

## *CAPITOLO I*

# **LA TEORIA TRADIZIONALE: MERCATO EFFICIENTE, DISTRIBUZIONE NORMALE E RANDOM WALKS**

### **1.1 INTRODUZIONE: LO SVILUPPO DELLA TEORIA**

A partire dal XX secolo, con l'affermarsi dei mercati finanziari, gli economisti, e assieme a loro matematici, statistici ed econometrici, hanno tentato di creare e di sviluppare alcune teorie atte a spiegare il funzionamento di questi stessi mercati. L'idea era, ed è, quella di individuare modelli validi ed efficaci, che siano in grado di comprendere, spiegare e rappresentare l'andamento dei mercati finanziari nella misura il più possibile precisa. Il concetto di "mercato efficiente" è sicuramente uno dei punti cruciali nello sviluppo di queste teorie. Esso è stato tanto studiato, approvato ed appoggiato da alcuni teorici, quanto discusso e criticato da altri.

L'origine di tale teoria viene comunemente fatta risalire al 1900 grazie all'opera "*Théorie de la spéculation*" di Louis Bachelier [Bachelier, 1900] che, nel tentativo di applicare i metodi fino all'ora utilizzati per studiare sistematicamente la dinamica del gioco d'azzardo al campo finanziario, comprese che era possibile applicare la teoria delle probabilità allo studio dei mercati azionari, sebbene ritenesse che, a causa delle innumerevoli variabili implicate nell'andamento dei titoli di Borsa, fosse pressoché

impossibile prevederne le variazioni future. Per Bachelier si trattava quindi di studiare in maniera statistico-matematica il mercato finanziario stabilendone, per un dato istante, la legge di probabilità che ne regola le variazioni. Non reputava infatti possibile prevedere gli avvenimenti futuri di un mercato, ma riteneva che si potesse attribuire a ciascun evento una data probabilità che esso avvenga. Nel suo lavoro, Bachelier afferma che le variazioni dei prezzi si comportano sulla base di un modello *random walk*<sup>1</sup> e che, quindi, possono essere rappresentate da variabili casuali *IID*<sup>2</sup>.

## 1.2 IL MERCATO EFFICIENTE

Nonostante il lavoro di Bachelier fosse stato rivoluzionario, questo fu ignorato per molto tempo, finché Working e Cowles, negli anni Trenta, applicarono l'analisi statistica ai mercati. Da qui fino a metà degli anni Sessanta furono pubblicati una serie di lavori che gettarono le basi per la teoria dei mercati efficienti (*efficient market hypothesis: EMH*). In particolare, la definizione di Teoria dei mercati efficienti si deve ad Eugene Fama che, nella sua tesi di dottorato "*The behavior of stock market prices*", prendendo spunto dalla letteratura dei 25 anni precedenti, confermava la "Random Walk Theory" dei prezzi azionari già investigata dal già citato Bachelier e successivamente da Working nel 1934, Cowles nel 1937, Granger e Morgenstern nel 1963 e Samuelson nel 1965. Alle loro opere, Fama aggiunse un più rigoroso approccio statistico-matematico ed una maggiore forza nell'esposizione: si trattava di una nuova rivoluzione per la finanza. Fama formulò tre diverse ipotesi in merito all'efficienza dei mercati:

- **efficienza in forma debole:** i prezzi osservati sul mercato riflettono tutta l'informazione contenuta nella serie storica dei prezzi stessi. In questo, caso risulta molto difficile formulare una strategia di trading con un rendimento atteso superiore a quello del mercato basandosi solo sull'informazione contenuta nella serie storica dei prezzi;

---

<sup>1</sup> Un processo *random walk* è un processo stocastico nel quale le variazioni dei prezzi di mercato sono indipendenti fra loro e nel quale le distribuzioni di probabilità dei prezzi sono uguali tra loro. È esprimibile come  $P_t = P_{t-1} + E_t$  dove  $P_t$  è il prezzo dell'azione al tempo  $t$  ed  $E_t \sim (0, \sigma^2)$  (processo *white noise* al tempo  $t$ ).

<sup>2</sup> Due variabili casuali sono IID se hanno la stessa distribuzione di probabilità e se sono stocasticamente indipendenti.

- **efficienza in forma semi-forte:** i prezzi di mercato riflettono tutta l'informazione contenuta nella serie storica dei prezzi, più qualunque altra informazione pubblica. In questo caso, non è possibile formulare una strategia di trading con un rendimento atteso superiore a quello del mercato basandosi solo sull'informazione di pubblico dominio;
- **efficienza in forma forte:** i prezzi di mercato riflettono l'informazione contenuta nella serie storica dei prezzi stessi, qualunque altra informazione pubblica, nonché qualunque informazione privata. Non è possibile formulare una strategia di trading con un rendimento atteso superiore a quello del mercato basandosi su una qualsiasi informazione privata/privilegiata.

L'efficienza in forma forte implica quella in forma semi-forte, che a sua volta implica quella in forma debole; le implicazioni inverse, per contro, non valgono. Nel suo lavoro, Fama sosteneva quindi l'efficienza dei mercati, se non altro in forma debole, affermando che il mercato è una *martingala*<sup>3</sup> o “gioco equo” o, utilizzando le sue parole, “*a market in which prices fully reflect available informations*” [Fama E.F.,1970]. Si stabilisce di conseguenza che se i rendimenti hanno una distribuzione di probabilità normale, allora il mercato è efficiente mentre il viceversa non è sempre vero. Ha qui origine, grazie alle sue caratteristiche di tipo probabilistico, il ruolo fondamentale della distribuzione normale o Gaussiana nell'analisi dei mercati dei capitali e nella moderna teoria finanziaria.

Secondo l'ipotesi di Fama appena descritta, le variazioni dei prezzi dei titoli contrattati nei mercati finanziari sono dettate solo ed esclusivamente dall'inserimento nel mercato stesso di nuova informazione, la quale verrebbe istantaneamente scontata nel prezzo stesso. Da ciò consegue che non vi è alcuna speranza per gli operatori finanziari di “battere il mercato” traendo profitto dalle transazioni eseguite. Infatti, dal momento in cui una data informazione viene incorporata istantaneamente nel prezzo, non esiste possibilità che un investitore, che anche conosca in anticipo una nuova notizia, possa trarne beneficio acquistando o vendendo il titolo sottostante a seconda che l'informazione sia buona o cattiva. Oltre a ciò, esistendo un elevato numero di investitori che interagiscono nel mercato, il prezzo è soggetto a veloci spostamenti verso nuovi punti di equilibrio.

---

<sup>3</sup> Una *martingala* è un processo stocastico  $X_t$ , indicizzato da un parametro crescente  $t$  (spesso interpretabile come tempo) in cui per ogni  $s \leq t$  il valore atteso di  $X_t$  condizionato ai valori  $X_r$ , con  $r \leq s$ , è uguale ad  $X_s$ . Il più noto esempio di martingala è il moto browniano.

Il fondamento dell'ipotesi di efficienza dei mercati poggia essenzialmente sulla *razionalità degli investitori*. Gli operatori di mercato devono essere individui *razionali* (o, come alcuni economisti preferiscono, devono avere *aspettative razionali*<sup>4</sup>) e di conseguenza valutano il mercato in modo razionale e sono in grado di comprendere quali siano le informazioni rilevanti e quali no<sup>5</sup>.

Su queste basi, la teoria di Fama si prestò ad attaccare sia il ramo dell'*analisi tecnica*, cioè il settore dell'economia che studia l'andamento dei prezzi dei titoli tramite metodi grafici e statistici, sia quello dell'*analisi fondamentale*, che ha come scopo quello di stimare il prezzo "corretto" di un titolo in base alle caratteristiche economiche e finanziarie della società di riferimento. Il punto di forza della posizione è che qualsiasi informazione sui prezzi derivante dall'esperienza passata non possa essere in alcun modo collegata con i prezzi che si verificheranno in futuro. Per rendere più chiare le peculiarità che deve avere un mercato per essere considerato efficiente<sup>6</sup>, si elencano schematicamente le caratteristiche principali:

- nel mercato agiscono molti soggetti, i quali vogliono massimizzare i profitti;
- i prezzi riflettono pienamente ed istantaneamente tutte le informazioni disponibili;
- gli operatori che agiscono nel mercato sono razionali.

### 1.3 TEORIA RANDOM WALK ED EFFICIENZA DEL MERCATO

Il percorso casuale (o, appunto, random walk) è un processo stocastico che è stato soggetto a numerosi studi e ricerche grazie alle sue particolarità. Secondo quanto riportato finora analizzando gli studi di Fama, ma anche grazie alle ricerche dello studioso e premio

---

<sup>4</sup> Un individuo ha aspettative razionali se utilizza le informazioni in suo possesso in maniera efficiente, utilizzandole per prevedere eventuali conseguenze e adattando quindi il suo comportamento per trarne profitto o per minimizzare le perdite.

<sup>5</sup> Per valutare l'efficienza del mercato, Fama era solito porsi 3 domande:

1. è possibile trovare una strategia che consenta di "battere il mercato"?
2. è possibile trovare un'informazione migliore o che fornisca risultati migliori?
3. è possibile trovare delle azioni che battano regolarmente una selezione casuale?

Se la risposta a queste tre domande è negativa, allora il mercato è efficiente.

<sup>6</sup> Si precisa la distinzione fra la definizione di mercato *efficiente* e quella di mercato *perfetto*: la seconda implica l'assenza di attriti (quali costi di transazione, imposte, ecc), la presenza di un regime di perfetta concorrenza e vi è efficienza informativa. Nella prima invece queste tre condizioni non sono necessarie.

nobel per l'economia Sharpe, si può trarre la conclusione che l'evoluzione del prezzo di uno strumento finanziario è essenzialmente casuale e che la migliore previsione del prezzo dell'istante successivo non può che essere fatta sulla base del prezzo precedente e delle informazioni disponibili al mercato. Pertanto i movimenti dei prezzi e dei rendimenti non seguono alcun trend o regolarità ma seguirebbero, invece, un *processo stocastico*. Nello specifico, i prezzi dei titoli azionari possono essere considerati come le realizzazioni di processi stocastici discreti a tempo discreto; tuttavia il processo a tempo continuo e a variabile continua si dimostra essere un modello utile e ben adattabile allo studio del loro andamento.

Nel dettaglio, in questa sessione vengono introdotti i processi stocastici ad incrementi indipendenti di tipo gaussiano. Si consideri un intervallo  $[0, T]$ , suddiviso in  $n$  intervalli  $[t_i, t_{i+1}]$ , con  $i=1, \dots, n$ , di ampiezza uguale a  $\Delta t$ , per i quali

$$(1.1) \quad t_i = i \cdot \left(\frac{T-0}{n}\right) = i \cdot \Delta t, \forall i = 0, 1, \dots, n$$

e quindi tale per cui

$$(1.2) \quad t_{i+1} - t_i = \frac{T}{n} = \Delta t, \forall i = 0, 1, \dots, n.$$

Un processo stocastico ad incrementi indipendenti di tipo *random walk* è definito come:

$$(1.3) \quad P_{t_{i+1}} = P_{t_i} \left[ 1 + \mu(t_{i+1} - t_i) + \sigma \sqrt{(t_{i+1} - t_i)} \varepsilon_{t_i} \right], \forall i = 0, 1, \dots, n - 1$$

dove

$$\mu \in \mathbb{R}, \sigma \in R_+ \text{ e } \varepsilon_{t_i} \sim \mathcal{NIID}(0,1)$$

oppure, sapendo dall'equazione (1.2) che  $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ , allora

$$(1.4) \quad P_{t_i+\Delta t} = P_{t_i} \left[ 1 + \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon_{t_i} \right], \forall i = 0, 1, \dots, n - 1$$

dove

$$\varepsilon_{t_i} \sim \mathcal{NIID}(0,1)$$

e quindi si ricava

$$(1.5) \quad P_{t_i+\Delta t} - P_{t_i} = P_{t_i}\mu\Delta t + P_{t_i}\sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon_{t_i}, \forall i = 0, 1, \dots, n - 1 \text{ e } \varepsilon_{t_i} \sim \mathcal{NIID}(0,1).$$

Dalla (1.4) si intuisce che il prezzo futuro  $P_{t_i+\Delta t}$  è una variabile aleatoria che segue un modello random walk ed è quindi “frutto” del prezzo attuale  $P_{t_i}$ , non aleatorio, per un fattore di capitalizzazione invece aleatorio. Il valore del prezzo futuro dipende quindi unicamente dal fattore di capitalizzazione il quale a sua volta possiede una componente deterministica  $\mu$ , chiamata deriva (drift rate), che fa tendere il prezzo verso una determinata direzione, ed una componente stocastica  $\varepsilon_{t_i}$ , chiamato invece coefficiente di diffusione (variance rate).

