio è oggetto di una previsione da parte dell'investitore che ritiene che nei prossimi mesi avrà un rendimento del 2% e che con un livello di certezza pari al

[26] Quindi più ω è vicino a 0 più l'investitore è sicuro delle proprie views, e di conseguenza più ω è lontano da 0 meno l'investitore è sicuro delle proprie views.

68% cadrà nell'intervallo 2%-3% di rendimento. Dato che in una distribuzione normale il 68% dell'area cade tra ± 1 deviazione standard dalla media, questo permette di tradurre l'opinione dell'investitore in una varianza pari a $0{,}010^2$. In generale quindi è possibile calcolare indirettamente la varianza delle views sfruttando il fatto che la distribuzione è una normale. Questa formulazione dell'incertezza delle views è inoltre coerente con l'assunzione che τ sia minore di 1 perché in questo modo l'ampiezza dell'incertezza dell'equilibrio sarà coerente con l'incertezza delle views. Nella Figura 6 si può osservare la rappresentazione di una distribuzione normale e i livelli di confidenza associati alle relative deviazioni standard.

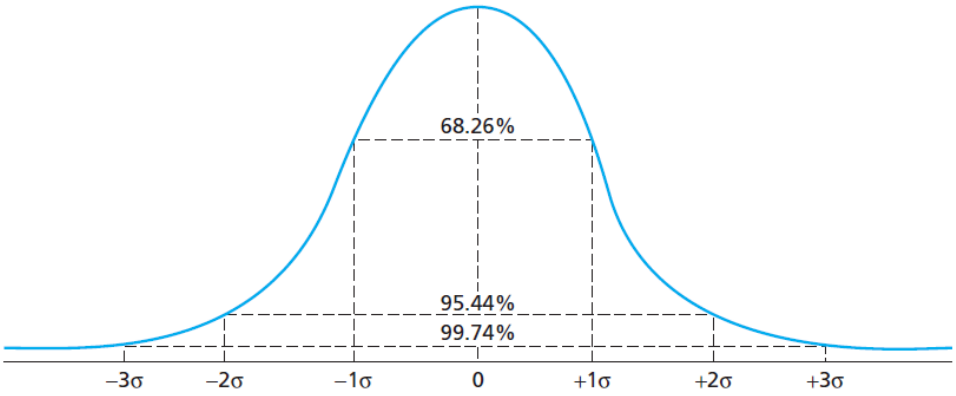

Figura 6: Rappresentazione di una distribuzione normale.
Fonte: Bodie, Kane, Markus (2011).

Di seguito un esempio per chiarire la specificazione delle matrici P, Q, Ω.

Assumiamo di avere quattro assets e due views:

- una view relativa dove l'investitore crede che l'Asset 1 renderà un rendimento maggiore dell'Asset 3 del 2% con fiducia ω_1;
- una view assoluta dove l'investitore crede che l'Asset 2 renderà il 3% in più rispetto al periodo precedente con fiducia ω_2.

Le views sono specificate in questo modo:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; Q = \begin{bmatrix} 0{,}02 \\ 0{,}03 \end{bmatrix} \; ; \; \Omega = \begin{bmatrix} \omega_{11} & 0 \\ 0 & \omega_{22} \end{bmatrix}$$

Concludendo, concettualmente il modello BL è una media ponderata più complessa del solito del vettore dei rendimenti impliciti (Π) e del vettore delle views (Q), dove i rispettivi pesi sono funzione dello scalare τ e dell'incertezza delle views (Ω). τ e Ω sono i due parametri più difficili da stimare di tutto il modello perché astratti, soggettivi. Maggiore è il livello di fiducia (certezza) nelle views, maggiore sarà la vicinanza del vettore dei nuovi rendimenti alle views. Se invece l'investitore ha meno fiducia nelle views espresse, il vettore dei nuovi rendimenti sarà vicino al vettore dei rendimenti impliciti di equilibrio (Π).

2.4. Il teorema di Bayes nel modello di Black e Litterman

Nel modello BL, il teorema di Bayes viene sfruttato per unire le due fonti d'informazione rappresentate dalle views dell'investitore e dai rendimenti di equilibrio, questo permette di ottenere un nuovo set di rendimenti attesi dei titoli che compongono il portafoglio perchè tiene in considerazione i due input. Il teorema di Bayes definisce la probabilità dell'accadimento dell'evento A dato l'accadimento dell'evento B secondo questa formula già descritta precedentemente:

$$P\,(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

Dove:

P(A|B) è la probabilità condizionata dello stato A dato B (detta anche distribuzione a posteriori o *posterior distribution*)

P(B|A) è la probabilità condizionata dello stato B dato A

P(A) è la probabilità che si verifichi lo stato A (detta anche distribuzione a priori o *prior distribution*)

P(B) è la probabilità che si verifichi lo stato B

Dal teorema di Bayes, nel modello BL le views dell'investitore rappresentano la distribuzione a priori e la seconda fonte di informazioni sono i rendimenti di equilibrio[27].

Una delle più importanti assunzioni del modello BL è che i rendimenti degli asset siano distribuiti come una normale, per questo motivo anche la distribuzione a priori e la distribuzione condizionata P(B|A) sono distribuite come una normale e di conseguenza, naturalmente, anche la distribuzione a posteriori sarà distribuita come una normale.

Sostituendo gli eventi A e B con gli input del modello BL, distribuzione normale[28] che avvenga un rendimento previsto dall'investitore dato il rendimento di equilibrio, P(A|B), è definita dal prodotto della distribuzione normale dei rendimenti di equilibrio, P(B|A) e della distribuzione a priori, P(A), che contiene le views del manager, diviso P(B), cioè la distribuzione dei rendimenti di equilibrio che è definita come $P(B) \sim N(\Pi, \tau\Sigma)$. Perciò il teorema di Bayes fornisce uno strumento per unire le views dell'investitore con la realtà empirica.

Specificando Q come il vettore dei rendimenti che si aspetta l'investitore (views) e *data* come i rendimenti di equilibrio derivati dal CAPM, allora il teorema di Bayes applicato al modello BL può essere così definito:

$$P(Q|data) = \frac{P(data|Q)\,P(Q)}{P(data)}$$

Dove:

P(Q) è la *prior distribution* che esprime le views dell'investitore. Come già noto, le views sono espresse come $P \cdot \mu = Q + \varepsilon^v$ dove $\varepsilon^v \sim N(0, \Omega)$, perciò $P \cdot \mu \sim N(Q, \Omega)$;

P(*data*) è la probabilità marginale[29] dei rendimenti di equilibrio;

[27] Dal punto di vista del modello Bayesiano, l'uso dei rendimenti di equilibrio come seconda fonte di informazioni è coerente con tutto il procedimento perchè le views derivano da un'interpretazione dell'investitore dei rendimenti osservati. Inoltre se si prendesse in cosiderazione l'approccio inverso, cioè che siano i rendimenti di equilibrio la fonte di informazione primaria e le views quella secondaria, questo troverebbe maggiori difficoltà ad essere applicato perchè le views sono soggettive e non si basano su un'analisi statistica dei rendimenti.

[28] La distribuzione normale è una funzione di densità di probabilità dato che i rendimenti sono definiti come delle variabili casuali continue. La funzione di densità non è una probabilità, ma questa può essere calcolata indirettamente attraverso la definizione di un intervallo nel quale la variabile può assumere un valore con una certa probabilità.

[29] Con probabilità marginale si intende la probabilità che accada un evento semplice, cioè con congiunto con altri eventi.

P(*data*|Q) è la probabilità condizionata dei rendimenti di equilibrio, date le previsioni dell'investitore (*prior distribution*). Si assume che *data*|μ ~ N(Q, τΣ) (con Σ che rappresenta la matrice di varianza covarianza). Questa assunzione sta a significare che i rendimenti di equilibrio condizionati alle previsioni dell'investitore sono uguali alle previsioni dell'investitore in media, E(*data*) = Q. Questa condizione deve essere intesa nel senso che se tutti gli operatori avessero le stesse views e investissero usando il modello di equilibrio CAPM, allora *data* rappresenta i rendimenti di equilibrio condizionati dalle views comuni.

Allora la distribuzione condizionata (posteriore) di μ, cioè dei rendimenti attesi degli assets, è normale e può essere così specificata:

$$\mu_{post} \sim N(M_{BL}, V_{BL}) \text{ dove:}$$

$$M_{BL} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1} [(\tau\Sigma)^{-1} \Pi + P'\Omega^{-1}Q]$$

$$V_{BL} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}$$

M_{BL} e V_{BL} sono gli output a cui arrivano Black e Litterman nel proprio modello e rappresentano rispettivamente il vettore rendimenti attesi e la matrice di varianza covarianza degli asset presi in considerazione dall'investitore per il proprio portafoglio mettendo insieme sia le sue views che i rendimenti impliciti, quanto i rendimenti M_{BL} si avvicineranno (o, allo stesso modo, scosteranno) ad uno dei due input dipenderà dalla varianza del portafoglio di mercato e dalla *confidance* che l'operatore ha riposto nelle proprie previsioni.

Cheug (2009)[30] descrive il caso in cui venga considerato solamente un asset e una view come input per il modello BL:

[30] Cheung W. (2009), "The Black-Litterman model explained", *Journal of Asset Management*, Vol. 1, No. 4, pp. 229-243.

$M_{BL} = \frac{\frac{\Pi}{\tau\sigma^2}+\frac{Q}{\upsilon^2}}{\frac{1}{\tau\sigma^2}+\frac{1}{\upsilon^2}} = \omega_1\Pi + \omega_2 Q$: è la stima della distribuzione a posteriori che è una media pesata basata sul livello di fiducia delle views (equilibrio e opinioni del manager);

$\frac{1}{V\mathrm{BL}} = \frac{1}{\tau\sigma^2} + \frac{1}{\upsilon^2}$: è la fiducia (varianza) a posteriori cioè l'aggregato di fiducia in entrambe le fonti di informazioni;

dove:

σ è la volatilità dell'asset

υ è l'errore della view

$\omega_1 = \frac{\frac{1}{\tau\sigma^2}}{\frac{1}{\tau\sigma^2}} + \frac{1}{\upsilon^2}$

$\omega_2 = \frac{\frac{1}{\upsilon^2}}{\frac{1}{\tau\sigma^2}} + \frac{1}{\upsilon^2}$

ω_1 e ω_2 sono i pesi rispetto alla fiducia delle informazioni

Se si considera la fiducia come l'inversa della varianza, allora l'equazione precedente unisce la fiducia del manager nell'equilibrio di mercato, $1/\tau\sigma^2$, e nella propria view, $1/\upsilon^2$, per ottenere la stima a posteriori della fiducia come $(1/\tau\sigma^2) + (1/\upsilon^2)$. Questa relazione è derivata dal teorema di Bayes. Più l'investitore avrà fiducia in entrambe le views (di equilibrio e le proprie opinioni sul futuro andamento), maggiore sarà la fiducia nella stima della varianza a posteriori, cioè la distribuzione sarà più concentrata intorno alla media.

La stima della media dei rendimenti (M_{BL}) semplicemente combina l'equilibrio di mercato con le views del manager attraverso uno schema di media pesata della *confidence*. Anche in questo caso la relazione deriva direttamente dal teorema di Bayes. E' facile vedere che maggiore sarà la fiducia del manager rispetto alle sue views Q, maggiore sarà il peso posto sulle sue views, e perciò la distribuzione a posteriori sarà aggiustata di più verso Q. Conseguentemente il nuovo portafoglio rifletterà di più le views. Viceversa, meno fiducia vi porrà, maggiore sarà la fiducia sul portafoglio di

mercato. Nel caso estremo in cui l'investitore non avesse nessuna view, allora non deterrà nient'altro che una fetta del portafoglio di mercato.