Considerando il modello (1.4) nel continuo, posto che  $n \rightarrow \infty$  e di conseguenza  $\Delta t \rightarrow 0$ , si ottiene quindi, sotto opportune condizioni:

$$(1.6) \quad dP(t) = P(t)\mu dt + P(t)\sigma\sqrt{dt}\varepsilon(t), \text{ con } \varepsilon(t) \sim \mathcal{NIID}(0,1),$$

cioè

$$(1.7) \quad \frac{dP(t)}{P(t)} = \mu dt + \sigma\sqrt{dt}\varepsilon(t), \text{ con } \varepsilon(t) \sim \mathcal{NIID}(0,1).$$

Il processo  $P(t)$  soluzione della (1.6) prende il nome di *moto browniano geometrico* con deriva.

Al fine di modellizzare gli andamenti dei prezzi dei mercati, alcuni modelli considerano che sia il logaritmo naturale del prezzo (e quindi non più il prezzo) ad essere regolato da un processo gaussiano di variabili aleatorie indipendenti. Un modello che implica questa differenza è ricavabile in letteratura mediante l'applicazione del *lemma di Ito*. Tale modello sostiene che se il prezzo  $P$  è generato da un moto browniano geometrico con deriva (1.3), allora il suo logaritmo naturale  $\ln P$  è un *moto browniano standard* con deriva anch'esso. In questo caso, la dinamica di  $\ln P$  nell'intervallo  $[0, T]$  sarà determinato da

$$(1.8) \quad \ln P(t) \sim \mathcal{N} \left[ \ln P(0) + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t, \sigma\sqrt{t} \right].$$

Dalla (1.8) possiamo facilmente rilevare che il prezzo del titolo al tempo  $t$ ,  $P(t)$ , si distribuisce log-normalmente. Inoltre, notiamo che lo scarto quadratico medio di  $\ln P(t)$  è proporzionale al tempo, e più precisamente a  $\sqrt{t}$ . Grazie alle proprietà delle variabili log-

normali, risulta  $E[P(t)] = P(0)e^{\mu t}$  e quindi, in generale, presi due istanti successivi  $[t_i, t_i + \Delta t]$  si trova

$$(1.9) \quad \ln P_{t_i+\Delta t} \sim \mathcal{N}[\ln P_{t_i} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t, \sigma\sqrt{\Delta t}]$$

e quindi

$$(1.10) \quad E(P_{t_i+\Delta t}) = P_{t_i} \cdot e^{\mu\Delta t}$$

e risulta quindi evidente come il valore atteso del prezzo di un titolo ad un istante futuro ( $P_{t_i+\Delta t}$ ) dipenda solo dal prezzo all'istante precedente e non anche dalla serie storica dei prezzi precedenti. Ciò implica che il modello random walk è condizione sufficiente per l'efficienza del mercato in forma debole.

#### 1.4 LA TEORIA DEL PORTAFOGLIO E IL MODELLO C.A.P.M

Verso la metà del 1900, grazie all'opera di Markowitz, "*Portfolio selection: efficient diversification of investments*" del 1956, iniziò a svilupparsi la *teoria delle scelte di portafoglio*. Questa teoria ipotizza sinteticamente che gli unici fattori rilevanti nelle decisioni di un individuo per la scelta di un determinato portafoglio siano la media e la varianza. In particolare, il problema di selezione di portafoglio consiste sostanzialmente nello scegliere la quota di investimento da assegnare a ciascun titolo, fissando un determinato rendimento atteso per l'intero portafoglio, e minimizzandone il rischio (indicato come varianza) complessivo (oppure, viceversa, fissando il rischio e massimizzandone il rendimento). Assumendo che siano dati  $n$  investimenti, e considerando la *regione dei portafogli ammissibili*<sup>7</sup> nel piano  $(v, \pi)$ , la regione dei portafogli ammissibili è definita dalle equazioni

$$(1.11) \quad v = x'Vx, \quad \pi = x'r, \quad 1 = x'e$$

<sup>7</sup> Un portafoglio è ammissibile se soddisfa dei predeterminati vincoli di bilancio (come ad esempio un rendimento minimo o una varianza massima). La regione dei portafogli ammissibili è lo spazio che comprende tutto l'insieme dei portafogli che soddisfano i vincoli predeterminati.

dove con  $V$  si indica la matrice  $n \times n$  varianza-covarianza dei rendimenti degli investimenti, con  $r$  si indica il vettore dei rendimenti attesi degli  $n$  titoli e con  $\pi$  il rendimento atteso che l'investitore si propone di ottenere. Nel caso di rendimento atteso del portafoglio fissato, la frontiera della regione efficiente dei portafogli ammissibili si ricava risolvendo il problema di minimizzazione:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} & x'Vx \\ \text{s. t.} & \begin{cases} \pi = x'r \\ 1 = x'e \end{cases} \end{aligned}$$

Determinata la frontiera efficiente, la scelta dell'investitore viene fatta in base alla sua funzione di utilità,  $u(x)$ , che per ipotesi viene supposta derivabile almeno due volte, con  $u'(x) > 0$  (funzione monotona crescente) e  $u''(x) < 0$  (funzione concava).

La principale critica mossa al modello di Markowitz è legata al tipo di funzione di utilità scelta, che rende impossibile il confronto tra due individui con diverso grado di avversione al rischio. La sua teoria venne successivamente ripresa e ultimata da Sharpe come base di partenza per la formalizzazione del *Capital Asset Pricing Model* (C.A.P.M.). Si tratta di un modello che permette di mettere in relazione il rendimento atteso di una data attività finanziaria (che in quanto tale è rischiosa) con il tasso di rendimento corrente privo di rischio ed il *premio al rischio*<sup>8</sup>. Quella dell'esistenza di un titolo *risk-free* è una delle asserzioni fondamentali alla base del CAPM che, basandosi anche sull'ipotesi di aspettative omogenee da parte degli investitori, elimina l'aspetto soggettivo nella determinazione del portafoglio ottimo. In termini formali avremo:

$$(1.12) \quad E(r_i) = r_f + \beta_i[E(r_i) - r_f]$$

dove con  $r_i$  intendiamo il rendimento dell' $i$ -esimo titolo, con  $r_f$  il rendimento del titolo *risk free* (privo di rischio) e con  $\beta_i$  il *coefficiente beta*<sup>9</sup> dell' $i$ -esimo titolo.

<sup>8</sup> Il premio per il rischio è la differenza tra il valore atteso di una variabile casuale rischiosa e l'ammontare certo (detto certo equivalente) che un individuo sarebbe disposto ad accettare al suo posto.

<sup>9</sup> Il coefficiente beta indica la tendenza di un titolo a variare nella stessa direzione del mercato. Può assumere valori compresi tra -1 e +1, dove per  $-1 < \beta < 0$  si intende un titolo che reagisce in maniera meno che proporzionale rispetto all'andamento del mercato e con  $0 < \beta < +1$  si intende un titolo che si sposta al rialzo o al ribasso in misura più che proporzionale rispetto all'andamento del mercato.



## 1.5 CRITICHE VERSO LA TEORIA TRADIZIONALE

La teoria espressa finora è stata al centro di molte attenzioni e, pur essendo piuttosto nota e diffusa, è tuttora al centro di numerosi dibattiti. Vi sono diversi punti su cui la critica si concentra, che possono grossolanamente essere elencate in quattro gruppi:

- critiche provenienti dal mondo dell'analisi tecnica (avverso l'indipendenza delle variabili e l'assoluta impossibilità di prevedere l'andamento futuro dei prezzi);
- critiche provenienti dal mondo della finanza aziendale (per motivi analoghi a quelli sopracitati);
- critiche provenienti dalla finanza comportamentale (avverso la razionalità degli investitori).

A questi gruppi ne aggiungiamo anche un quinto che, per quanto concerne l'argomento di questa tesi, è forse il più inerente. Si tratta di critiche provenienti dal mondo probabilistico e che vanno a toccare una delle considerazioni alla base della teoria dei mercati efficienti, ovvero la considerazione che vorrebbe i rendimenti dei titoli azionari distribuiti come variabili indipendenti ed identicamente distribuite e, nello specifico, variabili distribuite come *random walk*. In particolare, nella EMH, si assume che la distribuzione di probabilità dei rendimenti medesimi sia rappresentata da una Normale.

Già nel 1964, Osburne osservò come la funzione di densità dei rendimenti dei titoli azionari non fosse esattamente Normale, sebbene approssimabile ad una Normale, in quanto notò che le code erano più spesse di quanto avrebbero dovuto. Successivamente, gli studi seguiti da Fama nel 1965 sui rendimenti giornalieri, evidenziarono che la loro distribuzione non era simmetrica come dovrebbe essere una distribuzione Normale, ma presentava una *skewness*<sup>10</sup> negativa ovvero, in generale, vi erano di solito più osservazioni nel lato sinistro della media della distribuzione rispetto al lato destro. Inoltre, il picco attorno alla media era più alto rispetto a quello figurato in una distribuzione Gaussiana (fenomeno chiamato *leptocurtosi*). Altri studiosi come Mandelbrot (1964), Sharpe (1970) e, in tempi più recenti, Turner e Weigel (1990), osservarono gli stessi comportamenti.

---

<sup>10</sup> Con il termine statistico *skewness* si vuole indicare l'asimmetria rispetto alla media di una distribuzione di una variabile aleatoria.

Sempre dal campo probabilistico, il secondo aspetto che ha insinuato dei dubbi sulla validità della teoria dell'efficienza dei mercati è il comportamento della volatilità (ad esempio misurata dallo scarto quadratico medio). Nella distribuzione normale la varianza dei rendimenti a  $t$  giorni dovrebbe essere pari a  $\sqrt{t}$  volte la varianza giornaliera, ovvero:

$$\sigma_t = \sigma_1\sqrt{t}$$

dove con  $\sigma_t$  si indica lo scarto quadratico medio a  $t$  giorni e con  $\sigma_1$  lo scarto quadratico medio ad un giorno. La rischiosità di un titolo a 5 giorni sarà quindi proporzionale al livello di rischiosità giornaliero ed alla radice quadrata del tempo. Questo vale, appunto, se e solo se i rendimenti si distribuiscono come una normale ma Peters, nel suo "*Fractal Market Analysis*" (1994), ha osservato che spesso lo scarto quadratico medio dei rendimenti dei titoli azionari non segue questa regola e non varia quindi secondo la radice quadrata del tempo a cui fa riferimento.

## 1.6 CONCLUSIONI

In questo capitolo abbiamo brevemente cercato di riassumere i vari passaggi che hanno portato alle recenti teorie finanziarie. Abbiamo anche visto come l'attuale ipotesi di efficienza dei mercati finanziari poggi essenzialmente su:

- razionalità degli investitori;
- andamento random walk dei rendimenti;
- normalità della distribuzione di probabilità dei rendimenti;
- efficienza dei mercati.

Abbiamo visto inoltre che l'EMH è una teoria ancora in discussione, con diversi punti critici che non ricevono il totale consenso degli studiosi. È possibile pensare che i pilastri su cui si basano le attuali teorie finanziarie siano probabilmente troppo "semplificanti" e distanti da quella che è effettivamente la complessa realtà riscontrabile nei mercati.

Negli ultimi anni alcuni studiosi hanno perciò cominciato a cercare di concepire dei modelli di comportamento dei mercati finanziari che siano in grado di considerare le critiche mosse contro l'EMH. Inizia a prendere vita, infatti, anche la *Fractal Market*

*Hypotesys* (FMH o Ipotesi dei Mercati Frattali), il cui fondamento venne introdotto per la prima volta da Mandelbrot e che venne poi ampliata da molti altri studiosi, come vedremo nel capitolo seguente.

## CAPITOLO II

### LA GEOMETRIA FRATTALE

#### 2.1 INTRODUZIONE: I FRATTALI

Lo sviluppo di questa tesi avverrà attorno al concetto di *frattale*, neologismo introdotto per la prima volta da Mandelbrot nel suo libro “*Les object Fractals: Forme, Hazards et Dimension*” del 1975. Il termine, che deriva dal latino *fractus* (rotto, frastagliato, irregolare), sta ad indicare un oggetto geometrico che si ripete nella sua struttura allo stesso modo su scale diverse e quindi, da qualunque scala lo si osservi, l’oggetto frattale rappresenta sempre gli stessi caratteri globali. Per comprendere meglio questo concetto, si provi a pensare alla struttura di un albero: ogni ramo è approssimativamente simile all’intero albero e a sua volta ogni rametto, parte del ramo, assomiglia sia al ramo che all’albero stesso. Questa proprietà è detta *auto-similarità*.