Il modello di riferimento, descritto nei capitoli precedenti, per l'implementazione del modello BL prende in considerazione la media dei rendimenti attesi, μ, e non direttamente i rendimenti attesi, E(r). Come descritto da Meucci (2010)[31], il modello di riferimento dovrebbe essere riscritto nel modo seguente, quando invece di μ si sia interessati alla distribuzione di E(r):

$$E(r) = \mu + Z \text{ dove } Z \sim N(0, \Sigma)$$

Perciò la distribuzione a posteriori diventa:

$$Q|E(r); \Omega = Q|\mu; \Omega + Z \text{ oppure}^{32}$$

$$Q|E(r); \Omega \sim N(M_{BL}, V^*)$$

dove M_{BL} è definita come specificato precedentemente e, assumendo che μ e Z siano indipendenti, V* è scritta come:

$$V^* = \Sigma + V_{BL}$$

Riorganizzando gli elementi è possibile riscrivere entrambi i parametri M_{BL} e V* in questo modo:

$$M_{BL} = \Pi + \tau\Sigma P' (\tau P\Sigma P')^{-1} (Q - P\Pi)$$

$$V^* = (1 + \tau)\Sigma - \tau\Sigma P' (\tau P\Sigma P' + \Omega)^{-1} P\Sigma$$

Con views certe

Nel caso speciale in cui l'investitore sia certo delle sue views la matrice Ω contiene solo zeri e naturalmente ci si aspetta, soprattutto in questo caso particolare, che la distribuzione a posteriori sia molto condizionata dalle views. In questo caso la distribuzione a posteriori diventa

[31] Meucci A. (2010), "The Black-Litterman approach: original model and extensions", *Working paper*.
[32] $Q|\mu; \Omega \sim N(M_{BL}, V_{BL})$. Per Meucci questa è la distribuzione a posteriori prendendo come riferimento μ e non E(r), infatti alla matrice di confidenza Ω viene aggiunto Z, cioè l'errore intorno di E(r).

$$\mu_{post} \sim N(M^{\Omega=0}, V^{\Omega=0})$$

dove

$$M^{\Omega=0} = \Pi + \Sigma P'(P\Sigma P')^{-1}(Q - P\Pi)$$

$$V^{\Omega=0} = (1 + \tau)\Sigma - \tau\Sigma P'(P\Sigma P')^{-1}P\Sigma$$

Senza views

Nel caso in cui il manager non formuli nessuna view, la distribuzione a posteriori è equivalente alla distribuzione del portafoglio di mercato, infatti si viene a formare un vettore uguale al vettore dei rendimenti di equilibrio Π perchè tutti i valori nel vettore P sono uguali a zero.

Anche nel caso in cui l'incertezza espressa dall'investitore sulle proprie views è molto ampia ($\Omega \rightarrow \infty$), P è dominata da Π, perciò un operatore razionale, come sopra, arriverà a detenere il portafoglio di mercato.

Riprendendo il modello di riferimento, allora la distribuzione a posteriori diventa:

$$E(r) \sim N(\Pi, (1 + \tau)\Sigma)$$

In assenza di views si può osservare che la distribuzione di E(r) abbia media uguale al vettore dei rendimenti di equilibrio e varianza pari a ($\Sigma + \tau\Sigma$), infatti V_{BL} sarebbe uguale a $\tau\Sigma$. In totale, la varianza di E(r) è maggiore rispetto alla varianza della distribuzione dei rendimenti di equilibrio.

Nella Figura 7, tratta da Idzorek (2005)[33], si può osservare uno schema riassuntivo del procedimento da seguire per attuare il modello BL in cui si ritrovano tutti i parametri spiegati nei capitoli precedenti: l'investitore deve calcolare due distribuzioni distinte, quella di equilibrio $N \sim (\Pi, \tau\Sigma)$ e quella relativa alle views $N \sim (Q, \Omega)$, e metterle insieme attraverso il teorema di Bayes per arrivare ad ottenere la nuova distribuzione dei titoli considerati da inserire nel portafoglio. Per ottenere il portafoglio ottimo finale, i

[33] Idzorek T. M. (2005), "A step-by-step guide to the Black and Litterman model", *Working Paper*.

rendimenti e la varianza calcolati, dovranno essere inseriti come input all'interno del processo di ottimizzazione standard di Markowitz.

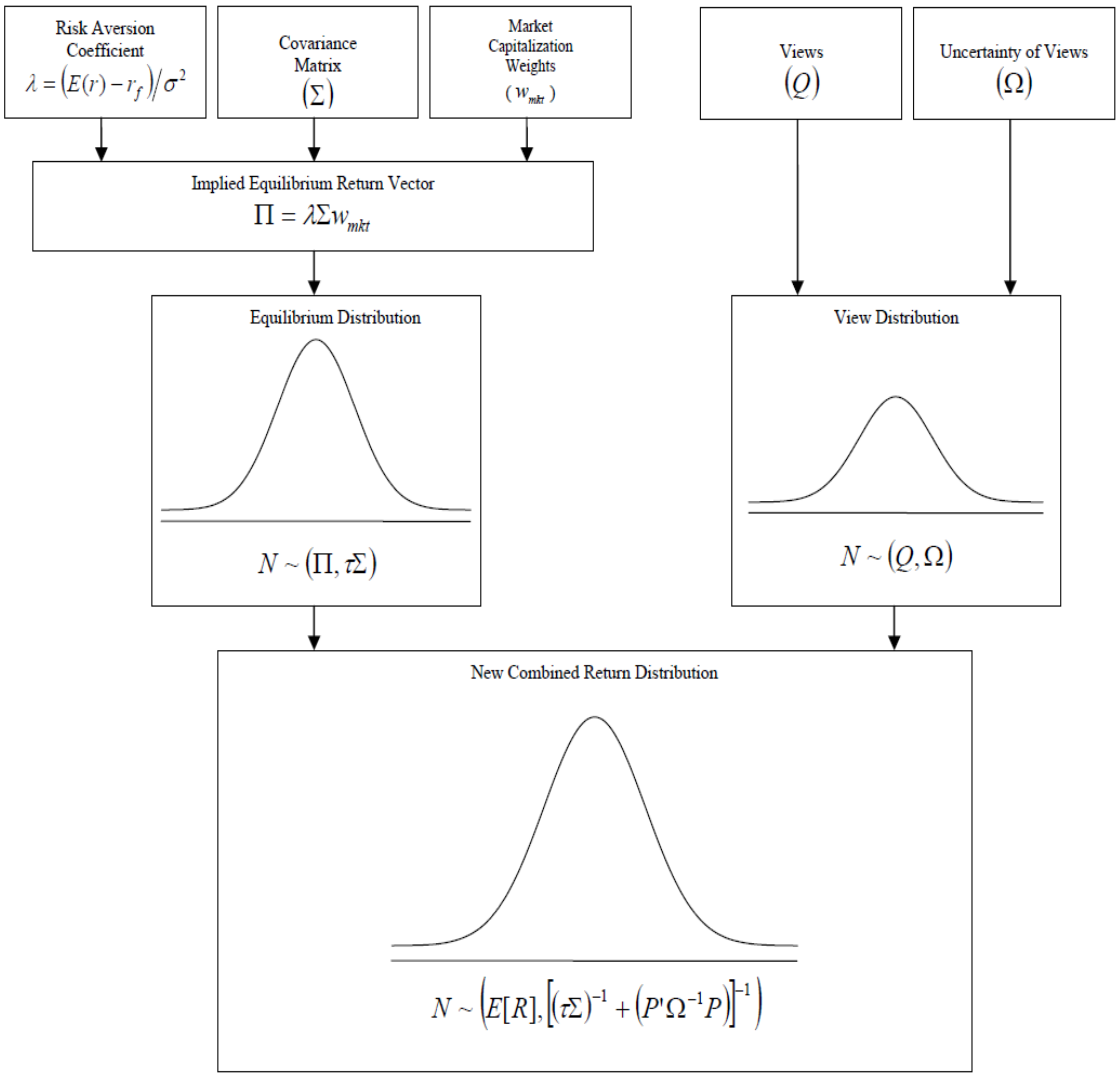

Figura 7: Procedimento per l'implementazione del modello di Black e Litterman.
Fonte: Idzorek (2005)

2.5. I rendimenti attesi e i pesi ottimi finali

Dopo aver unito i rendimenti di equilibrio con le previsioni dell'operatore, ovviamente cambiano i rendimenti attesi riferiti ai titoli su cui l'operatore ha espresso delle previsioni rispetto ai rendimenti impliciti. A variare sono però anche i rendimenti attesi su cui l'investitore non aveva dato nessuna opinione esplicita. Questo succede

perché, dato che spesso i settori economici sono correlati tra loro (sia positivamente che negativamente), l'investitore che esprime una view, lo fa implicitamente anche per gli altri settori. Questo effetto è causato dalla moltiplicazione delle matrici P, $\tau\Sigma$ e Ω, cioè dall'espressione delle views come combinazione lineare dei suoi rendimenti attesi, della matrice di varianza covarianza dei rendimenti di equilibrio e della matrice di varianza covarianza delle views. In questo modo gli errori dell'investitore riferiti alle views sono "spalmati" tra tutti gli assets, mitigando così gli errori di stima e prevenendo la formazione di pesi eccessivi in alcuni assets (cosa che succederebbe se ad aggiustarsi fossero solo i rendimenti di alcuni titoli).

Una volta ottenuto il vettore dei rendimenti attesi e la matrice di varianza covarianza con il modello BL, entrambi diventano gli input da inserire nel processo di ottimizzazione standard media-varianza di Markowitz per calcolare la frontiera efficiente e definire la media e la varianza del portafoglio ottimo, e naturalmente anche la sua composizione migliore.

Ma come cambiano i pesi dei titoli contenuti all'interno di un portafoglio BL ottimo rispetto a quelli contenuti in un portafoglio di equilibrio (neutrale)? Come si è visto, prendendo in considerazione le views cambiano i rendimenti dei titoli e quindi anche le quote d'investimento all'interno del portafoglio variano. È interessante osservare però che saranno i pesi dei titoli sui quali l'investitore ha formulato le views che varieranno in misura maggiore rispetto agli altri asset.

Un altro dei punti di forza del modello di Black e Litterman è rappresentato da fatto che quando è necessario eseguire l'aggiornamento degli input, la distribuzione a posteriori ottenuta precedentemente diventa la nuova distribuzione a priori a cui vengono aggiunte le nuove previsioni dell'investitore. In questo modo si ottengono dei risultati più stabili dato che sono il frutto dell'update di dati passati, la distribuzione a posteriori mostrerà una media più vicina ai dati osservati e una varianza minore a causa dell'aumento del numero di informazioni considerate. Un esempio di questo concetto è possibile osservarlo alla Figura 8 tratta da Blamont D. e Firoozye N. (2003)[34] dove la linea continua nera definisce la view dell'investitore la cui distribuzione a priori è una normale di media 2 e varianza 1. Una volta calcolati i parametri del portafoglio di mercato

[34] Blamont D., Firoozye N. (2003), "Quantitative Strategy", *Fixed Income Weekly*, Global Markets Research, Deutsche Bank.

però, risulta che la sua distribuzione ha media 6 e varianza 1. Nella tecnica standard di selezione di portafoglio, questa sarebbe stata considerata come la distribuzione finale del portafoglio ottimo. Invece, applicando il teorema di Bayes nel modo indicato dal modello BL, vengono unite entrambe le fonti di informazione: sia la view che il portafoglio di mercato, ottenendo una distribuzione a posteriori normale di media 4 e varianza 0,5 ed è in altre parole una "media delle medie". Nella nuova distribuzione la varianza è diminuita dato che l'incertezza data dall'unione di due fonti dati è minore dell'incertezza di una fonte dati sola. Se successivamente si vengono ad osservare, ad esempio, altre distribuzioni con media 6 e varianza 1, unendo le varie informazioni la varianza delle successive distribuzioni a posteriori sarà sempre più piccola mentre la sua media si avvicinerà a quella osservata.

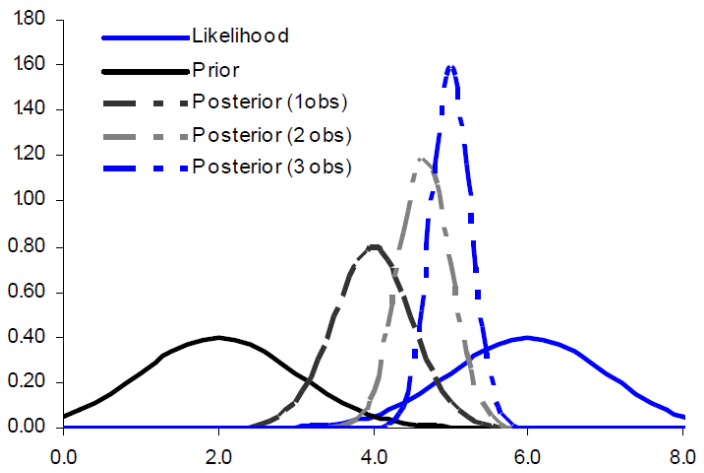

Figura 8: Aggiornamento della distribuzione a posteriori.
Fonte: Deutsche Bank Global Markets Research (2003)

2.6. Estensione: Il modello di Black e Litterman quando le views dell'investitore sono errate o parzialmente errate

Il modello BL si basa sull'assunzione che le views di un investitore siano corrette, ma spesso nella realtà, le opinioni di un investitore sui rendimenti futuri si rivelano essere sbagliate o parzialmente sbagliate. Come risultato, il portafoglio derivante dal modello di Black e Litterman, nonostante sia ottimale dal punto di vista dell'investitore, può essere considerato sub-ottimale. Infatti quando le views risultano essere parzialmente vere

l'investitore tenderà a ribilanciare il suo portafoglio con delle nuove views che riterrà più corrette, ma questa operazione di ribilanciamento porta a dei costi di transazione che non possono essere eliminati, arrivando talvolta ad essere così elevati da annullare totalmente il beneficio che può ottenere l'investitore dalle nuove views, anche se gli porterebbero un rendimento maggiore di quello che ottiene ora dal suo portafoglio corrente. D'altra parte però, continuando a mantenere l'attuale allocazione, il portafoglio soffre di costo-opportunità[35] per i guadagni che potrebbe portare se poi le views si rivelassero corrette (nonostante i costi di transazione).

L'estensione del modello BL proposta da Yanou (2010)[36] ha lo scopo di far ottenere una distribuzione a posteriori ottimale considerando anche le perdite derivanti da views sbagliate o parzialmente corrette.

Considerando w_c l'allocazione corrente dell'investitore, è necessario trovare quel portafoglio aggregato w_{ABL} definito come:

$$w_{ABL} = \alpha w_{BL} + (1 - \alpha) w_c$$

dove α cade tra 0 e 1 e rappresenta il parametro da trovare per detenere l'allocazione ottimale tra i due estremi rappresentati dal portafoglio corrente (w_c) e dal portafoglio ottenuto applicando il modello BL (w_{BL}).

Nel caso in cui l'investitore detenga l'allocazione corrente invece di considerare un portafoglio ottenuto con il modello BL, l'allocazione non è ottimale, e nonostante non ci siano costi di transazione dato che appunto non c'è un ribilanciamento del portafoglio, questo soffre di costo-opportunità.

Nell'estensione proposta da Yanou è possibile esprimere la distribuzione a posteriori applicando il modello BL in due diversi modi a seconda dell'informazione a priori che viene cosidera:

- se l'equilibrio di mercato è definito come *prior* allora il portafoglio detenuto è w_{BL} e M_{BL} rappresenta i rendimenti attesi della distribuzione a posteriori, in questo caso se le views dell'investitore si rilevano corrette w_{BL} è il portafoglio ottimale;

[35] Il costo-opportunità è il valore a cui si rinuncia non sfruttando l'opportunità alternativa.
[36] Yanou G. (2010), "The Black-Litterman model: wrong views vs. opportunity cost", *Working paper*.

- se l'allocazione corrente dell'investitore è definita come *prior* allora il portafoglio detenuto è w_c e M_{CBL} rappresenta i rendimenti attesi della distribuzione a posteriori, in questo caso se le views dell'investitore si rivelano corrette, w_C soffre di costo-opportunità[37], al contrario se le views si rivelano sbagliate, entrambi i portafogli non sono ottimali.

Quindi implementando il modello BL ogni volta con una delle *prior* considerate, seguendo il teorema di Bayes si ottengono due portafogli, i rispettivi rendimenti attesi e volatilità date le opinioni dell'investitore. Se le views dell'investitore si riveleranno corrette, l'allocazione corrente non è quella ottimale e il portafoglio soffre di costo-opportunità, quindi come risultato il portafoglio w_{ABL} è uguale al portafoglio w_{BL}. Mentre nel caso in cui le opinioni dell'investitore si riveleranno non corrette o parzialmente corrette, entrambi i portafogli non sono ottimali, e il portafoglio w_{ABL} deve tenere in considerazione la profondità della non ottimalità di entrambi.

Il portafoglio calcolato quando l'allocazione corrente è la distribuzione a priori

Ponendo W_c come la matrice diagonale NxN che contiene l'allocazione del portafoglio corrente w_c nella diagonale, il vettore dei rendimenti attesi dei titoli considerati che si ottiene è definito da:

$$\mu_c = W_c \mu$$

dove μ sono i rendimenti osservati.

Riprendendo dal capitolo precedente, la distribuzione degli extrarendimenti di equilibrio è espressa in questo modo

$$\mu \sim N(\Pi, \tau\Sigma)$$

Dato che gli extrarendimenti dell'allocazione corrente μ_c dipendono da μ, è possibile esprimere μ_c così

$$\mu_c = W_c \Pi$$

[37] Perchè, come scritto precedentemente, il portafoglio ottimale sarebbe w_{BL}.

E la matrice di varianza covarianza Δ corrispondente è ottenuta calibrando $\tau\Sigma$ con l'allocazione corrente:

$$\Delta = W_c(\tau\Sigma)W_c$$

Quindi si ottiene la seguente distribuzione

$$\mu \sim N(\mu_c, \Delta)$$

Essendo le views dell'investitore definite come descritto precedentemente $N \sim (Q, \Omega)$ con $Q = P \cdot \mu$, la distribuzione a posteriori quando l'allocazione corrente è impostata come informazione a priori è espressa in questo modo:

$$P(\mu|Q) = \frac{P(Q|\mu)\,P(\mu)}{P(Q)} = N(M_{CBL}, V^{\mu}_{CBL})$$

dove

$$M_{CBL} = [\Delta^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}\,[\Delta^{-1}\,\mu_c + P'\Omega^{-1}Q]$$

$$V^{\mu}_{CBL} = [\Delta^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}$$

Come prima, il parametro V^{μ}_{CBL} denota la matrice di varianza-covarianza a posteriori secondo le views dell'investitore. L'intera matrice è definita dalla somma delle due:

$$\Sigma_{CBL} = \Sigma + V^{\mu}_{CBL}$$

I costi di transazione del portafoglio aggregato w_{ABL} e l'ottimizzazione di α

I costi di transazione del portafoglio aggregato w_{ABL} sono inferiori ai costi di transazione del portafoglio w_{BL} derivato con il modello BL: i costi di transazione τ_{ABL} sostenuti per passare dall'allocazione corrente w_c all'allocazione aggregata w_{ABL} possono essere espressi in questo modo:

$$\tau_{ABL} = \theta\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{w^i_{ABL} - w^i_C}{N-1}\right)$$

$$= \theta\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha w^i_{BL} + (1-\alpha)w^i_C - w^i_C}{N-1}\right)$$

$$= \alpha\theta\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{w_{BL}^{i} - w_{C}^{i}}{N-1}\right)$$

$$= \alpha\tau_{BL}$$

dove τ_{BL} e θ sono rispettivamente i costi di transazione sostenuti per passare dall'allocazione corrente w_c a w_{BL} e i costi per ribilanciare ogni linea del portafoglio. Essendo il parametro α minore di 1, i costi di transazione del portafoglio aggregato saranno sempre inferiori ai costi di transazione dell'allocazione ottenuta con il modello BL.

Secondo il classico processo di ottimizzazione media-varianza, lo scopo dell'investitore è quello di massimizzare il proprio indice di Sharpe. Perciò è necessario trovare quel valore del parametro α che massimizzi l'indice di Sharpe della distribuzione a posteriori ottenuto dal portafoglio aggregato w_{ABL}.

Per prima cosa viene determinato l'extrarendimento. Coerentemente con la specificazione di w_{ABL}, è possibile scrivere l'extrarendimento atteso della distribuzione a posteriori in questo modo:

$$\pi_{ABL} = \alpha\pi_{BL} + (1 - \alpha)\pi_{CBL}$$

dove π_{BL} e π_{CBL} denotano rispettivamente l'extrarendimento della distribuzione a posteriori ottenuto da w_{BL}, e l'extrarendimento della distribuzione a posteriori se invece è l'allocazione corrente il portafoglio detenuto dall'investitore. Come visto nel paragrafo precedente, il portafoglio ottenuto con il modello BL deve sostenere dei costi di transazione. Questa premessa è tenuta in cosiderazione per definire l'extrarendimento a posteriori dei due portafogli come segue:

$$\begin{cases} \pi_{BL} = w'_{BL}\mu_{BL} - \tau_{BL} \\ \pi_{CBL} = w'_{C}\mu_{CBL} \end{cases}$$

Infine Yanou definisce la volatilità posteriore del portafoglio aggregato w_{ABL} così:

$$\sigma_{ABL} = \alpha^2 w'_{BL}\Sigma_{BL}w_{BL} + (1 - \alpha)^2 w'_{C}\Sigma_{CBL}w_{C} + 2\alpha\,(1 - \alpha)\rho$$

dove ρ denota il coefficiente di correlazione tra μ_{BL} e μ_{CBL}.

Sostituendo i vari valori con le uguaglianze sopra descritte, l'indice di Sharpe[38] della distribuzione a posteriori del portafoglio aggregato può essere espresso come funzione di α:

$$f\ (\alpha) = \frac{\pi_{ABL}}{\sigma_{ABL}} = \frac{\alpha\ (w'_{BL}\mu_{BL} - \ \tau_{BL}) + (1 - \ \alpha)(w'_{C}\mu_{CBL})}{\alpha^2 w'_{BL}\Sigma_{BL}w_{BL} + (1 - \ \alpha)^2 w'_{C}\Sigma_{CBL}w_{C} + 2\alpha\ (1 - \ \alpha)\rho}$$

Quando α è uguale a zero, l'indice di Sharpe atteso della distribuzione a posteriori di w_{ABL} è uguale all'indice di Sharpe ottenuto quando l'investitore detiene l'allocazione corrente ed in questo caso le sue views sono così poco vantaggiose che sarebbe meglio per lui detenere l'allocazione corrente perchè non può avere nessun interesse a ribilanciare il portafoglio attuale. Dall'altra parte, quando α è uguale a 1, l'indice di Sharpe atteso della distribuzione a posteriori di w_{ABL} è uguale all'indice di Sharpe ottenuto dal portafoglio derivato dal modello BL perchè le views si sono rilevate corrette e nonostante i costi di transazione è conveniente per l'investitore seguire le proprie views.

Inoltre si può sottolineare un altro aspetto, e cioè che, per costruzione, maggiori sono i costi di transazione e minore è il valore di α. Infatti quando l'indice di Sharpe del portafoglio ottenuto con il modello BL è uguale a zero (questo significa cioè che gli elevati costi di transazione annullano tutti i guadagni), α è prossimo a zero, nonostante questo comunque la sua volatilità a posteriori influenza l'indice di Sharpe del portafoglio aggregato.

[38] Come si può notare, nella definizione dell'indice di Sharpe del portafoglio aggregato i costi di transazione non vengono cosiderati, questo perchè sono già stati presi in considerazione nella definizione dell'indice di Sharpe ottenuto dal portafoglio derivato dal modello BL.