Se si guarda alla natura, è molto facile incorrere in esempi di oggetti con proprietà di auto-similarità. Abbiamo già accennato all’esempio dell’albero, ma anche le montagne, le foglie, il DNA, il cavolo, le conchiglie sono oggetti con caratteristiche proprie dei frattali. Il motivo per il quale solo da pochi anni si è riusciti a descrivere e teorizzare le proprietà degli oggetti frattali è, molto probabilmente, dovuto alla forte influenza che il pensiero filosofico e matematico degli antichi greci ha avuto sulla cultura occidentale. Pitagora ed i suoi seguaci furono i primi a ritenere che il modo di operare della natura potesse essere efficacemente espresso ed interpretato attraverso il linguaggio matematico.

Il caposaldo della loro scuola di pensiero era la visione del mondo reale come un tutto ordinato. Negli ambienti pitagorici le grandezze erano rappresentate da numeri e questi ultimi da sassolini. La scoperta di grandezze incommensurabili, come ad esempio  $\sqrt{2}$ , fu una dura prova per la filosofia pitagorica e si cominciò a diffondere l'uso di rappresentare le grandezze non più tramite calcoli, bensì con dei *segmenti*, che meglio si prestavano a “catturare” questi tipi di misure non intere o razionali. Si ribaltò quindi la filosofia greca, e del pensiero matematico, favorendo l'idea che la *geometria*, e non più il numero, fosse la vera governatrice del mondo. Molti problemi di natura algebrica venivano ora affrontati e risolti per via geometrica, tanto che spesso si parla di “algebra geometrica” proprio per sottolineare il forte legame che l'algebra e la geometria avevano in quell'epoca. Fu proprio in questi anni che il matematico Euclide raccolse gran parte dei teoremi geometrici conosciuti in una delle opere più importanti della geometria antica: gli “Elementi”. Euclide ridusse la natura a oggetti puri e simmetrici: il punto, la linea (una dimensione), il piano (due dimensioni) ed il solido (tre dimensioni). Questi hanno tutte forme pure e simmetriche, prive di “buchi”, di irregolarità. Sono oggetti perfetti e lisci, perché per i greci solo la perfezione poteva essere creata dalla natura. La realtà che ci circonda, però, non è così. Le montagne non sono coni, la terra non è una sfera. Le forme della natura sono spesso spigolose, frastagliate, asimmetriche.

Benoit Mandelbrot può essere considerato, per certi aspetti, l'Euclide della geometria frattale. Egli ha raccolto numerosi lavori ed osservazioni sui cosiddetti “mostri matematici”, ovvero oggetti non descrivibili tramite la geometria euclidea dando vita alla geometria frattale.

Gli oggetti frattali, come già accennato, sono caratterizzati dalla loro irregolarità che si preserva all'infinito, diversamente dagli oggetti euclidei. Una curva liscia (o tecnicamente derivabile), dopo successivi ingrandimenti attorno allo stesso punto appare sempre più approssimabile ad una retta. In sostanza, nella geometria euclidea, più da vicino è visto un oggetto, più semplice esso appare. Nella natura invece, più un oggetto è visto da vicino, più dettagli esso ci mostra. Per gli oggetti frattali vale la stessa proprietà. Essi non sono derivabili in alcun punto e, anche dopo infiniti ingrandimenti, la struttura che si osserva non è semplificata bensì mantiene intatte le sue proprietà.

Una definizione esaustiva e finale di frattale non è ancora stata concordata, ma possiamo ragionevolmente descriverlo tramite le seguenti proprietà (Falconer K., 1990).

- L'oggetto frattale è caratterizzato da una struttura che mantiene la stessa ricchezza di dettagli da qualunque scala di osservazione;
- Gli oggetti frattali sono caratterizzati da una struttura fortemente irregolare, sia localmente che globalmente, e quindi non sono analizzabili attraverso i tradizionali strumenti geometrici;
- Gli oggetti frattali possiedono spesso qualche forma di auto-similarità;
- Gli oggetti frattali possiedono di solito una dimensione frattale, strettamente maggiore della loro *dimensione topologica*<sup>11</sup>;
- In molti casi un oggetto frattale è definito dall'iterazione di semplici regole.

Da quanto esposto, gli oggetti frattali si presentano come forme con infiniti dettagli: sono quindi figure complesse, che riportano tale complessità a tutte le scale di riproduzione.

## 2.2 LE DIMENSIONI FRATTALI

Una delle particolarità dei frattali è la loro dimensione. Essi possiedono una dimensione propria e tale dimensione è, di regola, non intera, a differenza degli oggetti euclidei. Per chiarire questa differenza, si pensi ad un foglio di carta. Questo è un oggetto tri-dimensionale, ma se lo supponiamo con spessore nullo, come un teorico piano euclideo, questo è da considerarsi bi-dimensionale. Ora, se lo si accartocchia a forma di pallina, il foglio di carta non potrà più considerarsi bi-dimensionale, ma non sarà nemmeno tri-dimensionale in quanto ci saranno dei vuoti. La sua dimensione sarà inferiore a 3 ma maggiore di 2. Tanto più si riuscirà a comprimerlo, tanto più la dimensione sarà vicina a 3, ovvero sarà un solido. Questa pallina ha quindi una dimensione frattale in quanto compresa fra 2 e 3.

---

<sup>11</sup> La dimensione topologica, o dimensione di Lebesgue, di uno spazio euclideo  $R^n$  è  $n$ . Per ulteriori dettagli sulla dimensione topologica e sulla dimensione frattale, si veda [Mandelbrot, 1982], [Falconer, 1990], [Gerard, 1990], [Guerraggio, 1990].

La dimensione è pertanto il grado con cui un frattale “riempie” lo spazio ed è di regola non intera. Per determinare la dimensione di un frattale non vi è un’unica definizione. Le più importanti sono:

- 1) la dimensione di Hausdorff-Besicovitch;
- 2) la dimensione di Minkovski-Bouligand.

Di seguito si riportano brevi introduzioni e relative definizioni. Per approfondimenti ed ulteriori dettagli si vedano [Mandelbrot, 1982], [Falconer, 1990], [Gerald, 1990], [Yamaguti, Hata, Kigami, 1993], [Guerraggio, Salsa, 1997], [Medio, Lines, 2001].

### **1) Definizione: dimensione di Hausdorff-Besicovitch.**

Prima di arrivare alla definizione della dimensione di Hausdorff-Besicovitch, è necessario fare qualche premessa.

Per definire la dimensione di Hausdorff di  $X \in \mathbb{R}^n$ , dobbiamo considerare il numero  $N(r)$  delle *palle*<sup>12</sup> di raggio massimo  $r$  necessarie a coprire completamente  $X$ . Chiaramente, diminuendo  $r$ ,  $N(r)$  aumenta. Molto grossolanamente, se  $N(r)$  cresce allo stesso modo di  $1/r^d$  quando  $r$  viene ridotto fino a zero, allora diciamo che  $X$  ha dimensione  $d$ .

La dimensione di Hausdorff raffina il concetto di dimensione topologica e la mette in relazione con altre proprietà dello spazio, come area o volume.

Supponiamo che  $(X, d)$  sia uno *spazio metrico*<sup>13</sup>. Come suddetto, siamo interessati a contare il numero di palle di un certo raggio necessarie a coprire un insieme dato. L'intuizione di Hausdorff è stata di affrontare il problema indirettamente, prendendo anche spunto dalla teoria della misura sviluppata precedentemente da *Lebesgue*.

---

<sup>12</sup> In matematica una palla, o bolla o intorno circolare, è un sinonimo di ipersfera.

<sup>13</sup> Per definizione e approfondimenti si veda [Papadopoulos, 2004].

**Definizione: misura di Lebesgue per un generico insieme A**

Sia  $A \subset \mathbb{R}^n$  un generico insieme e sia  $\{A_i\}$  una generica collezione numerabile finita o infinita di parallelepipedi n-dimensionali copertura<sup>14</sup> di A. Si definisce misura di Lebesgue di A il numero reale non negativo

$$(2.1) \quad \mathcal{L}^n(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{m \leq \infty} \text{vol}^n(A_i) \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{m \leq \infty} A_i \right\},$$

Dove l'estremo inferiore è preso su tutte le possibili coperture di A con collezioni di parallelepipedi n-dimensionali. ■

Prendendo spunto da questa definizione, Hausdorff teorizzò un concetto di misura basato sempre sulla definizione di copertura di un insieme  $F \subset \mathbb{R}^n$  (indicheremo ora il generico insieme come F, dato che potrà essere un insieme frattale), ma calcolato mediante una collezione di insiemi  $\{U_i\}$  dei quali non si considererà più il volume n-dimensionale bensì il loro diametro così definito:

**Definizione: diametro di un insieme U.**

Sia  $U \subset \mathbb{R}^n$  un generico insieme. Si definisce diametro di U

$$(2.2) \quad \text{diam}(U) = \sup \left\{ \|\underline{x} - \underline{y}\|, \forall \underline{x}, \underline{y} \in U \right\},$$

dove  $\|\underline{x} - \underline{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$  è la distanza euclidea tra i due punti  $\underline{x}$  e  $\underline{y}$ . ■

Si può a questo punto introdurre la definizione di misura di Hausdorff.

---

<sup>14</sup> Una collezione numerabile finita o infinita  $\{A_i\}$  è una copertura di A se  $A \subset \bigcup_{i=1}^{m \leq \infty} A_i$ . Si sottolinea che esistono infinite possibili coperture di A.



**Definizione: misura s-dimensionale di Hausdorff di scala  $\delta$  di un insieme  $F$ .**

Sia  $F \subset \mathbb{R}^n$  un generico insieme e sia  $\{U_i\}$  una qualsiasi collezione numerabile finita o infinita copertura  $F$  tale per cui  $0 < \text{diam}(U_i) \leq \delta \quad \forall i=1,2,\dots, m \leq \infty$ . Sia inoltre  $s \geq 0$ , definiamo

$$(2.3) \quad \mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \{ \sum_{i=1}^{m \leq \infty} [\text{diam}(U_i)]^s \mid F \subset \cup_{i=1}^{m \leq \infty} U_i \text{ e } 0 < \text{diam}(U_i) \leq \delta \}$$

misura s-dimensionale di Hausdorff di scala  $\delta$ . ■

Questa misura prende in considerazione tutte le possibili coperture di  $F$  mediante insiemi di diametro al massimo pari a  $\delta$ , ed estrae quindi l'estremo inferiore dei valori della somma della s-esima potenza di ciascun diametro di ogni collezione.

Detto ciò, definiamo la misura s-dimensionale di Hausdorff per  $\delta$  che tende a 0. Le possibili coperture di  $F$  si riducono e quindi l'estremo inferiore della formula precedente cresce fino a raggiungere un limite.

**Definizione: misura s-dimensionale di Hausdorff.**

Data l'equazione su scritta, definiamo misura s-dimensionale di Hausdorff

$$(2.4) \quad \mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F). \blacksquare$$

In [Falconer, 1990] si è dimostrato che:

- $\mathcal{H}^s(F)$  è una misura<sup>15</sup>, in quanto soddisfa tutte le proprietà della definizione di una misura;
- $\mathcal{H}^s(F)$  è definita per qualsiasi tipo di insieme  $F$ .

<sup>15</sup> Per approfondimenti si veda [Cohn, 1980].

Dalle definizioni precedenti si può intuire come, al diminuire di  $\delta$ , il numero  $m$  degli insiemi che fanno parte della collezione  $\{U_i\}$  che copre  $F$  aumenti fino a tendere ad infinito quando  $\delta \rightarrow 0$ .

La misura  $\mathcal{H}^s(F)$  è quindi una somma di infiniti diametri tutti di ampiezza nulla e, perciò, una forma indeterminata del tipo  $0 \cdot \infty$ . Il valore della misura potrà essere zero od infinito. Per semplificare questa valutazione entra in gioco l'esponente  $s$ . Si possono quindi presentare due scenari:

1. se  $s \rightarrow 0 \Rightarrow \text{diam}(U_i) \rightarrow l$  e; di conseguenza,  $\mathcal{H}^s(F) \rightarrow \infty$ ;
2. se  $s \rightarrow \infty \Rightarrow \text{diam}(U_i) \rightarrow 0$  e quindi  $\mathcal{H}^s(F) \rightarrow 0$ .