Capitolo 3 - Un'applicazione del modello Black-Litterman

Per comporre il portafoglio su cui si basa l'applicazione del modello Black-Litterman, gli asset presi in considerazione sono indici settoriali europei creati e mantenuti dalla società svizzera STOXX Limited. La STOXX Limited ha infatti dato vita a diversi indici settoriali europei e, più in generale, globali suddivisi in vari gruppi che sono presi come punto di riferimento da investitori ed economisti in tutto il mondo. I benchmarks mantenuti dalla STOXX Limited sono decine e adatti a essere presi come punto di riferimento per ogni tipo di analisi, perciò ad esempio esistono benchmarks che hanno al loro interno un numero fisso di componenti rappresentati da società di tutto il mondo, oppure soltanto di alcuni continenti, come l'Europa, l'Asia o l'America settentrionale, oppure solo di alcuni stati, come gli USA, il Giappone, la Germania. Al contrario altri indici hanno un numero variabile di componenti ma con lo scopo di coprire almeno il 95% di tutte le azioni presenti nel mercato globale, europeo, americano, a seconda dell'indice preso in considerazione.

Nel caso del portafoglio preso in esame, gli indici selezionati fanno tutti parte del gruppo *STOXX Europe 600 Supersector Indices* che comprende al suo interno 600 società divise in 19 indici settoriali appartenenti a 17 Paesi europei (Austria, Belgio, Danimarca, Finlandia, Francia, Germania, Grecia, Irlanda, Italia, Lussemburgo, Norvegia, Paesi Bassi, Portogallo, Regno Unito, Spagna, Svezia, Svizzera). Gli indici appartementi allo *STOXX Europe 600 Supersector* derivano dall'indice *STOXX Europe 600* che comprende le 600 società europee con la maggior capitalizzazione di mercato free float, queste società sono state suddivise tra i 19 settori economici a seconda della loro principale fonte di ricavi. Dei 19 indici settoriali soltanto 18 sono stati presi in considerazione perchè l'indice riferibile agli immobili è stato creato successivamente rispetto agli altri.

Dal database Bloomberg sono stati scaricati i prezzi degli indici al netto dei dividendi all'ultimo giorno di contrattazione del mese dal gennaio del 2002 fino al giugno del 2013, per un totale di 138 osservazioni.

Dai prezzi dei vari indici si è calcolato il rendimento medio storico e la deviazione standard; i sette indici che presentano la performance di Sharpe maggiore nel periodo

preso a riferimento andranno a formare il portafoglio per l'analisi. Successivamente verranno confrontati la frontiera efficiente e i portafogli ottimi derivati con la tecnica standard di Markowitz utilizzando i rendimenti storici con l'applicazione del modello di Black e Litterman, ottenendo prima il portafoglio con i rendimenti impliciti e poi aggiungendoci alcune views.

3.1. Gli asset all'interno del portafoglio

Dai prezzi di chiusura dei 18 indici sono stati ottenuti i rendimenti continui calcolando il logaritmo naturale della differenza di prezzo:

$$R_t = Ln\ (P_t) - Ln\ (P_{t-1})$$

Dove:

R_t è il rendimento al tempo t

P_t è il prezzo al tempo t

P_{t-1} è il tempo al tempo t-1

Dai rendimenti continui è stato calcolato l'extrarendimento, cioè la differenza tra il rendimento dell'indice R_t e il rendimento dell'asset risk free. L'asset risk free preso in considerazione è il Bund tedesco con scadenza a due anni e che offre un rendimento di 0,0156% su base mensile. Dai dati ottenuti è stata calcolata la media dei rendimenti dell'intero periodo e la deviazione standard, questi sono stati riportati nella Tabella 1 per tutti i 18 indici, insieme alla performance di Sharpe. I sette indici evidenziati hanno l'indice di Sharpe maggiore, questo significa che nel periodo dell'analisi hanno riportato un maggiore rendimento per ogni punto in più di rischio. Questi sette indici comporranno il portafoglio su cui si basa questo studio.

Codice dell'indice	Settore industriale	Media dei rendimenti (%)	Deviazione standard (%)	Performance di Sharpe (%)
SXAP Index	***Automobilities & parts***	***0,5758***	***8,3207***	***6,9209***
SX7P Index	Banks	-0,3138	7,5911	-4,1344
SXPP Index	Basic resources	0,3865	8,4156	4,5935
SX4P Index	***Chemicals***	***0,8495***	***5,7231***	***14,8438***
SXOP Index	Construction & materials	0,4407	6,4001	6,8862
SXFP Index	Financials services	0,2896	5,9884	4,8360
SX3P Index	***Food & beverages***	***0,7073***	***3,6225***	***19,5249***
SXDP Index	***Health care***	***0,3959***	***3,5613***	***11,1192***
SXNP Index	***Industrial goods & services***	***0,4992***	***5,9563***	***8,3817***
SXIP Index	Insurance	-0,0615	8,3953	-0,7325
SXMP Index	Media	0,0726	5,4791	1,3255
SXEP Index	Oil & gas	0,2226	5,2336	4,2545
SXQP Index	***Personal & household goods***	***0,7424***	***4,4338***	***16,7452***
SXRP Index	Retail	0,3213	5,5912	5,7481
SX8P Index	Techology	-0,2335	8,0938	-2,8855
SXKP Index	Telecommunications	0,1962	5,1805	3,7881
SXTP Index	Travel & leasure	0,2628	5,4367	4,8347
SX6P Index	***Utilities***	***0,3539***	***4,5404***	***7,7945***

Tabella 1: Rendimento, deviazione standard e performance di Sharpe dei 18 indici settoriali presenti nel gruppo Supersectors STOXX da gennaio 2002 a giugno 2013.

I sette indici che comporranno il portafoglio oggetto dell'analisi sono elencati qui di seguito:

- SXAP Index - Automobilities & parts;
- SX4P Index - Chemicals;
- SX3P Index - Food & beverages;
- SXDP Index - Health care;
- SXNP Index - Industrial goods & services;
- SXQP Index - Personal & household goods;
- SX6P Index - Utilities

Nella Figura 9 è rappresentato il loro posizionamento su un piano rendimento-deviazione standard. Gli indici con i rendimenti maggiori sono quelli riferibili ai settori Chemicals, Personal & household goods e Food & beverages, gli altri indici, quasi a parità di rischio, hanno offerto un rendimento minore nel periodo dell'analisi descrivendo un trend molto simile, con l'esclusione dell'indice SXAP - Automobilities & parts. Un andamento del genere tra gli indici selezionati è spiegato da una forte correlazione come si può vedere nella Tabella 2.

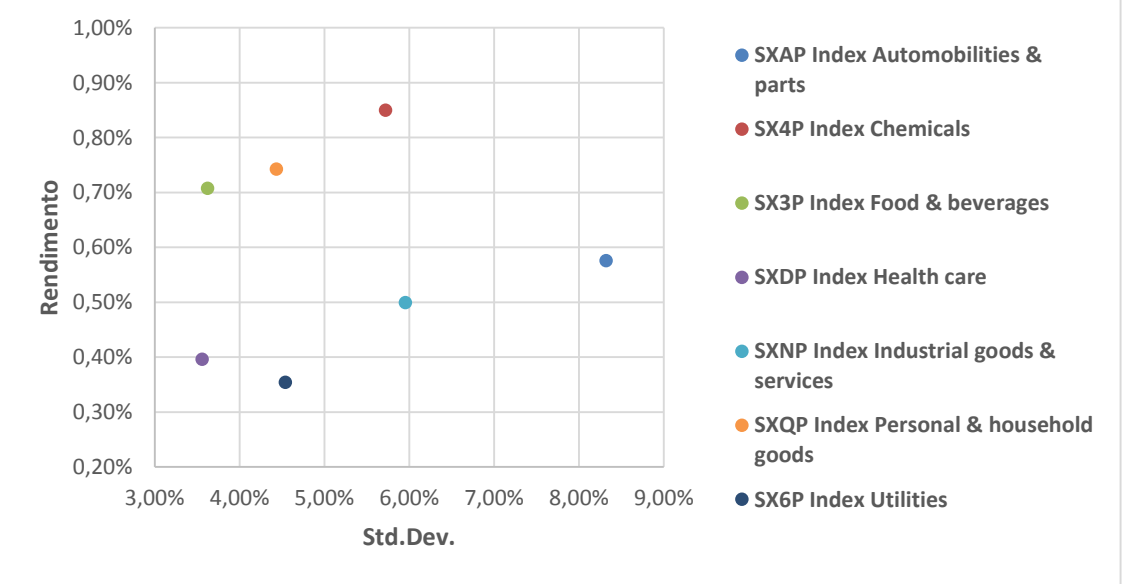

Figura 9: Posizionamento sul piano rendimento-rischio dei sette indici settoriali.

	SXAP Index	SX4P Index	SX3P Index	SXDP Index	SXNP Index	SXQP Index	SX6P Index
SXAP Index	1						
SX4P Index	0,6535	1					
SX3P Index	0,4324	0,5962	1				
SXDP Index	0,4181	0,4741	0,5944	1			
SXNP Index	0,6602	0,8750	0,5962	0,4630	1		
SXQP Index	0,6536	0,7832	0,7707	0,5676	0,8553	1	
SX6P Index	0,4893	0,6900	0,5084	0,4288	0,7091	0,6220	1

Tabella 2: Correlazione tra i sette indici settoriali.

Dai rendimenti continui è stata derivata anche Σ, cioè la matrice di varianza covarianza tra i sette indici. La matrice è riportata nella Tabella 3:

	SXAP Index	SX4P Index	SX3P Index	SXDP Index	SXNP Index	SXQP Index	SX6P Index
SXAP Index	0,006923	0,003112	0,001303	0,001239	0,003272	0,002412	0,001849
SX4P Index	0,003112	0,003275	0,001236	0,000966	0,002983	0,001988	0,001793
SX3P Index	0,001303	0,001236	0,001312	0,000767	0,001287	0,001238	0,000836
SXDP Index	0,001239	0,000966	0,000767	0,001268	0,000982	0,000896	0,000693
SXNP Index	0,003272	0,002983	0,001287	0,000982	0,003548	0,002259	0,001918
SXQP Index	0,002412	0,001988	0,001238	0,000896	0,002259	0,001966	0,001252
SX6P Index	0,001849	0,001793	0,000836	0,000693	0,001918	0,001252	0,002062

Tabella 3: Matrice di varianza covarianza tra i sette indici settoriali (Σ).

3.2. L'ottimizzazione con i rendimenti storici

Grazie alla media dei rendimenti e alla matrice di varianza covarianza è possibile disegnare la frontiera efficiente che definisce in ogni suo punto la migliore combinazione degli asset contenuti all'interno del portafoglio per ottenere il maggior rendimento a determinati livelli di deviazione standard. Nella Figura 10 è possibile vedere la frontiera efficiente ottenuta applicando la teoria di Markowitz senza vincoli di non negatività e in rosso è stato evidenziato il portafoglio ottimo, cioè il portafoglio che, tra tutti, offre il rapporto rendimento/rischio maggiore, infatti il rendimento è pari a 1,27% a fronte di una deviazione standard del 5%. Inoltre nella Figura 11 si può vedere la composizione del

portafoglio ottimo: è evidente come il modello sovrastimi il peso di alcuni indici (e precisamente dei tre indici che hanno il rendimento maggiore come si può notare nella Tabella 1) e ne sottostimi altri, e la forte esposizione corta in particolare verso l'indice SXNP Index (Industrial goods & services).

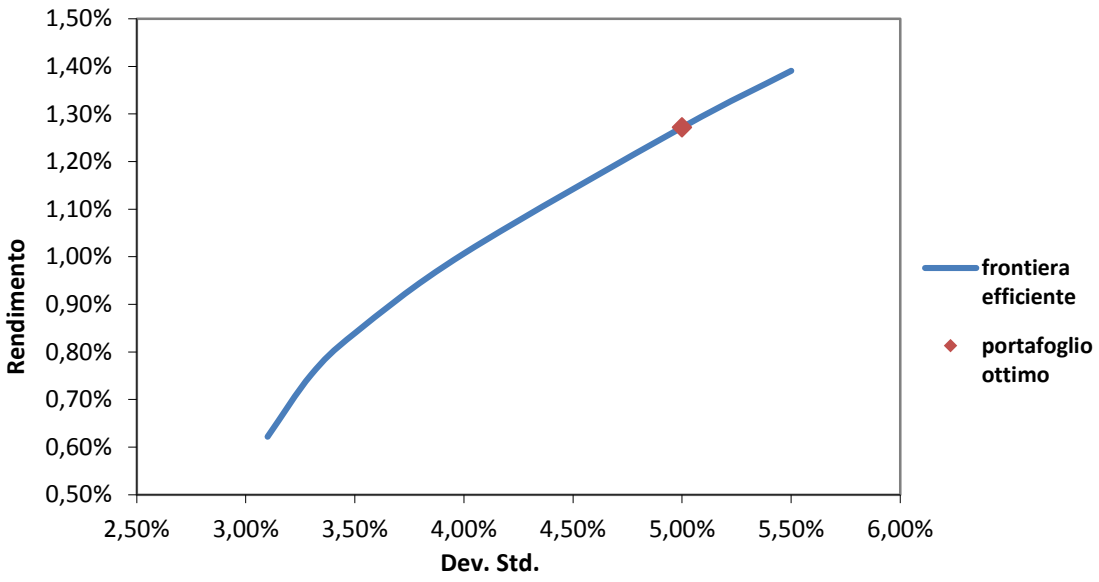

Figura 10: Frontiera efficiente nel piano rendimenti storici e deviazione standard e portafoglio ottimo calcolati con la procedura di ottimizzazione di Markowitz.

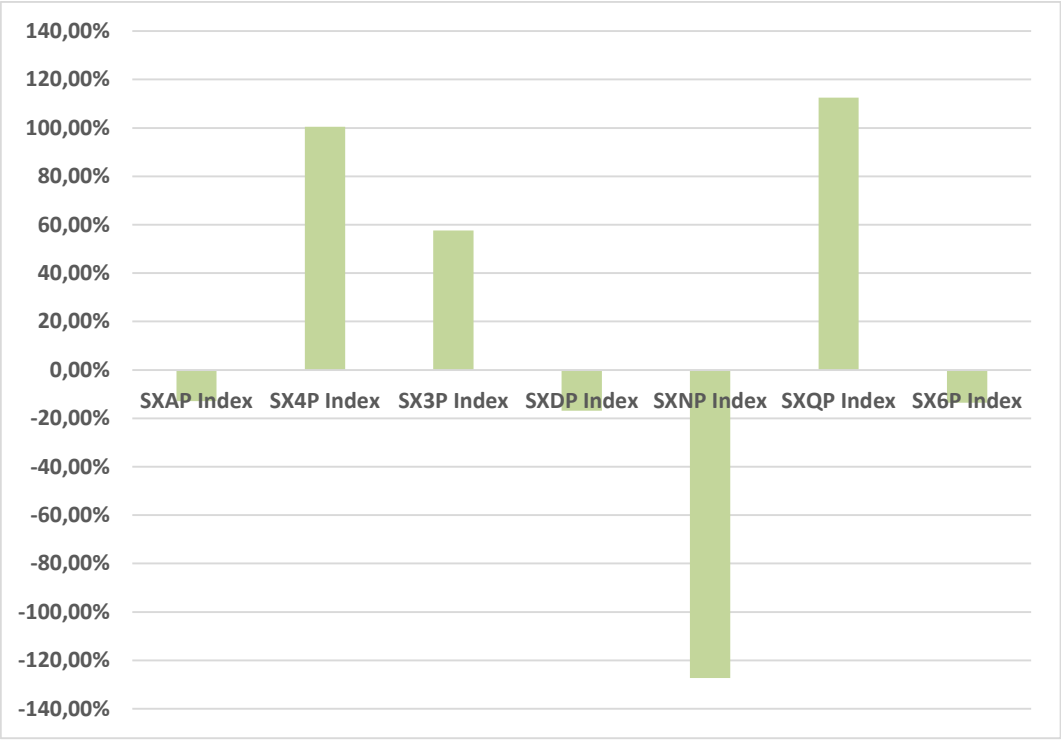

Figura 11: Composizione del portafoglio ottimo.

La Figura 12 invece mostra la variazione nella composizione del portafoglio posizionato lungo la frontiera efficiente calcolata imponendo il vincolo di non negatività, cioè nel caso in cui non possano essere assunte posizioni corte da parte dell'investitore. Come visto nella Figura 11, è chiaro anche in questo caso il limite derivante dal prendere i rendimenti storici come input per calcolare il peso ottimo degli asset che andranno a comporre il portafoglio dell'investitore. Infatti si può notare come il portafoglio sia completamente sbilanciato verso i due indici SX3P (Food & beverages) e SX4P (Chemicals), in particolare a mano a mano che il rischio aumenta. In questo caso il portafoglio ottimo è quello che offre un rischio del 3,5% e un rendimento del 6,9%. Dalla linea che parte dalla deviazione standard del 3,5% è possibile notare come la composizione del portafoglio in questo punto contenga i quattro indici settoriali che presentano l'indice di Sharpe maggiore (vedi Tabella 1).

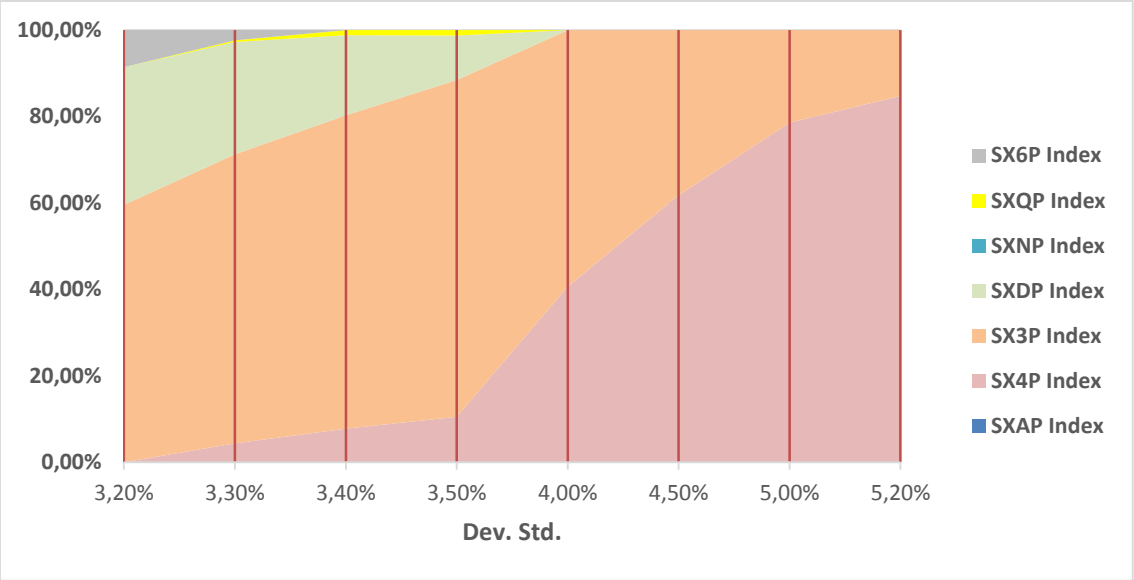

Figura 12: Variazione nella composizione del portafoglio all'aumentare del rischio utilizzando i rendimenti storici.

3.3. L'ottimizzazione con i rendimenti impliciti

Proprio per evitare la limitazione di ottenere una frontiera efficiente che portasse a portafogli troppo concentrati in pochi asset e con posizioni assunte troppo estreme (sia lunghe che corte), Black e Litterman hanno ideato un nuovo modello che non avesse come input i rendimenti storici ma i rendimenti impliciti da unire con le previsioni dell'investitore. Con il calcolo dei rendimenti impliciti è infatti possibile ottenere un portafoglio di equilibrio maggiormente bilanciato al suo interno. Il portafoglio così calcolato è un primo passo fondamentale per l'implementazione del modello BL, infatti a questo portafoglio saranno successivamente aggiunte alcune views.

Per calcolare i rendimenti impliciti attraverso la tecnica dell'ottimizzazione inversa, che verranno poi usati per definire la frontiera efficiente, gli input sono tre:

1. Σ, cioè la matrice di varianza covarianza dei sette indici (Tabella 3);
2. w, cioè la capitalizzazione di mercato dei sette indici: per calcolare il peso detenuto da ogni indice rispetto alla capitalizzazione complessiva di mercato, è stata preso il loro valore in euro del free float al giorno 28/06/2013, ultimo giorno

dell'analisi[39]. Questo valore è stato diviso per la somma della capitalizzazione dei sette indici (quindi come se il mercato fosse composto solo da loro), ottenendo quindi il peso dei singoli indici all'interno del mercato. Nella Tabella 4 sono stati riportati la capitalizzazione degli indici e il loro peso percentuale;

Codice dell'indice	Settore industriale	Capitalizzazione (miliardi di euro)	Peso della capitalizzazione (%)
SXAP Index	Automobilities & parts	155,36	5,44
SX4P Index	Chemicals	277,91	9,74
SX3P Index	Food & beverages	520,62	18,24
SXDP Index	Health care	677,75	23,75
SXNP Index	Industrial goods & services	624,54	21,89
SXQP Index	Personal & household goods	359,77	12,61
SX6P Index	Utilities	237,60	8,33
TOTALE		2853,55	100

Tabella 4: Capitalizzazione di mercato dei sette indici settoriali e relativo peso percentuale (w).

3. la definizione del coefficiente di avversione al rischio, δ: per calcolare questa costante la formula usata è $\delta = \frac{E(r_m)-r_f}{\sigma_m^2}$. Il benchmark considerato è rappresentato dall'indice STOXX Europe 600. Anche in questo caso come per gli indici settoriali, dal prezzo al netto dei dividendi preso l'ultimo giorno di contrattazione del mese, è stato calcolato il rendimento continuo in base logaritmica, e da qui la media dei rendimenti e la varianza riportati nella Tabella 5. Il rendimento dell'asset free risk come specificato precedentemente è quello del Bund tedesco a 2 anni che è di 0,0156% su base mensile. Si ottiene quindi un valore i δ pari a 1,1219.

[39] Il valore delle azioni presenti nel mercato e libere di essere negoziate (free float) è definito nel documento "STOXX Europe 600 Supersector Indices" pubblicato dalla STOXX Limited stessa il 28/06/2013.

Codice dell'indice	Descrizione	Media dei rendimenti (%)	Deviazione standard (%)
SXXP Index	STOXX Europe 600	0,2657	4,7219

Tabella 5: Rendimento e deviazione standard dell'indice STOXX Europe 600 da gennaio 2002 a giugno 2013.

Naturalmente, oltre a questi input, per calcolare la frontiera efficiente è necessario avere anche una matrice di varianza covarianza come misura del rischio. Per farlo è stata moltiplicata la matrice di varianza covarianza Σ calcolata precedentemente (Tabella 3) per il parametro τ, che in questo studio è stato considerato con valore uguale a 0,05. La matrice ottenuta ovviamente ha valori molto più bassi rispetto a Σ, ma questo è in linea con l'idea generale del modello BL, e cioè che nel futuro i rendimenti, in media, subiranno pochi oscillazioni dato che nel lungo periodo il mercato ritornerà sempre in equilibrio, sarà poi attraverso le views che l'investitore cercherà di approfittare a suo vantaggio di momentanei scostamenti o cambiamenti del trend. Nella Tabella 6 è possibile osservare la matrice di varianza covarianza che, insieme ai rendimenti impliciti, verrà utilizzata per il calcolo della frontiera efficiente.

	SXAP Index	SX4P Index	SX3P Index	SXDP Index	SXNP Index	SXQP Index	SX6P Index
SXAP Index	0,000346	0,000156	0,000065	0,000062	0,000164	0,000121	0,000092
SX4P Index	0,000156	0,000164	0,000062	0,000048	0,000149	0,000099	0,000090
SX3P Index	0,000065	0,000062	0,000066	0,000038	0,000064	0,000062	0,000042
SXDP Index	0,000062	0,000048	0,000038	0,000063	0,000049	0,000045	0,000035
SXNP Index	0,000164	0,000149	0,000064	0,000049	0,000177	0,000113	0,000096
SXQP Index	0,000121	0,000099	0,000062	0,000045	0,000113	0,000098	0,000063
SX6P Index	0,000092	0,000090	0,000042	0,000035	0,000096	0,000063	0,000103

Tabella 6: Matrice di varianza covarianza Στ.