Per questi motivi, vi sarà un valore  $s^*$  per il quale la misura di Hausdorff  $s$ -dimensionale salterà da infinito a zero. Tale valore prende il nome di dimensione di Hausdorff-Besicovitch di seguito definita:

**Definizione: dimensione di Hausdorff-Besicovitch**

Dato un insieme  $F \subset \mathbb{R}^n$ , definiamo dimensione di Hausdorff-Besicovitch il numero reale non negativo

$$(2.5) \quad s^* = \dim_H(F) = \inf\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = \infty\},$$

così che si ha

$$(2.6) \quad \mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{se } s < s^* = \dim_H(F) \\ 0 & \text{se } s > s^* = \dim_H(F) \end{cases}.$$

**2) Definizione: dimensione di Minkowski-Bouligand**

La dimensione di Minkowski-Bouligand è nota anche come dimensione *box-counting* ed è molto utilizzata grazie alla sua relativa facilità di applicazione empirica. L'idea è infatti molto semplice. Si inserisce immaginariamente l'oggetto di cui si vuole calcolare la dimensione in un box (se l'oggetto occupa il piano lo si inserisce in un rettangolo, se è tridimensionale in un parallelepipedo e così via). Successivamente si

costruisce una griglia con dimensione della maglia pari a  $\delta$  e si contano il numero di celle necessarie a coprire l'oggetto, ovvero  $N_\delta$ . Riducendo progressivamente la dimensione di  $\delta$  e rapportandolo al relativo  $N_\delta$  andremo a calcolare la dimensione di Minkowski-Bouligand così definita:

**Definizione: dimensione di Minkowski-Bouligand**

Sia  $F \subset \mathbb{R}^n$  un generico insieme e sia  $N_\delta(F)$  il numero minimo di cubi  $n$ -dimensionali di lato  $\delta$  che coprono  $F$ , definiamo dimensione di Minkowski-Bouligand di  $F$

$$(2.7) \quad \dim_M(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{\ln(\frac{1}{\delta})} \blacksquare$$

Andando a paragonare le dimensioni ottenute con il metodo di Hausdorff e con il metodo di Minkowski, si dimostra [Falkoner K., 1990] che per molti frattali i risultati sono uguali, ma più in generale si ha che

$$(2.8) \quad \dim_H(F) \leq \dim_M(F) .$$

### 2.3 TIPOLOGIE DI FRATTALI

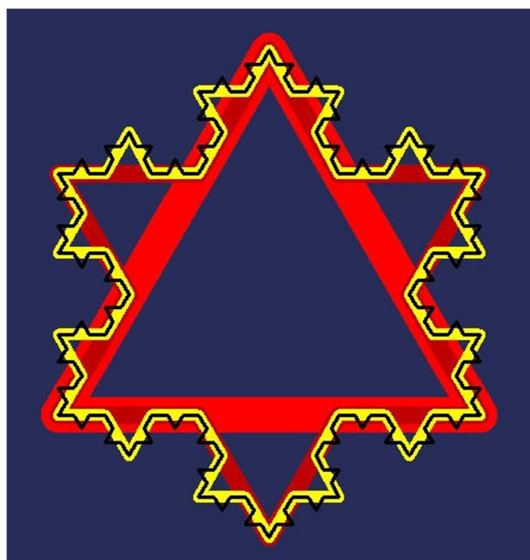
È possibile individuare diverse classificazioni degli oggetti frattali a seconda di come questi vengono costruiti. Si possono distinguere frattali IFS (*Iterated Function System*) da frattali LS (*Lindenmayer System*). Per approfondimenti su quanto segue, si veda [Mandelbrot, 1975].

Un frattale IFS consiste generalmente in una collezione di  $k$  trasformazioni affini<sup>16</sup> che, applicate iterativamente ad un'immagine di partenza, producono sempre la stessa figura, qualunque sia l'insieme di punti di partenza. Il processo iterativo tende

<sup>16</sup> In geometria, una affinità è una applicazione biettiva che fa corrispondere al punto P di coordinate (x,y) il punto P' di coordinate (x',y') secondo le equazioni  $x'=ax+by+e$ ;  $y'=cx+dy+f$ .

dunque ad un *attrattore*<sup>17</sup> ben definito (come ad esempio la foglia di una felce). Le trasformazioni IFS prevedono tipicamente composizioni di rotazioni, traslazioni (affinità cioè che conservano le distanze, la forma e la grandezza delle figure), ed *omotetie*<sup>18</sup>. È importante evidenziare, soprattutto ai fini di una trasposizione della teoria dei frattali ai mercati finanziari, che in questa tipologia di frattali, anche cambiando le condizioni iniziali, il risultato finale non cambia. Il frattale ottenuto con il metodo IFS, infatti, non dipende dalle condizioni di partenza ma solo dalle trasformazioni geometriche che vengono di volta in volta applicate.

I frattali Lindenmayer-System furono generati per la prima volta dal biologo Lindenmayer nel tentativo di riprodurre in modo virtuale la crescita di svariati tipi di organismi. Alla base degli L-Systems vi è il concetto di riscrittura: oggetti complessi vengono definiti mediante la successiva sostituzione di un semplice oggetto iniziale, usando un insieme di regole di riscrittura (anche dette produzioni). I frattali LS possono essere visti come una generalizzazione della famiglia precedente, in quanto sono suddivisibili in un numero finito di frattali IFS (il *fiocco di Koch*<sup>19</sup> può, ad esempio, essere suddiviso in 3 copie del *merletto di Koch*<sup>20</sup>, come si può notare dalla figura sottostante).



<sup>17</sup> Un attrattore è un insieme verso il quale evolve un sistema dinamico dopo un tempo sufficientemente lungo. Per approfondimenti [Ruelle, 1981].

<sup>18</sup> Particolari trasformazioni geometriche del piano o dello spazio che dilatano o contraggono oggetti mantenendo invariati gli angoli (ossia la forma).  
9-10. Si veda paragrafo successivo.

Un'altra tipologia di classificazione distingue i frattali per le loro caratteristiche proprie. Si possono infatti suddividere in:

- frattali deterministici, i quali fanno riferimento all'impiego di regole puramente deterministiche;
- frattali stocastici, i quali sono autosimilari in senso statistico;
- frattali autoaffini;
- frattali multi-frattali.

## 2.4 ESEMPI DI FRATTALI

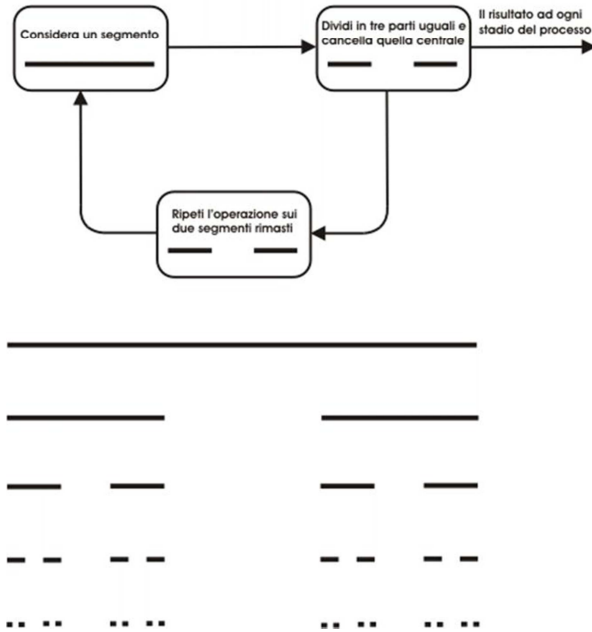
Al fine di esemplificare i concetti visti nelle precedenti sezioni, si presentano ora alcuni esempi di insiemi frattali. Si tratta di frattali deterministici, definiti tramite l'iterazione di semplici regole. Gli insiemi che vedremo sono fra i primi ad essere stati sviluppati nella letteratura matematica e sono quindi anche fra i più analizzati e studiati. Essendo a tutti gli effetti dei frattali, essi presentano ognuna delle proprietà viste precedentemente.

### Insieme triadico di Cantor

Partiamo dalla descrizione di quello che forse è il più classico fra tutti i frattali presentati in letteratura. L'insieme di Cantor, introdotto per la prima volta nel 1877 dal matematico tedesco George Cantor, è un sottoinsieme dell'intervallo unidimensionale  $[0,1]$  dei numeri reali. Questo insieme è definito in modo ricorsivo, partendo dalla retta di lunghezza unitaria  $C_0=[0,1]$ , dividendola in tre parti uguali e rimuovendo il segmento centrale aperto  $(1/3, 2/3)$  dall'intervallo  $[0,1]$ . Nel passaggio successivo avremo quindi due intervalli,  $[0,1/3]$  e  $[2/3,1]$ , dove  $C_1=[0,1/3] \cup [2/3, 1]$ , e divideremo entrambi questi due intervalli in tre parti uguali, rimuovendo ancora i due segmenti centrali, così che  $C_2=[0,1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$ . Ripetendo questi passaggi all'infinito troviamo

l'insieme triadico di Cantor, che consiste quindi di tutti i punti dell'intervallo di partenza  $[0, 1]$  che non vengono mai rimossi da questo procedimento ricorsivo. Viene chiamato con termini suggestivi come “*polvere di Cantor*”.

### Insieme di Cantor (1877)



Al limite si otterrà un insieme così definito:

$$(2.9) \quad C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k = \lim_{k \rightarrow \infty} C_k.$$

È stato dimostrato che calcolando la dimensione di questo frattale tramite la misura di Lebesgue si ottiene 0, risultando evidente che la lunghezza non può considerarsi una buona misura per questo insieme. Provando ad applicare la misura di Hausdorff si ottengono *risultati*<sup>21</sup> interessanti in quanto si riesce a trovare che, essendo  $C \subset C_k$  e dato che il generico insieme  $C_k$  al  $k$ -esimo passo intermedio può essere coperto da una collezione  $\{U_i\}$  di  $2^k$  insiemi con diametro pari a  $\text{diam}(U_i) = 3^{-k} \forall i = 1, 2, \dots, 2^k$ :

$$(2.10) \quad \mathcal{H}_{\delta \leq 3^{-k}}^s(C) =$$

<sup>21</sup> Riportiamo per comodità di lettura i risultati tratti da [Falconer, 1990] e [Gerald, 1990].

$$\inf \left\{ \sum_{l=1}^{m \leq \infty} [\text{diam}(U_l)]^s \mid F \subset \bigcup_{l=1}^{m \leq \infty} U_l \text{ e } 0 < \text{diam}(U_l) \leq \delta \right\} \leq \sum_{i=1}^{2^k} (3^{-k})^s =$$

$$= 2^k \cdot 3^{-ks} = \left(\frac{2}{3^s}\right)^k$$

e quindi, preso il limite per  $k$  che va ad infinito, equivalente al limite infinitesimo per il diametro  $\delta$ , si ottiene:

$$(2.11) \quad \mathcal{H}^s(C) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(C) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3^s}\right)^k,$$

e quindi

$$(2.12) \quad \mathcal{H}^s(C) = \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3^s}\right)^k = 0 \text{ se } \left(\frac{2}{3^s}\right) < 1 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3^s}\right)^k = 1 \text{ se } \left(\frac{2}{3^s}\right) = 1 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3^s}\right)^k = \infty \text{ se } \left(\frac{2}{3^s}\right) > 1 \end{cases}$$

e, risolvendo infine per  $s$  l'equazione in cui  $\mathcal{H}^s(C)$  passa da infinito a zero troviamo

$$s^* = \dim_H(C) = \dim_B(C) = \frac{\ln 2}{\ln 3} \cong 0,630929.$$

La dimensione frattale dell'insieme triadico di Cantor è un numero non intero compreso nell'intervallo  $[0,1]$ .

### La curva di Von Koch

La curva di Koch è una delle prime curve di cui si conosca la descrizione. È stata oggetto di interesse anche per Mandelbrot che, nel suo libro *"How long is the coast of Britain"*, la utilizzò come modello semplificato di una costa. Egli cercò di focalizzare le sue attenzioni sulla risposta, non scontata, di, appunto, quanto fosse lunga la costa della Bretagna. La questione merita una certa riflessione in quanto, come citato nel libro, la lunghezza di una costa dipende essenzialmente dall'unità di misura utilizzata. Si pensi infatti ad uomo che, camminando lungo una costa, cerchi di misurarne la lunghezza conteggiando i suoi passi. Rimpiazzando l'uomo con un bambino, poi con un gatto, una

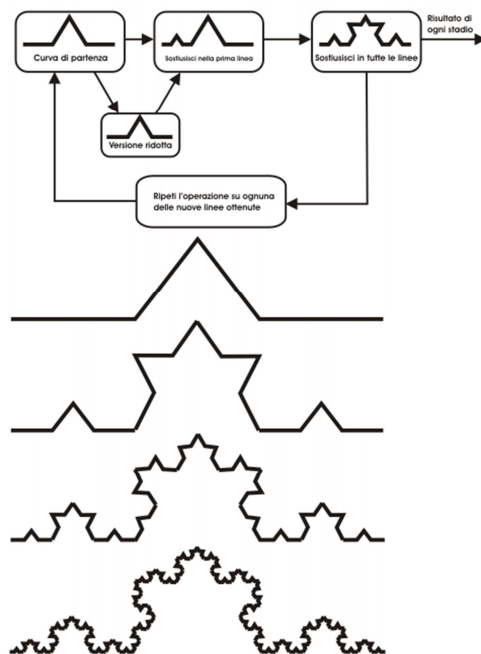
mosca e così via, si avranno passi (quindi unità di misura) sempre più piccoli e lunghezze sempre più precise ma allo stesso tempo, inevitabilmente più lunghe.

E come una costa è la morfologia della curva di van Kock, un frattale costruito a partire da un segmento unidimensionale ma che successivamente si sviluppa nel piano. La generazione di questa curva avviene tramite l'esecuzione di una procedura ricorsiva. Il suo algoritmo è molto semplice e consiste nella ripetizione del seguente ciclo:

1. si divide il segmento unitario  $[0,1]$  in tre parti uguali;
2. si cancella la parte centrale e la si sostituisce con due segmenti di uguale lunghezza in modo da formare il vertice di un triangolo equilatero;
3. si ripete il punto 1) per ognuno degli attuali segmenti.

Partendo da un segmento, se ne ottengono quindi 4 della misura di  $1/3$  nel primo ciclo.

#### Curva a "fiocco di neve" di Van Koch (1904)



Ripetendo la procedura all'infinito, si otterrà un curva continua così frastagliata da non ammettere derivata in alcun punto. Inoltre, ingrandendo un qualunque dettaglio del frattale si ottiene ancora lo stesso frattale: in questo consiste l'autosomiglianza dei frattali a



qualunque livello di scala. Calcolando la sua lunghezza invece, si trova che essa è infinita ed aumenta, nel rapporto, di  $4/3$  ad ogni tappa della sua costruzione. Nel dettaglio si trova:

$$(2.13) \quad \mathcal{L}(K_k) = \left(\frac{4}{3}\right)^k \Rightarrow \mathcal{L}(K) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^k = \infty,$$

mentre l'area occupata da questa curva è pari a zero.

Per caratterizzare questa figura è necessario utilizzare la misura di Hausdorff con la quale si arriva ad ottenere:

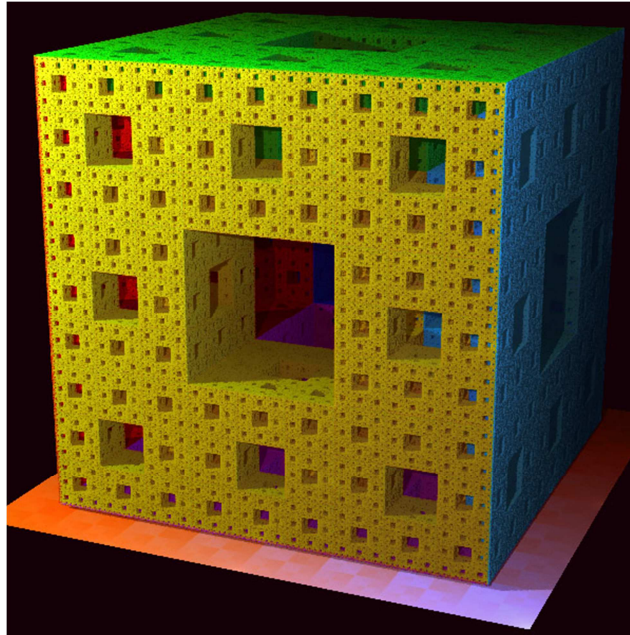
$$(2.14) \quad s^* = \dim_H(P) = \dim_B(P) = \frac{\ln 4}{\ln 3} \cong 1,261859.$$

### **Spugna di Menger**

La spugna di Menger, descritta per la prima volta dal matematico Karl Menger nel 1926, è un particolare frattale tridimensionale. Anche per questo frattale la costruzione è semplice e viene ottenuta, partendo da un cubo, tramite una procedura ricorsiva di seguito descritta:

1. si divide il cubo di partenza in 27 cubi di eguale dimensione;
2. si rimuovono i 6 cubi centrali di ogni faccia ed il cubo centrale della figura;
3. su ogni nuovo cubo, si ripete il ciclo partendo dal punto 1.

La spugna di Menger è lo spazio che si ottiene come limite da queste operazioni. Di ogni cubo, si dovrà rimuovere solo la parte interna e la parte interna ad ogni "faccia", in tal modo ogni iterazione è un insieme chiuso dello spazio euclideo  $\mathbb{R}^3$  e la risultante dell'intersezione di tutti questi insiemi è, appunto, la spugna di Menger.



Da un punto di vista formale, questa figura può essere definita come

$$M = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n$$

dove  $M_0$  è il cubo unitario e

(2.15)

$$M_{n+1} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} \exists i, j, k \in \{0, 1, 2\}: (3x - i, 3y - j, 3z - k) \in M_n \\ \text{e non più di una fra } i, j, k \text{ è uguale a } 1 \end{array} \right\}$$

Questo particolare frattale ha dimensione topologica pari a 1 e dimensione di Hausdorff pari a  $\log 20 / \log 3 = 2,726833$ .

## CAPITOLO III

### L'APPLICAZIONE DEI FRATTALI NEI MERCATI FINANZIARI

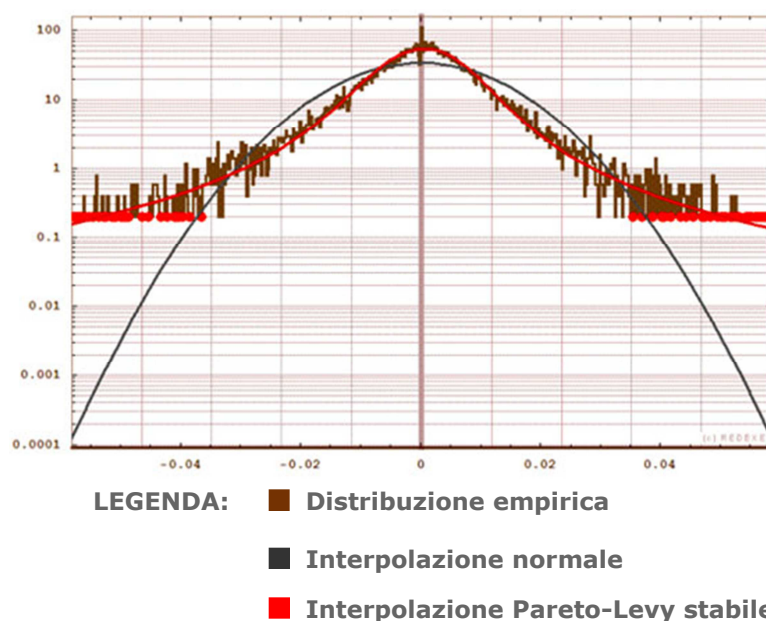
#### 1.5 IL PUNTO DI INCONTRO FRA FRATTALI E MERCATI FINANZIARI

Dopo aver introdotto in via generica i Frattali, possiamo tentare di individuare un punto di incontro tra i Frattali ed i mercati finanziari. Osservando i vari aspetti che compongono i mercati finanziari si possono riconoscere alcuni elementi che hanno caratteristiche proprie dei Frattali, come, ad esempio, il tempo. La struttura frattale dei mercati emerge infatti non appena si valuta la struttura degli stessi su diverse scale temporali. Nel fare ciò, Mandelbrot misurò e comparò le serie storiche di diversi titoli azionari assegnando a ciascuna serie una dimensione frattale e da questa osservazione trovò un legame tra la geometria frattale ed i mercati finanziari. Si evidenziarono infatti variazioni dei prezzi maggiori rispetto a quelle previste dal modello tradizionale e si potè osservare come nella realtà le serie storiche dei prezzi dei titoli nel mercato finanziario presentino code più spesse rispetto a quelle di una Normale ed un tasso di crescita della varianza differente rispetto alle previsioni della  $T_{1/2}$  Rule. Inoltre Mandelbrot riuscì a verificare che sussisteva una qualche forma di dipendenza a medio-lungo termine rispetto agli eventi accaduti, che stavano a significare, secondo lo studioso, che i mercati

conservavano memoria di quanto era accaduto precedentemente, esattamente al contrario di quanto supposto dalle teorie tradizionali.

La geometria frattale riusciva a descrivere in maniera più realistica le oscillazioni dei prezzi dei mercati finanziari, grazie proprio alla capacità di riprodurre a differenti scale temporali l'insieme di informazioni di partenza facendo sì che alcune sue parti si ripropongano in maniera meno probabile ma più veloce rispetto ad altre. In particolare si parla in questo caso di *multifrattali*, che grazie alla proprietà della *auto-affinità*<sup>22</sup>, possono descrivere il modo in cui le variazioni dei prezzi si accumulino in alcuni periodi temporali e si disperdano in altri.

Partendo dalla discrepanza osservata tra le distribuzioni di probabilità ottenute empiricamente e quelle dettate dal modello classico basato sulla Normale (come rappresentato dall'immagine sotto riportata), molti studiosi [FAMA, 1963], [MANDELBROT, 1960], [MANDELBROT, 1963], [PETERS, 1991], [CANESTRELLI, NARDELLI, 1991], [CORAZZA, MALLIARIS, NARDELLI, 1993], [CORAZZA, NARDELLI, 1993], [CORAZZA, 1994], hanno dimostrato su basi statistiche l'inappropriatezza della distribuzione Normale, riscontrando altresì la presenza di una memoria non markoviana in molte serie temporali dei mercati finanziari e altre difformità dal modello classico<sup>23</sup>.



<sup>22</sup> La proprietà della auto-affinità indica la presenza di una qualche somiglianza fra la “parte” ed il “tutto”, diversamente dalla proprietà della auto-similarità che prevede la possibilità di individuare lo stesso preciso schema di partenza.

<sup>23</sup> Si veda anche capitolo 1.5.

### 3.2 IL MOTO BROWNIANO FRAZIONARIO

Nel paragrafo precedente si è sottolineata la difficoltà di modellizzare l'andamento dei prezzi dei titoli azionari tramite l'ipotesi *random walk*, dato che spesso i risultati empirici hanno dimostrato la non indipendenza dei valori delle serie storiche. In conseguenza a ciò, nemmeno il *moto browniano geometrico standard*, descritto nel capitolo 1 di questa tesi come soluzione della teoria *random walk*, può più essere considerato come modello per descrivere l'andamento dei prezzi. Si introduce quindi ora una generalizzazione del *moto browniano standard*, capace di considerare l'ipotesi ben più ampia della dipendenza fra i prezzi dei mercati finanziari.

**Definizione: moto browniano frazionario.**

Si definisce *moto browniano frazionario* un processo aleatorio  $X_h: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  tale che:

- con probabilità 1,  $X_h(0) = 0$  e  $X_h(t)$  è una funzione continua in  $t$ ;
- $\forall t \geq 0$  e  $\forall \Delta t > 0$  l'incremento  $X_h(t + \Delta t) - X_h(t)$  è normalmente distribuito con media 0 e varianza  $\Delta t^{2H}$ . ■

Il processo esiste quando  $0 < H < 1$  ed inoltre è stato dimostrato [FALCONER, 1990] che gli incrementi  $X(t + \Delta t) - X(t)$  sono stazionari e seguono quindi una distribuzione di probabilità indipendente dal tempo  $t$ . Quando il coefficiente  $H$  assume valore 0,5, si rientra nuovamente nel caso del *moto browniano standard*. È stato inoltre dimostrato, [FALCONER, 1990] che la funzione di autocovarianza

$$(3.1) \quad \gamma(k) = \\ = E\{[X(t + \Delta t) - X(t)] \cdot [X(t + k + \Delta t) - X(t + k)]\} = \frac{1}{2} [(\Delta t + k)^{2H} - \Delta t^{2H} - k^{2H}]$$

risulta essere diversa da zero nel caso in cui  $H \neq 0$ , ovvero sarà positiva se  $H > 0,5$  e negativa se  $H < 0,5$ , con le conseguenze già citate nel paragrafo precedente.