Nella Tabella 7 è possibile osservare i rendimenti impliciti dei sette indici settoriali e la loro deviazione standard. Per ottenere i rendimenti impliciti è necessario moltiplicare tra loro i 3 parametri descritti precedentemente: $\Pi = \delta \Sigma w$; si può osservare inoltre come la deviazione standard degli indici sia molto inferiore rispetto a quella

ottenuta dai rendimenti storici, questo perchè τ ha un valore molto vicino a 0 che perciò porta ad avere un rischio molto basso:

Codice dell'indice	Settore industriale	Rendimento implicito (%)	Deviazione standard (%)
SXAP Index	Automobilities & parts	0,2677	1,8605
SX4P Index	Chemicals	0,2239	1,2797
SX3P Index	Food & beverages	0,1256	0,8100
SXDP Index	Health care	0,1109	0,7963
SXNP Index	Industrial goods & services	0,2420	1,3318
SXQP Index	Personal & household goods	0,1806	0,9914
SX6P Index	Utilities	0,1505	1,0152

Tabella 7: Rendimenti impliciti (II) e nuova deviazione standard dei sette indici settoriali.

La Figura 13 mostra la definizione della frontiera efficiente nello spazio rendimenti impliciti-deviazione standard. Per calcolarla, i rendimenti considerati sono quelli elencati nella Tabella 7, mentre la matrice di varianza covarianza è stata ottenuta moltiplicando la matrice di varianza-covarianza (Tabella 3) per 0,05, cioè τ.

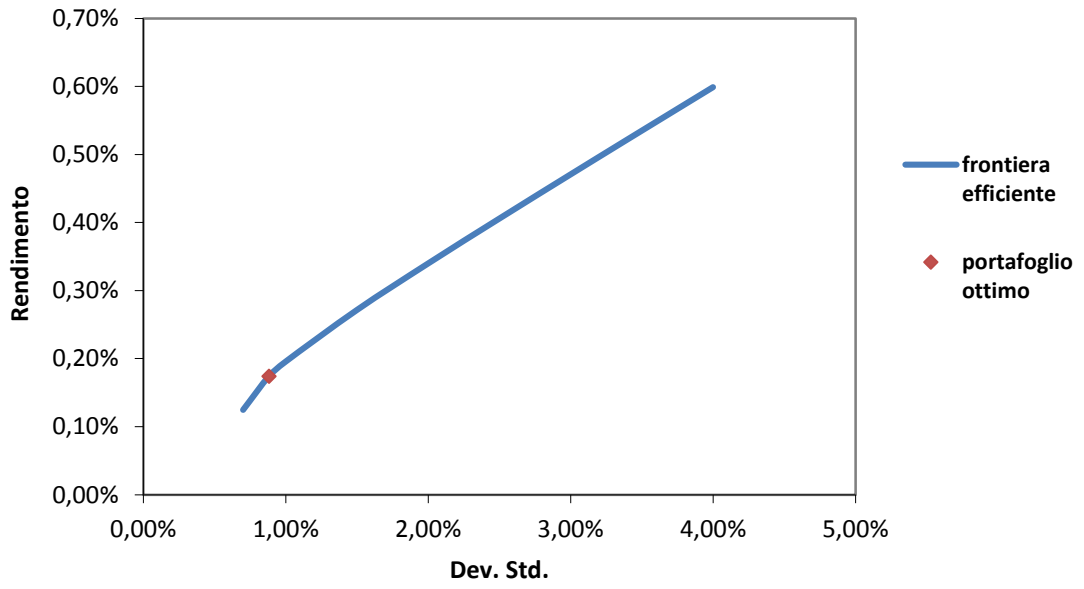

Figura 13: Frontiera efficiente e portafoglio ottimo calcolati con i rendimenti impliciti.

Utilizzando i rendimenti impliciti, il portafoglio ottimo, che rappresenta il portafoglio di mercato, (segnato in rosso nella Figura 13), che ha rendimento pari a 0,1741% e rischio del 0,881%, ha una composizione che è uguale alla capitalizzazione pesata di mercato dei sette indici settoriali (Figura 14).

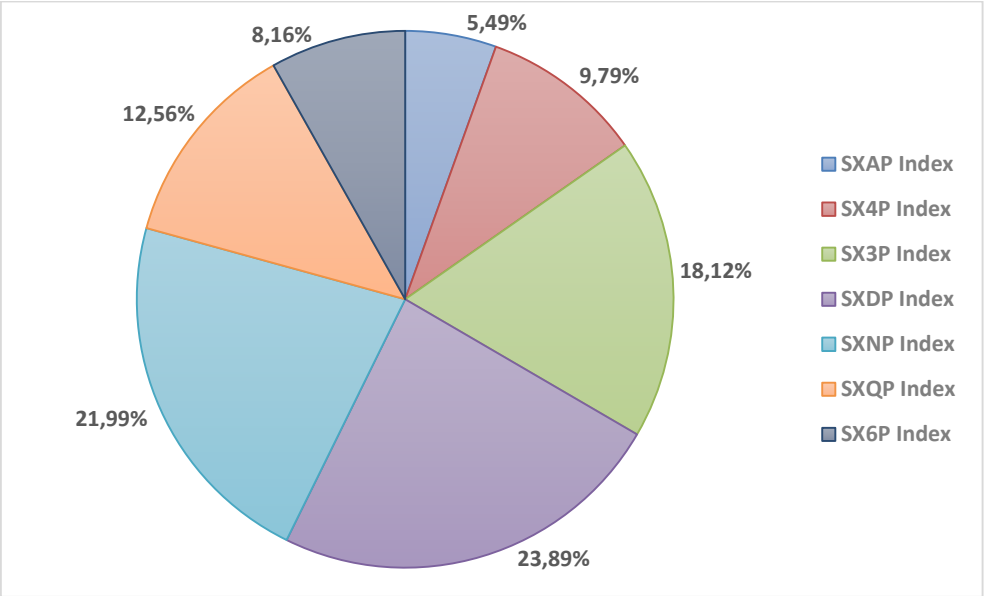

Figura 14: Composizione del portafoglio ottimo calcolato con i rendimenti impliciti.

Nella Figura 15 si può notare lo stesso tipo di grafico usato precedentemente per mostrare la variazione nella composizione del portafoglio all'aumentare del rischio imponendo vincoli di non negatività. In questo caso il peso degli indici all'interno del portafoglio è più bilanciato evidenziando quindi uno dei motivi per cui la costruzione del portafoglio con l'uso dei rendimenti storici non viene attuato nella realtà.

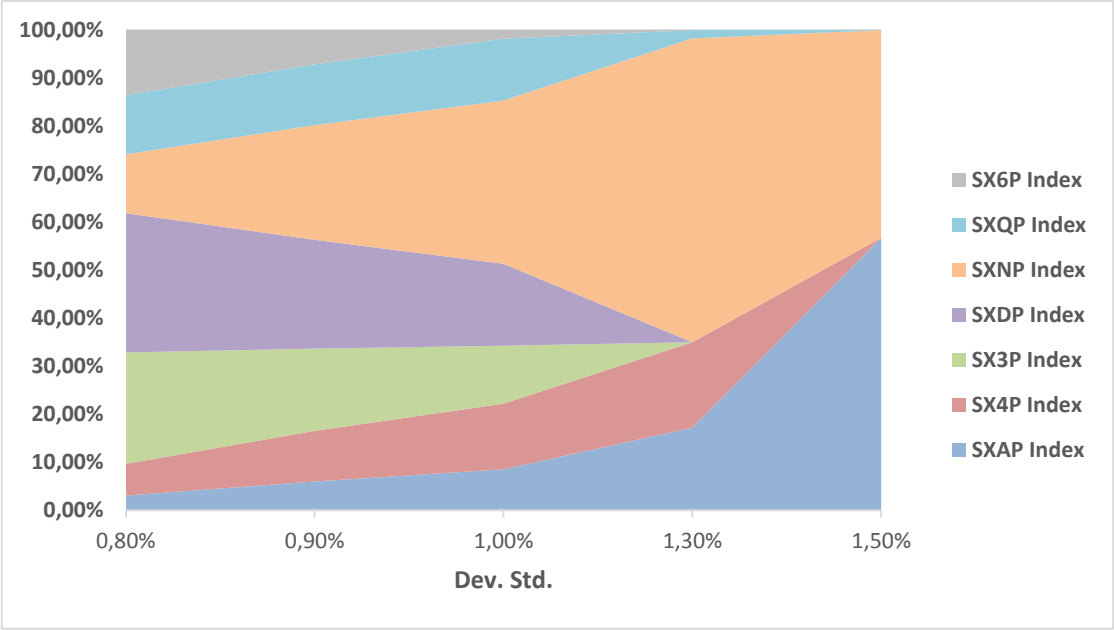

Figura 15: Variazione nella composizione del portafoglio all'aumentare del rischio utilizzando i rendimenti impliciti.

3.4. La definizione delle views

Per trovare la frontiera efficiente, e quindi il portafoglio ottimo utilizzando il modello BL, vengono assunte tre views sull'andamento futuro degli indici derivate dall'osservazione del mercato negli ultimi mesi, da opinioni espresse da economisti e gestori di fondi, dalle caratteristiche del settore industriale di appartenenza:

- *View assoluta*
  - L'indice SXDP – Health care mostrerà un leggero trend positivo nei prossimi mesi ed avrà un rendimento dello 0,85%.

    Nonostante questo settore non potrà mai andare veramente in crisi, la sua crescita non sarà alta nel prossimo futuro a causa della crisi economica che costringe gli Stati tagliare i fondi destinati alla spesa sanitaria;
- *Views relative*
  - L'indice SXAP – Automobilities & parts nei prossimi mesi aumenterà dell'1,5% rispetto all'indice SX4P – Chemicals.

Dopo anni di forte crisi, è possibile prevedere che il settore delle automobili mostrerà un trend positivo, come sta già succedendo negli ultimi tempi, a causa della forte ciclicità che lo contraddistingue. Inoltre è importante sottolineare che l'indice è composto per la maggior parte da aziende tedesche che esportano in tutto il mondo e che quindi favoriranno al rialzo del titolo. Infatti guardando alla composizione dell'indice e ordinando le varie società a seconda della loro capitalizzazione di mercato, le prime tre posizioni sono occupate da società tedesche, ed in particolare da DAIMLER, BMW e VOLKSWAGEN[40].

Il settore chimico, al contrario, sta risentendo molto della crisi economica e del forte ribasso della domanda. È possibile prevedere quindi che il settore automobilistco avrà performance molto migliori rispetto all'indice SX4P – Chemicals.

- L'indice SX6P – Utilities nei prossimi mesi aumenterà dello 0,5% rispetto all'indice SX4P – Chemicals.

  Il settore delle utilities[41] e quello chimico non mostreranno un'elevata differenza nelle loro performance nel prossimo futuro. Infatti, come il settore chimico, anche quello delle utilities risente del grave rallentamento economico, questo perchè, nonostante sia stato oggetto di un periodo di crescita, ora si può prevedere un'inversione di tendenza ad esempio a causa degli Stati che iniziano a tagliare i finanziamenti allo sviluppo di nuove infrastrutture o alle imprese che portano i loro stabilimenti all'estero facendo diminuire la domanda.

Dalle views è possibile specificare le matrici Q e P, matrici che sono riportate nella Tabella 8. Nella matrice P, che contiene il peso di ogni views, la prima riga si riferisce alla view assoluta, infatti facendo la somma dei suoi elementi si ottiene 1; le altre due righe invece identificano le views relative, queste righe sono caraterizzate dal fatto

[40] Il peso che hanno queste società all'interno del titolo a seconda della loro capitalizzazione di mercato rispetto alle altre componenti è: DAIMLER ha un peso del 28,80%, BMW ha un peso del 14,05%, VOLKSWAGEN 14,02%. All'interno dell'indice queste società pesano più del doppio rispetto alle altre componenti.