### 3.3 ESPONENTE DI HURST E ANALISI RESCALED RANGE

Nell'ipotesi dei mercati efficienti si utilizza come assunto che l'andamento dei prezzi dei mercati finanziari non abbiano delle tendenze, ovvero presentino un comportamento casuale, indipendente, senza quindi alcuna presenza di memoria a lungo termine. Alcuni studiosi nei loro lavori [MANDELROT, WALLIS, 1968], [PETERS, 1991] hanno però constatato, su basi statistiche, che nella realtà non è sempre così e che spesso i mercati finanziari seguono fasi alterne di espansione e di recessione, solitamente con cicli non periodici. Questi *trend* sono ben visibili andando ad analizzare le serie storiche dei prezzi dei titoli azionari e possono essere spiegati dalla presenza di una *memoria a lungo termine*.

La presenza di questo tipo di dipendenza nei prezzi dei titoli del mercato finanziario ha fondamentali implicazioni nello studio delle teorie di selezione dei portafogli, ed è pertanto importante “decifrarne” la presenza e quantificarne il possibile impatto. Per riuscire a fare ciò, si può utilizzare l'analisi *rescaled range*<sup>24</sup>. Questa analisi fu ideata da Harold Edwin Hurst, un idrologo britannico che per primo cercò uno strumento per identificare la presenza di un qualche fenomeno di persistenza. Osservando infatti le serie storiche rappresentanti le misurazioni del livello del fiume Nilo in differenti epoche temporali, poté appurare che l'andamento non era affatto casuale ma che, invece, ad ondate di piena particolarmente consistenti seguivano una serie di ondate di piena di altrettanta entità mentre ad ondate di piena lievi, seguivano ondate altrettanto lievi. Cercò quindi di ideare uno strumento che gli permettesse di individuare e quantificare i livelli di dipendenza di questi andamenti ciclici. Per standardizzare la misura, Hurst decise di creare un indice adimensionale dividendo il range per la deviazione standard delle osservazioni (da ciò, il nome analisi rescaled range).

In sintesi, data una serie storica  $X$  con  $t$  osservazioni, otteniamo la deviazione cumulata delle osservazioni dalla propria media nell'arco temporale  $n$ :

$$(3.2) X_{t,n} = \sum_{u=1}^t (e_u - M_n)$$

---

<sup>24</sup> O anche più brevemente analisi R/S o statistica R/S.

con

$e_u$  osservazione relativa all'anno  $u$ -esimo ( $1 < u < t$ );

$M_n$  media dei valori  $e_u$  relativa a  $n$  periodi ( $1 < n < t$ );

$X_{t,n}$  deviazione cumulata delle osservazioni relativa a  $n$  periodi.

Si calcola successivamente il range di questa cumulata come differenza fra il valore massimo e il valore minimo che essa assume:

$$(3.3) \quad R_n = \text{Max}(X_{t,n}) - \text{Min}(X_{t,n}).$$

A questo punto Hurst divide  $R_n$  per la deviazione standard,  $S$ , in modo da standardizzare la misura, ottenendo:

$$(3.4) \quad \frac{R}{S_n} = \frac{\max_{1 \leq n \leq t} \sum_{u=1}^n (e_u - M_n) - \min_{1 \leq n \leq t} \sum_{u=1}^n (e_u - M_n)}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{u=1}^n (e_u - M_n)^2}}.$$

Il risultato ottenuto da Hurst, nel suo specifico problema, fu:

$$(3.5) \quad \frac{R}{s} = \left(\frac{N}{2}\right)^H$$

dove:

$H$  è l'esponente di Hurst;

$N$  è il numero di osservazioni;

$S$  è la deviazione standard con:

$$S = \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - m_N)^2 \right)^{1/2}$$

Mandelbrot riformulò questo risultato in modo da ottenere: (3.6)  $\frac{R}{S} = aN^H$

con

$\frac{R}{S}$  rescaled range;

$a \in \mathbb{R}$  costante;

N numero di osservazioni;

H coefficiente di Hurst.

Si è dimostrato, [MANDELBROT, 1972], che il coefficiente di Hurst può assumere valori compresi tra 0 ed 1. Solo nel particolare caso di  $H=0,5$  siamo in totale assenza di dipendenza e la serie segue quindi una distribuzione *random walk*. In questo specifico caso il passato non ha nessuna influenza sul futuro.

Quando invece i valori di H risultano essere diversi da 0,5, le osservazioni non sono indipendenti fra di loro e non è verificata quindi l'assunzione di indipendenza dei dati, necessaria per l'utilizzo dell'ipotesi del mercato efficiente.

Nello specifico, se  $H < 0,5$  si è soliti dire che le serie storiche sono *antipersistenti* (o *mean-reverting*) in quanto si sottolinea una correlazione negativa tra gli eventi: è probabile quindi una inversione di tendenza rispetto al periodo osservato in precedenza (se vi era un trend ribassista, avremo probabilmente un trend rialzista nel periodo successivo). Viceversa, quando  $H > 0,5$  siamo in presenza di *persistenza* (o *trend-reinforcing*), ovvero vi è l'esistenza di una qualche correlazione positiva nella serie dei dati analizzati. Se la serie ha dimostrato una tendenza positiva (o negativa) nell'ultimo periodo temporale, si presuppone che essa mantenga la stessa direzione positiva (o negativa) anche nel periodo seguente.



### 3.3 LE FUNZIONI DI PARETO-LÉVY STABILI E LE LORO PROPRIETÀ FRATTALI

Questo scostamento tra teoria e realtà hanno spinto Mandelbrot, e successivamente molti altri studiosi, a cercare una funzione di densità che meglio si adattasse ai mercati finanziari, in modo da poter ridurre al massimo queste discrepanze. Egli propose una distribuzione di tipo Pareto-Lévy stabile, della quale cercò di evidenziarne la natura frattale. Questa tipologia di distribuzione è particolarmente adatta per descrivere gli incrementi logaritmici dei prezzi grazie alle code spesse, curtosi e asimmetria di diverso grado in funzione di quattro parametri variabili. Inoltre, l'utilizzo di questa distribuzione non rifiuta totalmente il modello classico in quanto la distribuzione Normale rappresenta un caso particolare di distribuzione Pareto-Lévy stabile. In altre parole, queste distribuzioni riescono a *generalizzare* la teoria esistente.

La proprietà fondamentale delle distribuzioni Pareto-Lévy stabili<sup>25</sup> è, come dice il nome stesso, la stabilità. Il concetto di stabilità è strettamente collegato a quello della invarianza sotto l'operazione di addizione: la distribuzione della somma di variabili Pareto-Lévy stabili IID è anch'essa una distribuzione Pareto-Lévy stabile (caratteristica che, come vedremo meglio in seguito, vale anche per la distribuzione Normale). Sfruttando questa proprietà nei mercati finanziari, si potrebbe considerare la variazione del prezzo di una azione, valutata in un qualsiasi arco temporale, come la sommatoria delle singole variazioni nell'arco dell'intervallo considerato. Nel caso in cui le transazioni considerate siano distribuite uniformemente nell'arco di tempo preso in esame e le variazioni tra le transazioni medesime possano essere considerate come variabili IID e Pareto-Lévy stabili, allora le variazioni dei prezzi giornalieri, settimanali, mensili, ecc seguiranno una distribuzione Pareto-Lévy stabile, ovvero avranno la stessa distribuzione di probabilità, fatta eccezione della media e del fattore di scala.

Fatta questa presentazione, consideriamo la definizione della funzione di ripartizione Pareto-Lévy stabile.

---

<sup>25</sup> Anche chiamate semplicemente "Pareto stabili" o "L-stabili".

**Definizione: Funzione di ripartizione Pareto-Lévy stabile.**

Siano date le variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite  $X$  e  $X_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, n$ , aventi la stessa distribuzione di ripartizione  $F_X(x)$ . Tale funzione di ripartizione si definisce Pareto-Lévy stabile in senso ampio se  $\forall n$  esistono delle costanti  $a_n \in \mathbb{R}_0^+$  e  $b_n \in \mathbb{R}$  tali che si abbia

$$(3.7) \quad \sum_{i=1}^n X_i = a_n X + b_n$$

dove l'eguaglianza è considerata in distribuzione.

Se  $b_n = 0$ , allora la funzione di ripartizione si definisce Pareto-Lévy in senso stretto. ■

Come abbiamo visto nella definizione sopra citata, se  $b_n$  risulta essere nullo, allora la distribuzione è strettamente stabile. In questo specifico caso, essa gode di alcune proprietà frattali. Come abbiamo già espresso, infatti, i Frattali sono oggetti che mantengono la stessa forma qualunque sia la scala di riferimento ed in questo caso siamo in presenza di variabili le cui distribuzioni di probabilità rimangono inalterate a qualsiasi scala, poiché la forma della distribuzione della somma di  $n$  variabili casuali IID è la stessa distribuzione di partenza corretta per il fattore di scala  $a_n$ .

Le caratteristiche presentate dalla famiglia delle distribuzioni Pareto-Lévy stabile possono essere brevemente elencate come segue:

- caratteristiche simili in relazione ai cambiamenti di scala (*self-similarity*);
- *invarianza in somma*;
- è possibile identificare trend, cicli periodici e variazioni improvvise, ampie e discontinue;
- code più spesse in distribuzione;
- picco relativo alla media più elevato.

La funzione caratteristica delle distribuzioni Pareto-Lévy stabili è stata descritta nella seguente forma logaritmica da B.B.Mandelbrot:

$$(3.8) \ln \Phi(u) = i\delta u - |\gamma u|^\alpha [1 + i\beta \operatorname{sgn}(u)\omega(u,\alpha)]$$

dove

$i = \sqrt{-1}$ , unità immaginaria;

$\operatorname{sgn}(u) = \frac{|u|}{u}$ , è la funzione segno di  $u$ ;

$$\omega(u, \alpha) = \begin{cases} \tan\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) & \text{se } \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} \ln|u| & \text{se } \alpha = 1 \end{cases};$$

$$\alpha \in (0, 2];$$

$$\beta \in [-1, 1];$$

$$c = |\gamma|^\alpha \in (0, \infty);$$

$$\delta \in (-\infty, \infty).$$

I parametri  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $c$  e  $\delta$  sono i quattro parametri dal cui valore dipende l'esatta specificazione della funzione caratteristica, ed in particolare:

- $\alpha \in (0, 2]$  è l'*esponente caratteristico*: definisce lo spessore delle code e la consistenza del picco sul parametro  $\delta$ ;
- $\beta \in [-1, 1]$  è l'*indice di asimmetria*: quando  $\beta = 0$  la distribuzione è perfettamente simmetrica attorno al parametro  $\delta$ , quando  $0 < \beta < 1$  la distribuzione è asimmetrica verso destra mentre quando abbiamo  $-1 < \beta < 0$  la distribuzione è asimmetrica verso sinistra. In particolare se  $\beta = 1$  si ha perfetta asimmetria verso destra e quindi una sola coda a destra con la coda di sinistra che tende a zero più rapidamente della Normale se  $1 < \alpha < 2$  mentre scompare se  $\alpha < 1$ . Se  $\beta = -1$  si ha perfetta asimmetria verso sinistra (e valgono le stesse considerazioni del caso  $\beta = 1$ );

- $c=|\gamma|^\alpha \in (0, \infty)$  è il *parametro di scala*: nel caso  $\alpha = 2$  della Normale, si ha  $c = \alpha^2/2$ . In tutti gli altri casi indica il grado di dispersione attorno a  $\delta$ . Può essere utilizzato per “aggiustare”, ad esempio, la differenza fra i dati giornalieri e quelli settimanali;
- $\delta \in (-\infty, \infty)$  è il *parametro di localizzazione*: risulta essere la media quando  $1 < \alpha \leq 2$  mentre è la mediana quando  $\beta=0$  (distribuzione perfettamente simmetrica).

Applicando a questi parametri i valori  $\alpha = 2$ ,  $\beta=0$ ,  $c=1$  e  $\delta=1$ , otteniamo esattamente la funzione di distribuzione Normale. La distribuzione Normale, infatti, non è altro che un caso particolare della distribuzione Pareto-Lévy stabile e ciò concorre all'affermazione per la quale si considera l'ipotesi di efficienza dei mercati espressa nel Capitolo 1 come un caso specifico della più generale ipotesi frattale dei mercati finanziari. Essenzialmente, la teoria dei mercati efficienti considera il caso in cui  $\alpha = 2$ . La Teoria dei mercati frattali invece si può applicare anche con valori di  $\alpha$  che oscillano fra 1 e 2 (casi in cui abbiamo una media stabile).

### **3.5 RELAZIONI TRA OGGETTI FRATTALI, ESPONENTE DI HURST E PARETO STABILITÀ.**

Vi sono diverse affinità fra gli oggetti frattali e gli argomenti trattati finora. Mandelbrot stesso, nel suo lavoro [MANDELBROT, 1987], sostiene che nel caso di un mercato con un coefficiente di Hurst superiore a 0,5 (ovvero in presenza di persistenza), si possa affermare che le serie storiche dei prezzi seguano un moto browniano frazionario ed in quanto tale si tratterebbe di “oggetti frattali” dato che, come abbiamo già potuto sostenere nei paragrafi precedenti, esso è un processo stocastico distorto che implica la presenza di una dipendenza di lungo termine nelle osservazioni le quali non risultano quindi essere indipendenti (come invece richiesto dal più semplice moto browniano standard).

Inoltre, è stato dimostrato in [CORAZZA,1993], che vi è un preciso rapporto tra l'esponente di Hurst e l'esponente caratteristico di un processo stocastico Pareto-Lévy stabile  $\alpha$  espresso dal seguente teorema:

**Teorema:** Sia dato un processo stocastico Pareto-Lévy stabile  $X(t)$  con esponente caratteristico  $\alpha \in (1,2]$ . Allora si ha:

$$(3.9) \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{E\{R[X(t),T]/S[X(t),T]\}}{aT^{1/\alpha}} = 1. \blacksquare$$

Inoltre, dato che è stato dimostrato in [CORAZZA, 1993] e [PETERS, 1994] che

$$E \left[ \frac{R(T)}{S(T)} \right] \sim aT^H \text{ quando } T \rightarrow +\infty$$

allora si può ottenere che

$$(3.10) H = \frac{1}{\alpha}.$$

Un altro teorema, formalizzato in [FALCONER, 1990], pone in relazione l'esponente H di Hurst con la dimensione frattale del grafico di un moto browniano frazionario, come espresso di seguito:

**Teorema:** Sia dato un moto browniano frazionario unidimensionale di indice H, con  $0 < H < 1$ ,  $X_H(t)$  e sia dato il suo grafico

$$(3.11) G_X = \{(t, Y) \in \mathbb{R}^2 | Y = X(t) \wedge t \in [0, \infty)\},$$

allora con probabilità 1 si ha

$$(3.12) \dim_H(G_X) = \dim_B(G_X) = 2 - H. \blacksquare$$

Dato che  $0 < H < 1$ , allora si ha

$$(3.13) \quad 1 < \dim_H(G_X) = \dim_B(G_X) < 2$$

il che sta a significare che la dimensione di un grafico di un processo browniano frazionario è una dimensione frazionaria

## CAPITOLO IV

### SELEZIONE DI PORTAFOGLIO

#### 4.1 LA SELEZIONE DI PORTAFOGLIO ALLA MARKOWITZ

In questo paragrafo esporremo brevemente la teoria di selezione di portafoglio alla Markowitz. Il problema della selezione di *portafoglio*<sup>26</sup> è un tema che fin dalla pubblicazione dell'articolo "Portfolio Selection" di Markowitz nel 1952<sup>27</sup> ha attirato numerose attenzioni, suscitando critiche e venendo costantemente ampliato e modificato tramite l'utilizzo di metodi sempre più articolati, grazie anche alla qualità degli strumenti finanziari a disposizione degli operatori. Si sono quindi sviluppati (e si stanno tuttora sviluppando) modelli e strumenti operativi di selezione di portafoglio che si distaccano da quello di Markowitz; tuttavia quest'ultimo rimane un pilastro fondamentale della Teoria di selezione di portafoglio, ed è ancora oggi molto utilizzato dagli operatori.

Il modello di selezione di portafoglio alla Markowitz si pone il problema di trovare i *portafogli efficienti*<sup>28</sup> tra i quali un investitore, caratterizzato da una *funzione di utilità*<sup>29</sup>  $u(\cdot)$ , possa investire un importo certo  $C$  tra le  $n$  attività a rendimento aleatorio che

---

<sup>26</sup> Un portafoglio è un insieme di attività finanziarie detenuto da un soggetto.

<sup>27</sup> L'articolo fruttò, 38 anni dopo la sua pubblicazione, il premio Nobel per l'Economia a Markowitz, condiviso con Sharpe e Miller.

<sup>28</sup> Un portafoglio è efficiente quando, scelto un livello di rischio, presenta il maggior rendimento atteso o viceversa quando scelto un determinato livello di rendimento presenta il minor rischio.

<sup>29</sup> La funzione di utilità di un individuo razionale è una funzione, con particolari proprietà, che esprime la personale propensione al rischio. Per approfondimenti si veda [Fishburn, 1979].

caratterizzano l'economia. Questo modello si applicava ad un orizzonte temporale monoperiodale (o statico)  $[t, t+1]$ , ed identifica i concetti di rendimento e di rischio rispettivamente con il valore atteso del rendimento di portafoglio e con la relativa varianza. Il fattore di rendimento è quindi dato da

$$(4.1) R_t(1) = \frac{P_{t+1}}{P_t}$$

dove  $R_t(1)$  è una variabile aleatoria poiché il prezzo futuro  $P_{t+1}$  non è conosciuto. Il fattore di rendimento multiperiodale nell'intervallo  $[t, t+n]$  sarà

$$(4.2) R_t(n) = \frac{P_{t+1}}{P_t} \cdot \frac{P_{t+2}}{P_{t+1}} \cdot \dots \cdot \frac{P_{t+n}}{P_{t+(n-1)}} = \prod_{i=1}^n \frac{P_{t+i}}{P_{t+(i-1)}} = \frac{P_{t+n}}{P_t}$$

Il modello suppone inoltre [Garbade, 1982], [Canestrelli, Nardelli, 1991]:

- l'assenza di imposte;
- l'infinita divisibilità dei titoli;
- l'assenza dei costi di transazione;
- la perfetta competitività dei mercati<sup>30</sup>.

Il modello di Markowitz, come abbiamo già accennato, ipotizza che per la massimizzazione della sua funzione di utilità l'investitore agisca solo in funzione di  $E(X_t)$  e di  $\text{Var}(X_t)$ , il che è lecito nel caso in cui l'operatore abbia funzione di utilità quadratica (o, a prescindere dalla sua funzione di utilità, se  $X_t$  si distribuisce Normalmente). Se la scelta viene fatta tra un insieme di  $k$  titoli in base al loro rendimento uniperiodale  $X_{it}(1)$  con  $i=1,2,\dots,k$ , allora si è in presenza di un problema di selezione di portafoglio. Se indichiamo con

$$(4.3) \underline{X}_t(1) = [X_{1t}(1), X_{2t}(1), \dots, X_{kt}(1)]^{Tr}$$

il vettore dei rendimenti dei titoli che compongono il portafoglio, con

$$(4.4) \underline{\mu} = [EX_{1t}(1), EX_{2t}(1), \dots, EX_{kt}(1)]^{Tr} = [\mu_1 X_{1t}(1), \mu_2 X_{2t}(1), \dots, \mu_k X_{kt}(1)]^{Tr}$$

le loro medie, con

<sup>30</sup> La domanda di un titolo da parte di un investitore non può influenzarne il prezzo.



$$(4.5) \quad V = [\text{Cov}(X_{i_t}(1), X_{j_t}(1))] = [\sigma_{i_j t}(1)]$$

la matrice delle covarianze tra i titoli e con

$$(4.6) \quad \underline{z} = [z_1, z_2, \dots, z_k]^{Tr}$$

le quote di capitale investite in ciascun titoli, allora la media dell'intero portafoglio sarà

$$(4.7) \quad m = \underline{z}^{Tr} \cdot \underline{\mu} = \sum_{i=1}^k z_i \mu_i,$$

mentre la varianza sarà data da

$$(4.8) \quad v = \underline{z}^{Tr} \cdot V \cdot \underline{z} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k z_i z_j \sigma_{ij}.$$

Il modello propone di scegliere il vettore  $\underline{z}$  di quote da destinare ad ogni titolo risolvendo il seguente problema di *ottimo vincolato*<sup>31</sup> quadratico:

$$(4.9) \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad \underline{z}^{Tr} \cdot V \cdot \underline{z}$$

$$s. t. \quad \begin{aligned} m &= \underline{z}^{Tr} \cdot \underline{\mu} \\ 1 &= \underline{z}^{Tr} \cdot \underline{1} \end{aligned}$$

Il problema di ottimo vincolato qui posto ammette sempre una soluzione in quanto, nella generalità dei casi, la matrice  $V$  è definita positiva ossia  $\underline{z}^{Tr} \cdot V \cdot \underline{z} > 0$ ,  $\forall \underline{z} \in \mathbb{R}^k$  (per approfondimenti si rimanda a [SUNDARAM, 1996]).

In questa sede, riportiamo anche i risultati ottenuti in [CANESTRELLI, NARDELLI, 1991] oppure in [GARBADE, 1982], che dimostrano come, lasciando il parametro  $m$  (rendimento di portafoglio che l'investitore desidera ottenere) libero di variare, si otterrà una soluzione in funzione di  $m$  data da

$$(4.10) \quad \underline{z}(m) = \frac{m}{ac-b^2} (aV^{-1}\underline{\mu} - bV^{-1}\underline{1}) + \frac{1}{ac-b^2} (cV^{-1}\underline{1} - bV^{-1}\underline{\mu})$$

dove

<sup>31</sup> Per approfondimenti sui problemi di ottimo vincolato si veda [Sundaram, 1996], [Guerraggio, Salsa, 1997].

$$a = \underline{\mathbf{1}}^{Tr} \cdot V^{-1} \cdot \underline{\mathbf{1}}, \quad b = \underline{\boldsymbol{\mu}}^{Tr} \cdot V^{-1} \cdot \underline{\mathbf{1}}, \quad c = \underline{\boldsymbol{\mu}}^{Tr} \cdot V^{-1} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}}$$

La varianza del portafoglio in corrispondenza della soluzione ottima sarà quindi ottenuta dall'espressione

$$(4.11) \quad v(m) = \underline{\mathbf{z}}^{Tr}(m) \cdot V \cdot \underline{\mathbf{z}}(m) = \frac{a}{ac-b^2} m^2 - \frac{2b}{ac-b^2} m + \frac{c}{ac-b^2}$$

che è rappresentata da una parabola nel piano  $(m, v(m))$ . Da questa espressione, si può esplicitare il parametro  $m$  in modo da ottenere un portafoglio che abbia la varianza minima:

$$v'(m) = 0 \quad \Rightarrow \quad m^* = \frac{b}{a}$$

da cui

$$(4.12) \quad v^*(m^*) = \frac{1}{a}$$

Si sottolinea, però, che un portafoglio costruito in questo modo verrà scelto solo da un investitore con una *propensione al rischio*<sup>32</sup> nulla, poiché la tangente nel punto  $\left(\frac{b}{a}, \frac{1}{a}\right)$  è pari a zero.

---

<sup>32</sup> L'avversione al rischio è la proprietà che caratterizza un agente economico che preferisce sempre un ammontare certo rispetto a una quantità aleatoria. Allo stesso modo, un investitore è propenso al rischio è un investitore che preferisce sempre una data quantità aleatoria rispetto ad ottenere il suo valore atteso con certezza.

## 4.2 PRESENZA DI MEMORIA A LUNGO TERMINE

In questo paragrafo andremo valutare se vi sia o meno, nel mercato italiano, presenza di memoria a lungo termine ovvero se qualche titolo segua degli specifici *trend*.

Per fare ciò, abbiamo provveduto alla scelta degli indici e dei titoli che si desiderano analizzare. L'indice osservato è il FTSE MIB, paniere che comprende le 40 maggiori azioni italiane ed estere quotate sui mercati gestiti da Borsa Italiana. L'indice FTSE Mib andò a sostituire, nel 2009, l'indice S&P Mib e per questo motivo la serie storica da noi utilizzata è formata dall'unione delle serie storiche dei due indici, sostanzialmente identici. I titoli utilizzati invece sono stati selezionati diversificando il settore di riferimento ed in base alla capitalizzazione e al volume degli scambi. Nello specifico abbiamo considerato: AUTOGRILL, ENEL, TELECOM, TOD'S ed UNICREDIT. Le serie storiche utilizzate comprendono i prezzi ufficiali giornalieri di chiusura con frequenza di rilevazione giornaliera. I prezzi sono inoltre stati aggiustati per tenere conto di alcune operazioni sul capitale sociale. Di seguito la tabella riepilogativa dei titoli analizzati in questo capitolo.