[41] Nel settore delle utilities si identificano quelle società che mantengono e gestiscono le infrastrutture per la fruizione di un servizio pubblico, come l'energia elettrica, l'acqua, il gas.

che la somma dei valori, per riga, sarà 0. Nella matrice Q si possono trovare i rendimenti previsti per ogni view.

		SXAP Index	SX4P Index	SX3P Index	SXDP Index	SXNP Index	SXQP Index	SX6P Index
	Q				***P***			
View 1	0,0085	0	0	0	1	0	0	0
View 2	0,015	1	-1	0	0	0	0	0
View 3	0,005	0	-1	0	0	0	0	1

Tabella 8: Matrici Q e P riferite alle tre views formulate sul futuro andamento dei sette indici settoriali.

Per quando riguarda la matrice di confidenza delle views, Ω, per calcolarla è stata usata la formulazione descritta precedentemente per tenerla proporzionale alla varianza dei rendimenti di equilibrio. I dati ottenuti sono molto vicini a 0, e questo significa che il modello darà molto peso alle views formulate:

$$\Omega = diag\ (P\ (\tau\Sigma)\ P') = \begin{bmatrix} 0{,}0000634146 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}000198701 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}0000875337 \end{bmatrix}$$

3.5. L'ottimizzazione unendo i rendimenti di equilibrio e le views

Ora, avendo calcolato i rendimenti impliciti e le matrici relative alle views, è possibile calcolare i rendimenti e la deviazione standard applicando il modello BL. La fomulazione usata è quella già descritta in precedenza e si ottiene un vettore 7x1 che è possibile vedere nella Tabella 9 dove sono riportati, a confronto, anche i rendimenti impliciti:

$$M_{BL} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}\ [(\tau\Sigma)^{-1}\ \Pi + P'\Omega^{-1}Q]$$

Codice dell'indice	Settore industriale	Rendimento BL (%)	Deviazione standard BL (%)	Rendimento implicito (%)
SXAP Index	Automobilities & parts	0,8815	8,4449	0,2677
SX4P Index	Chemicals	0,0678	5,8252	0,2239
SX3P Index	Food & beverages	0,2085	3,6944	0,1256
SXDP Index	Health care	0,4296	3,6049	0,1109
SXNP Index	Industrial goods & services	0,2184	6,0765	0,2420
SXQP Index	Personal & household goods	0,2625	4,5183	0,1806
SX6P Index	Utilities	0,2896	4,6405	0,1505

Tabella 9: Deviazione standard e rendimenti ottenuti applicando il modello BL e con i rendimenti impliciti.

Nella Figura 16 sono stati messi a confronto i rendimenti impliciti e quelli ottenuti considerando anche le views formulate. È possibile notare, in primo luogo, che non variano soltanto i rendimenti degli indici per i quali è stata fornulata un'opinione, ma variano leggermente anche i rendimenti degli altri indici. Questo è spiegabile dal fatto che tutti gli indici sono correlati tra loro perciò, quando si formula una view su un asset, indirettamente questa avrà conseguenze anche sugli altri asset.

Comunque, i rendimenti che subiscono la maggior variazione sono proprio quelli oggetto delle views, infatti l'indice SXDP – Heath care su cui si era previsto un trend positivo mostra un rendimento maggiore rispetto al corrispondente rendimento implicito, allo stesso modo gli indici su cui erano state formulate le views relative: gli indici SXAP e SX6P mostrano un aumento nel rendimento (e il primo indice maggiormente rispetto al secondo, dato dal fatto appunto che la views sul settore automobilistico era più forte rispetto al settore utilities), mentre l'indice SXAP mostra una decisa diminuzione rispetto al rendimento implicito.

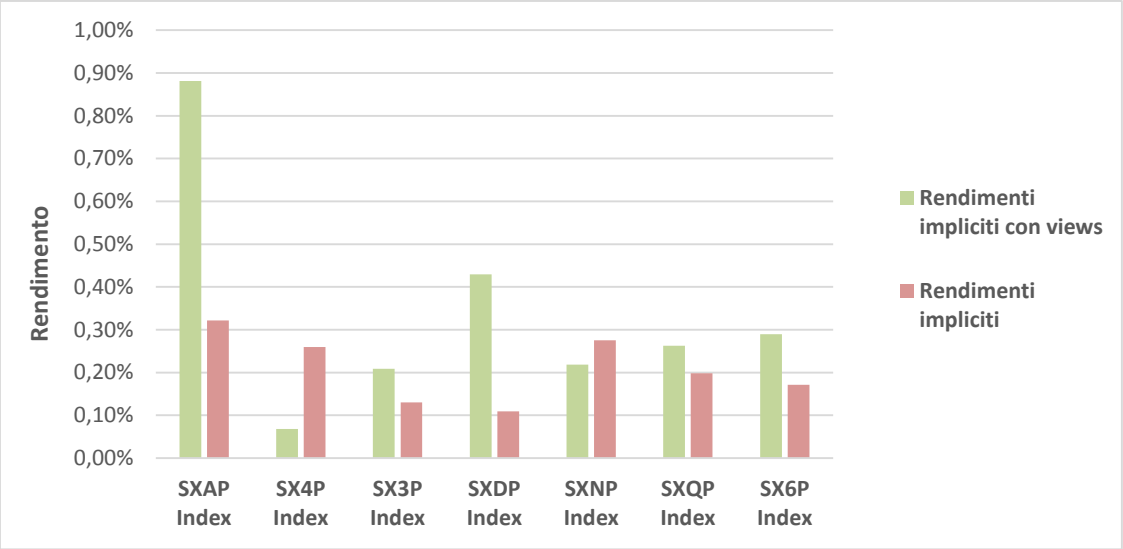

Figura 16: Confronto tra i rendimenti impliciti con e senza views.

La matrice di varianza covarianza è stata calcolata utilizzando la formula espressa nel capitolo precedente:

$$V_{BL} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}$$

Però, come spiega Meucci (2010), V_{BL}, la varianza della distribuzione a posteriori, rappresenta la varianza della stima della media della distribuzione a posteriori e non la varianza dei rendimenti E(r). Questo significa che la matrice di varianza covarianza da inserire nel modello di ottimizzazione rendimento-rischio non è V_{BL} ma $V^* = \Sigma + V_{BL}$. Nella Tabella 10 è possibile notare la matrice di varianza covarianza ottenuta dalla somma delle due matrici.

	SXAP Index	SX4P Index	SX3P Index	SXDP Index	SXNP Index	SXQP Index	SX6P Index
SXAP Index	0,007132	0,003226	0,001345	0,001264	0,00339	0,002491	0,001931
SX4P Index	0,003226	0,003393	0,001277	0,000988	0,003095	0,002058	0,001876
SX3P Index	0,001345	0,001277	0,001365	0,000785	0,001332	0,001283	0,000869
SXDP Index	0,001264	0,000988	0,000785	0,0013	0,001005	0,000917	0,000712
SXNP Index	0,00339	0,003095	0,001332	0,001005	0,003692	0,002345	0,002005
SXQP Index	0,002491	0,002058	0,001283	0,000917	0,002345	0,002042	0,001306
SX6P Index	0,001931	0,001876	0,000869	0,000712	0,002005	0,001306	0,002153

Tabella 10: Matrice di varianza covarianza V*.

Ora è possibile calcolare la frontiera efficiente ottenuta usando i rendimenti e la matrice di varianza covarianza derivati applicando il modello BL. La frontiera efficiente e il portafoglio ottimo (segnato in rosso lungo la frontiera) calcolati senza l'imposizione di vincoli di non negatività si possono vedere nella Figura 17.

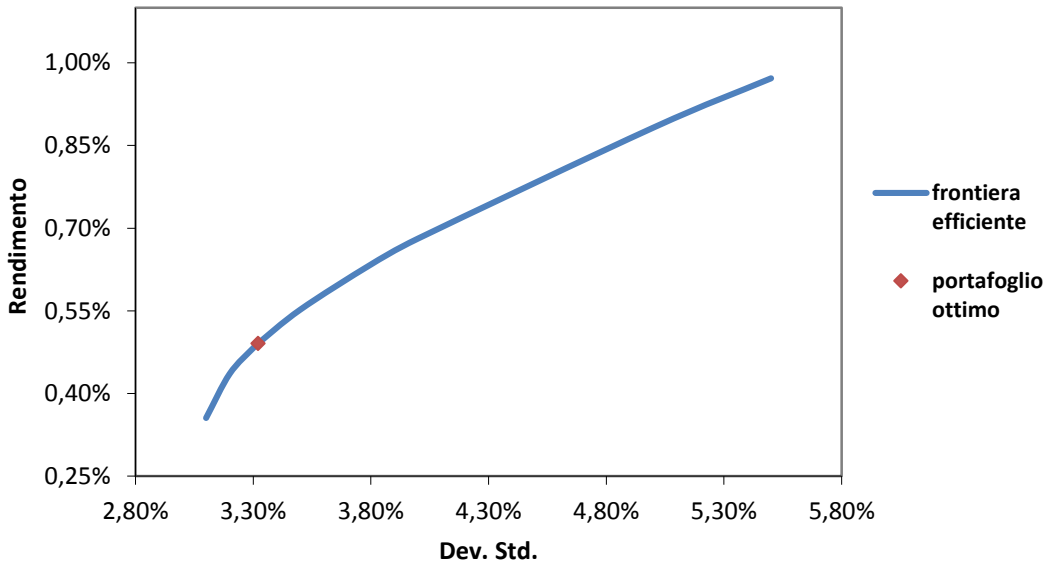

Figura 17: Frontiera efficiente e portafoglio ottimo derivati con il modello BL.

La composizione del portafoglio ottimo è mostrata nella Figura 18. Il portafoglio ha rendimento pari a 0,491% e deviazione standard di 3,321%. Nella sua composizione vengono bilanciati sia i rendimenti impliciti che le views formulate, quindi ad esempio si può osservare come venga assunta un'importante posizione lunga sull'indice SXDP – Health care, cioè l'indice su cui era stata formulata la view assoluta positiva, e una posizione corta sull'indice SX4P – Chemicals, su cui sono state formulate le views relative negative.

Figura 18: Composizione del portafoglio ottimo derivato con il modello BL

Per comprendere meglio i risultati ottenuti, nella Tabella 11 sono stati messi a confronto i tre portafogli ottimi calcolati con le tre diverse tecniche senza vincoli di non negatività:

Modello finanziario	Rendimento (%)	Deviazione standard (%)	Performance di Sharpe (%)
Ottimizzazione con rendimenti storici	1,27	5	0,25
Ottimizzazione con rendimenti impliciti	0,17	0,88	0,19
Ottimizzazione con modello BL	0,5	3,32	0,15

Tabella 11: Confronto tra rendimento e rischio dei portafogli ottimi calcolati.

Osservando la performance di Sharpe, che indica la quantità di rendimento in più per ogni punto di rischio assunto, il miglior portafoglio tra i tre è rappresentato da quello calcolato con i rendimenti storici con indice pari a 0,25%, in seconda posizione viene quello di equilibrio, con indice pari a 0,19%, e come ultimo quello calcolato con il procedimento di Black e Litterman (0,15%). Dati questi risultati però non significa che il modello BL perde la sua validità e il suo portafoglio sia peggiore degli altri, infatti l'indice

è un rapporto che non tiene conto di molti altri aspetti. Black e Litterman con il loro procedimento sono riusciti a offrire una modello matematico consistente che riesce ad unire all'equilibrio le previsioni dell'investitore. Senza il modello BL, il portafoglio in cui si sarebbe investito è rappresentato da quello ottenuto con l'applicazione dell'ottimizzazione media-varianza usando come input i rendimenti storici. In questo caso però non si sarebbe tenuto conto della capitalizzazione dei vari titoli all'interno del mercato, delle previsioni dell'investitore e della fiducia che ripone nelle stesse. Inoltre nella Tabella 11 si può osservare che il rischio del portafoglio calcolato con il modello BL è inferiore rispetto a quello del portafoglio calcolato prendendo i rendimenti storici, a significare che con il modello BL si ottengono dei rendimenti attesi più stabili, concentrati intorno al proprio valore medio.

Conclusioni

In questo lavoro è stato descritto il modello di selezione di portafoglio ideato da Black e Litterman nei primi anni Novanta. La trattazione è iniziata partendo dal modello di Markowitz, un rivoluzionario modello di selezione di portafoglio sviluppato più di sessant'anni fa e considerato oggi il punto di partenza della finanza moderna. Questo modello nel tempo però ha dimostrato di avere vari limiti che ne hanno causato un limitato utilizzo da parte degli investitori. Per sopperire a queste mancanze, nel corso dei decenni sono stati sviluppati altri modelli atti a dare agli investitori una valida alternativa matematicamente forte a cui potessero affidare le proprie decisioni d'investimento. Uno di questi modelli è appunto il modello di Black e Litterman, molto importante per tutta la materia finanziaria a causa del suo approccio innovativo. I due economisti infatti sono riusciti a sviluppare un modello formalmente solido che permetesse di unire due diversi tipi di informazione rappresentati da una parte dall'equilibrio di mercato, calcolato sfruttando il Capital Asset Pricing Model, e dall'altra dalle opinioni dell'investitore sul futuro andamento dell'economia. Il portafoglio ottimo finale quindi terrà conto di entrambe le fonti d'informazione: la sua media, varianza e composizione si avvicineranno all'equilibrio di mercato o alle views dell'investitore tanto più l'investitore avrà espresso views estreme o fiducia nelle stesse.

Nella terza parte della tesi è stata descritta un'applicazione pratica del modello di Black e Litterman in cui sono stati confrontati tra loro tre protafoglio ottenuti con tecniche differenti: l'ottimizzazione media-varianza classica di Markowitz, l'ottimizzazione inversa derivata dal CAPM e il modello BL. I risultati ottenuti dimostrano che tra i tre approcci, il portafoglio ottenuto con il modello di Markowitz è quello che presenta l'indice di Sharpe più alto, mentre il portafoglio ottenuto con l'applicazione del modello BL è quello con l'indice di Sharpe minore. Sarebbe comunque sbagliato affermare che per questo motivo il portafoglio ottenuto con il modello BL è da considerarsi meno efficace rispetto agli altri dato che è necessario tenere conto anche di altri aspetti oltre alla performance di Sharpe, infatti utilizzare un portafoglio costruito con il modello di Markowitz significa anche accettare tutti i suoi limiti, rendendo di fatto il portafoglio poco affidabile.

Nella pratica, implementare il modello di Black e Litterman non è eccessivamente complicato, sicuramente l'aspetto più difficile risiede nel definire dei parametri come τ e Ω che sono molto soggettivi e verso i quali gli economisti hanno espresso opinioni non sempre concordanti. Nonstante le difficoltà nell'implementazione però, rispetto ad altri modelli, la forza del modello BL sta nel fatto che è in grado di considerare come input le views dell'investitore sugli asset compresi all'interno del portafoglio, views che non è necessario siano riferite a tutti gli asset ma anche soltanto ad una parte di loro, per ottenere alla fine il portafoglio ottimo finale.

Il modello di Black e Litterman è stato solo il punto di partenza per molti altri autori ed economisti che ne hanno sviluppato estensioni e risolto quegli aspetti che possono essere considerati i suoi punti deboli. Un esempio è l'estensione proposta nella seconda parte di questa tesi in cui Yanou descrive il portafoglio ottimo che un investore deve detenere quando vuole prendere in considerazione l'eventualità che le views espresse siano sbagliate o parzialmente sbagliate, in questo caso la parte fondamentale nella costruzione del portafoglio ottimo la fanno i costi di transazione da sostenere per modificare il proprio investimento. L'altra estensione presente nella seconda parte di questa tesi è quella di Meucci in cui l'autore non si ferma alla definizione della media dei rendimenti attesi del modello di riferimento, come nel modello originale e la maggior parte degli autori, ma va oltre andando a definire la ditribuzione della media dei rendimenti.

Quindi, come ogni altro approccio innovativo, anche il modello di Black e Litterman è oggetto di precisazioni da parte di altri autori. Ormai però è innegabile il suo fondamentale contributo che ha portato alla finanza moderna e il suo utilizzo da parte di importanti istituzioni finanziarie. Goldman Sachs ad esempio ha pubblicato nel 1998 un articolo[42] relativo alla sua esperienza nell'utilizzo del modello BL per tre anni consecutivi. Gli autori, Bevan e Winkelmann, descrivono in modo dettagliato il procedimento seguito per arrivare ad ottenere un portafoglio ottimo. Viene dimostrato

[42] Bevan A., Winkelmann K. (1998), "Using the Black-Litterman global asset allocation model: Three years of practical experience", Fixed Income Research, Goldman Sachs.

che questo portafoglio così construito ha ottenuto performance migliori sia in termini di rischio che di rendimento rispetto al benchmark preso a riferimento.

In conclusione, per attuare una strategia di investimento attiva veramente efficace, il modello sviluppato da Black e Litterman può fornire un prezioso aiuto a tutti gli investitori. Attuare una strategia d'investimento attiva significa cercare di ottenere performance migliori del proprio benchmark, e per farlo l'investitore deve essere in grado di avere informazioni o views che gli permettano di farlo. Uno strumento giusto è il modello di Black e Litterman perchè permette di aggiungere valore al proprio portafoglio dato che unisce le informazioni provenienti dal mercato (cioè l'equilibrio di mercato) e le informazioni provenieni dall'investitore (cioè le sue views espresse con l'intento di scostarsi positivamente dal benchmark) ottenendo un portafoglio solido in termini di rendimento e controllo del rischio.

Bibliografia

Bagasheva B.S., Fabozzi F.J., Hsu J., Rachev S. (2008), *Bayesian Methods in Finance*, John Wiley and Sons, New Jersey.

Best M. J., Grauer R. R. (1991), "On the sensitivity of mean-variance-efficient portfolios to changes in assets means: Some analytical and computational results", *The review of Financial Studies*, Vol. 4, No. 2, pp. 315-342.

Bevan A., Winkelmann K. (1998), "Using the Black-Litterman global asset allocation model: Three years of practical experience", Fixed Income Research, Goldman Sachs.

Black F., Litterman R. (1991), "Asset Allocation: combining investor views with market equilibrium", *The Journal of Fixed Income*, September, pp. 7-18

Black F., Litterman R. (1992), "Global Portfolio Optimization", *Financial Analysts Journal*, Vol. 48, No. 5, pp. 28-43.

Blamont D., Firoozye N. (2003), "Quantitative Strategy", *Fixed Income Weekly*, Global Markets Research, Deutsche Bank.

Bodie Z., Kane A., Marcus A.J. (2011), *Investments*, McGraw-Hill Irwin, New York.

Ceria S., Stubbs R. A. (2006), "Incorporating estimation errors into portfolio selection: Robust portfolio construction", *Journal of Asset Management*, Vol. 7, No. 2, pp. 109-127.

Cheung W. (2009), "The Black-Litterman model explained", *Journal of Asset Management*, Vol. 1, No. 4, pp. 229-243.

Cheung W. (2011), "Transparent augmented Black-Litterman allocation: simple and unified framework for strategy combination, factor mimicking, hedging, and stock-specific alphas", www.researchgate.net.

Chopra V., Ziemba W. (1993), "The effect of errors in means, variances, and covariances on optimal portfolio choice", *The Journal of Portfolio Management*, Vol. 19, No. 2, pp. 6-11

Christodoulakis G. (2002), "Bayesian optimal portfolio selection: the Black-Litterman Approach", City University, London, unpublished.

Da Silva A.S., Lee W., Pornrojnangkool B. (2009), "The Black-Litterman model for active portfolio management", *The Journal of Portfolio Management*, Vol. 35, No. 2, pp. 61-70.

Dhingra H. L. (1980), "Effects of estimation risk on efficient portfolios: a Monte Carlo simulation study", *Journal of Business Financial & Accounting*, Vol. 7, No. 2, pp. 277-295.

Drobetz W. (2001), "How to avoid the pitfalls in portfolio optimization? Putting the Black-Litterman approach at work", *Financial Markets and Portfolio Management*, Vol. 15, No. 1, pp. 59-75.

Fabozzi F.J., Focardi S.M., Kolm P.N. (2006), "Incorporating trading strategies in the Black-Litterman framework", *The Journal of Trading*, Vol. 1, No. 2, pp. 28-37.

Gofman M., Manela A. (2012), "An empirical evaluation of the Black-Litterman approach to portfolio choice", www.researchgate.net.

He G., Litterman R. (1999), "The intuition behind Black-Litterman model portfolios", *Working paper*, www.blacklitterman.org.

Idzorek T. M. (2005), "A step-by-step guide to the Black and Litterman model", *Working Paper*, www.blacklitterman.org.

Jorion P. (1992), "Portfolio optimization in practice", *Financial Analysts Journal*, Vol. 48, No. 1, pp. 68-74.

Koch W. (2005), "Consistent return estimates – The Black-Litterman Approach", Cominvest, Frankfurt MathFinance Workshop.

Lummer S. L., Riepe M. W., Siegel L. B. (1994), "Taming your optimizer: a guide through the pitfalls of mean-variance optimization", *Ibbotson Associates*, Chicago.

Markowitz H. (1952), "Portfolio Selection", *The Journal of Finance*, Vol. 7, No. 1, pp. 77-91.

Martellini L., Ziemann V. (2007), "Extending Black-Litterman analysis beyond the mean-variance framework", EDHEC Risk and Asset Management Research Centre.

Meucci A. (2010), "The Black-Litterman approach: original model and extensions", *Working paper*, ssrn.com/abstract=1117574.

Michaud R.O. (1989), "The Markowitz optimization enigma: is 'optimized' optimal?", *Financial analysts journal*, Vol. 45, No. 1, pp. 31-42.

Michaud R.O., Esch D.N., Michaud R.O. (2013), "Deconstructing Black-Litterman: how to get the portfolio you already knew you wanted", *Journal of Investment Management*, Vol. 11, No. 1, pp. 6-20.

Mishra A.K., Pisipati S., Vyas I. (2011), "An equilibrium approach for tactical asset allocation: Assessing Black-Litterman model to Indian stock market", *Journal of Economics and International Finance*, Vol. 3, No. 10, pp. 553-563.

Pastorello S. (2001), *Rischio e rendimento. Teoria finanziaria e applicazioni econometriche*, Il Mulino, Bologna.

Pézier J. (2007), "Global portfolio optimization revised: A least discrimination alternative to Black-Litteman", *ICMA Centre Discussion Papers in Finance DP2007-07*, University of Reading.

Piccolo D. (2010), *Statistica*, Il Mulino, Bologna.

Pomante U. (2008), *Asset allocation razionale*, Bancaria Editrice, Roma.

Satchell S., Scowcroft A. (2000), "A demystification of the Black-Litterman model: Managing quantitative and traditional portfolio construction", *Journal of Asset Management*, Vol. 1, No. 2, pp. 138-150.

Sharpe W.F. (1974), "Imputing expected security returns from portfolio composition", *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 9, No. 3, pp. 463-472.

Sharpe W.F. (2007), "Expected utility asset allocation", *Financial Analysts Journal*, Vol. 63, No. 5, pp. 18.

STOXX Limited (aprile 2013), "Index methodology guide (portfolio based indices)", www.stoxx.com.

STOXX Limited (giugno 2013), "STOXX Europe 600 Supersector Indices", Zurigo, www.stoxx.com.

Verbeek M. (2006), *Econometria*, Zanichelli, Bologna.

Walters J. (2009), "The Black-Litterman model in detail", www.blacklitterman.org.

Yanou G. (2010), "The Black-Litterman model: wrong views vs. opportunity cost", *Working paper*, ssrn.com/abstract=1722237.

Zhou G. (2009), "Beyond the Black-Litterman: Letting the data speak", *The Journal of Portfolio Management*, Vol. 36, No. 1, pp. 36-45.

Sitografia

www.blacklitterman.org

www.eurizoncapital.it

www.fineco.norisk.it

www.globalconnections.hsbc.com

www.morningstar.com

www.oxfordeconomics.com

www.researchgate.net

www.stoxx.com