TITOLO	DAL	AL	RILEVAZIONI
FTSE MIB	02/06/2003	31/12/2011	2225
AUTOGRILL	01/01/2003	31/12/2011	2332
ENEL	01/01/2003	31/12/2011	2332
TELECOM	01/01/2003	31/12/2011	2331
TOD'S	01/01/2003	31/12/2011	2332
UNICREDIT	01/01/2003	31/12/2011	2332

Prima di utilizzare l'analisi R/S per testare l'ipotesi di indipendenza nei rendimenti logaritmici, dobbiamo valutare la presenza di auto-dipendenza a breve termine nelle serie storiche dato che, come illustrato da Lo [LO A.W.,1991], l'analisi rescaled-range risulterebbe distorta se non se ne tenesse conto. Per fare ciò, abbiamo utilizzato un

software di analisi statistica che ci permettesse di stimare la funzione di autocorrelazione utilizzando un ritardo massimo di 10, equivalente a 2 settimane di mercato. Per la significatività dei valori abbiamo considerato 0,5. I risultati, ottenuti tramite l'utilizzo del software di analisi statistica "eViews", sono riportati nelle tabelle successive. Nella prima e nella seconda colonna possiamo visualizzare un grafico relativo ai valori dell'*autocorrelazione*<sup>33</sup> e dell'*autocorrelazione parziale*<sup>34</sup>; valori che sono riportati nella terza e quarta colonna. Nella quinta colonna viene invece riportato il valore della statistica Q di Ljung Box<sup>35</sup> mentre l'ultima colonna riporta il valore della *p-value*, utile per valutare il rifiuto o meno dell'ipotesi nulla.<sup>36</sup>

Date: 03/23/12 Time: 19:16

Sample: 1 2331

Included observations: 2223

Autocorrelation	Partial Correlation	C	PAC	Q-Stat	Prob	
****	****	0.491	0.491	36.43	.000	
	***	0.007	0.326	36.53	.000	
	**	0.028	0.284	38.23	.000	
	*	.053	0.177	44.50	.000	
	*	0.035	0.165	47.30	.000	
	*	.007	0.142	47.43	.000	
	*	0.005	0.131	47.48	.000	
	*	.018	0.095	48.23	.000	
	*	0.016	0.091	48.78	.000	
	*	0	0.006	0.099	48.87	.000

Tabella 1: Autocorrelazione sui rendimenti logaritmici dell'indice FTSE.

<sup>33-9</sup> L'autocorrelazione definisce il grado di dipendenza tra i valori assunti da una funzione campionata nel suo dominio in ascissa. L'autocorrelazione parziale è una funzione dell'autocorrelazione dopo aver eliminato gli effetti delle relazioni lineari intermedie. Per approfondimenti si veda "Introduzione all'econometria" [Stock, Watson, 2005].

<sup>35</sup> Test che utilizza l'autocorrelazione al quadrato dei residui stimati da un modello per verificare se essi siano realizzazioni di un processo *white noise*. Per approfondimenti su tale statistica e sui modelli ARIMA, si veda "Econometria" [Cappuccio, Orsi, 2005].

<sup>36</sup> Per approfondimenti, si veda "Econometria", [Cappuccio, Orsi, 2005].

Date: 03/23/12 Time: 19:16

Sample: 1 2331

Included observations: 2330

Autocorrelation	Partial Correlation	C	PAC	Q-Stat	Prob	
****	****	0.506	0.506	96.68	.000	
	**	.024	0.311	98.06	.000	
	**	0.011	0.226	98.32	.000	
	*	.001	0.171	98.33	.000	
	*	0.025	0.174	99.76	.000	
	*	.013	0.151	00.16	.000	
	*	.030	0.082	02.21	.000	
	*	0.041	0.104	06.21	.000	
	*	.022	0.082	07.37	.000	
	*	0	0.005	0.071	07.42	.000

Tabella 2: Autocorrelazione sui rendimenti logaritmici del titolo Autogrill.

Date: 03/23/12 Time: 19:16

Sample: 1 2331

Included observations: 2330

Autocorrelation	Partial Correlation	C	PAC	Q-Stat	Prob	
****	****	0.458	0.458	88.52	.000	
*	***	0.079	0.365	03.17	.000	
	***	0.028	0.358	05.06	.000	
*	*	.122	0.184	39.71	.000	
	*	0.032	0.130	42.08	.000	
	*	0.055	0.155	49.12	.000	
	*	.006	0.158	49.22	.000	
*		.085	0.042	66.28	.000	
*	*	0.071	0.075	77.97	.000	
	*	0	0.044	0.144	82.47	.000

Tabella 3: Autocorrelazione sui rendimenti logaritmici del titolo Enel.

Date: 03/23/12 Time: 19:17

Sample: 1 2331

Included observations: 2329

Autocorrelation	Partial Correlation	C	PAC	Q-Stat	Prob
***	***	0.447	0.447	65.78	.000
*	***	0.123	0.403	00.80	.000
	***	.010	0.368	01.05	.000
*	**	.066	0.290	11.17	.000
	**	.018	0.221	11.92	.000
	*	.019	0.104	12.72	.000
*	**	0.113	0.201	42.62	.000
*		.126	0.041	79.88	.000
*	*	0.114	0.177	10.15	.000
*	*	0 .077	0.116	23.87	.000

Tabella 4: Autocorrelazione sui rendimenti logaritmici del titolo Telecom.

Date: 03/23/12 Time: 19:17

Sample: 1 2331

Included observations: 2330

Autocorrelation	Partial Correlation	C	PAC	Q-Stat	Prob
****	****	0.468	0.468	10.62	.000
	***	0.047	0.340	15.74	.000
	**	.016	0.249	16.36	.000
	**	0.004	0.204	16.41	.000
	*	.025	0.133	17.84	.000
	*	0.029	0.134	19.85	.000
	*	0.017	0.155	20.51	.000
	*	.063	0.065	29.88	.000
	*	0.041	0.074	33.85	.000
	*	0 0.013	0.093	34.27	.000

Tabella 5: Autocorrelazione sui rendimenti logaritmici del titolo Tod's.

Date: 03/23/12 Time: 19:17

Sample: 1 2331

Included observations: 2330

Autocorrelation	Partial Correlation	C	PAC	Q-Stat	Prob	
****	****	0.552	0.552	11.57	.000	
*	**	.090	0.309	30.62	.000	
*	**	0.059	0.261	38.75	.000	
	*	.048	0.168	44.19	.000	
	*	0.014	0.113	44.65	.000	
	*	0.005	0.095	44.71	.000	
	*	0.027	0.125	46.40	.000	
*		.096	.022	67.75	.000	
*	*	0.170	0.161	35.20	.000	
*	**	0	.079	0.196	49.73	.000

Tabella 6: Autocorrelazione sui rendimenti logaritmici del titolo Unicredit.

Analizzando i risultati ottenuti, possiamo riepilogare gli ordini di auto-dipendenza dei nostri titoli nella seguente tabella:

TITOLO	ORDINE DI AUTO-DIPENDENZA
FTSE	4
AUTOGRILL	1
ENEL	9
TELECOM	10
TOD'S	8
UNICREDIT	10

A questo punto, per applicare l'analisi *rescaled range*, è necessario fissare alcuni parametri:

- i rendimenti utilizzati sono quelli logaritmici;
- la sottoserie di partenza,  $N_0$ , ha numerosità 10, pari cioè a due settimane borsistiche;
- l'incremento della numerosità delle sottoserie è pari a 5, equivalente ad una settimana di mercato (quindi, in generale,  $N_{j+1} = N_j + 5$ ).

Dopo aver ottenuto i risultati del *rescaled range*, abbiamo testato l'accettazione o il rifiuto dell'ipotesi nulla di indipendenza a lungo termine in base alla distribuzione della variabile aleatoria

$$(4.13) \quad V = \frac{R(T)}{\sqrt{T} \cdot S(T)},$$

per la quale si rimanda a [Lo, 1991].

Riportiamo i principali risultati, alcuni dei quali ottenuti tramite l'utilizzo del software di analisi statistica "R", nella seguente tabella:

TITOLO	COEFF. HURST	ACC/RIF
FTSE	0,5496	ACCETTO
AUTOGRILL	0,6189	RIF allo 0,01
ENEL	0,5706	ACCETTO
TELECOM	0,6223	ACCETTO
TOD'S	0,6496	RIF allo 0,10
UNICREDIT	0,5580	ACCETTO

Il valori ottenuti dimostrano che l'ipotesi nulla di indipendenza a lungo termine viene rifiutata per i titoli AUTOGRILL e TOD'S, mentre per l'indice FTSE MIB e per i titoli ENEL, TELECOM ed UNICREDIT l'ipotesi viene accettata. Questa conclusione non sorprende le aspettative dato che proprio gli ultimi titoli sono fra i più trattati dell'indice e, in virtù di ciò, le loro serie storiche si avvicinano maggiormente ad una *random walk* (mercato perfetto). Al contrario invece, per i titoli meno trattati, la carenza di domanda e di offerta favoriscono rispettivamente forti ribassi e rialzi e il conseguente manifestarsi di



*trend*. Per questi titoli, viene ipotizzato come processo generatore dei dati un *moto browniano frazionario* ed acquista senso la stima dell'esponente di Hurst che, come possiamo vedere dalla tabella, per tutti e due i titoli è maggiore di 0.5, il che denota quindi una persistenza nelle serie storiche dei rendimenti logaritmici.

### 4.3 CONFRONTO NELLA SELEZIONE DI PORTAFOGLIO: MERCATO CON TITOLI ANTIPERSISTENTI E MERCATO CON TITOLI NON PERSISTENTI

In questa sezione si presenta un risultato teorico tra una selezione di un portafoglio in un mercato in cui almeno un titolo segue un moto browniano frazionario antipersistente (esiste un  $i$  tale che  $H_i < 0.5$ ) e in un altro mercato in cui gli stessi titoli non presentano alcun tipo di persistenza (ovvero in cui per ogni  $i$ ,  $H_i=0.5$ ).

Si vuole verificare se la varianza della selezione effettuata sul mercato avente almeno un titolo antipersistente sia maggiore della stessa selezione effettuata su un mercato con titoli aventi coefficiente di Hurst pari a 0.5.

Identificando con

$$(4.14) \quad \bar{\sigma}_{ij} = \overline{Cov}(X_i, X_j) \forall i, j = 1, 2, \dots, n$$

le covarianze nel mercato con titoli non persistenti, dove con  $i = j$  si ha

$$(4.15) \quad \bar{\sigma}_{ii} = \overline{Cov}(X_i, X_i) = \overline{Var}(X_i),$$

e con

$$(4.16) \quad \sigma_{ij} = (\bar{\sigma}_{ij})^{H_i+H_j} = Cov(X_i, X_j) \forall i, j = 1, 2, \dots, n$$

le covarianze nel mercato con titoli aventi coefficiente di Hurst  $H < 0.5$ , dove con  $i=j$  si ha

$$(4.17) \quad \sigma_{ii} = (\bar{\sigma}_{ii})^{2H_i} = Cov(X_i, X_i) = Var(X_i),$$

vale il seguente teorema:

**Teorema:**

Siano

$$\bar{\sigma}_{ij} = \overline{Cov}(X_i, X_j) \forall i, j = 1, 2, \dots, n$$

le covarianze nel mercato non persistente;

$$\sigma_{ij} = (\bar{\sigma}_{ij})^{H_i + H_j} = Cov(X_i, X_j) \forall i, j = 1, 2, \dots, n$$

le covarianze nel mercato non persistente;

$$\bar{V} = [\bar{\sigma}_{ij}]$$

la matrice  $n \times n$  delle varianze e covarianze nel mercato antipersistente;

$$V = [\sigma_{ij}];$$

la matrice  $n \times n$  delle varianze e covarianze nel mercato antipersistente ed inoltre

- I. sia  $0 \leq \bar{\sigma}_{ij} \leq 1 \forall i, j = 1, 2, \dots, n$ ;
- II. sia  $H_i \leq 1/2 \forall i$  esponente di Hurst caratteristico del titolo  $i$ -esimo nel mercato antipersistente ed  $\exists i^*$  tale che  $H_{i^*} < 1/2$ ;

allora la varianza minima possibile del portafoglio nel mercato antipersistente sarà maggiore rispetto alla varianza minima possibile del portafoglio nel mercato non persistente ovvero, in simboli,

$$\frac{1}{a} \geq \frac{1}{\bar{a}}$$

dove

$$a = \mathbf{1}^{Tr} \cdot V^{-1} \cdot \mathbf{1} \quad \bar{a} = \mathbf{1}^{Tr} \cdot \bar{V}^{-1} \cdot \mathbf{1}.$$

**Dimostrazione**

Dalla I) e dalla II) si ha che

$$\sigma_{ij} = (\bar{\sigma}_{ij})^{H_i+H_j} \geq \bar{\sigma}_{ij} \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n,$$

e quindi

$$\underline{z}^{Tr} \cdot V \cdot \underline{z} \geq \underline{z}^{Tr} \cdot \bar{V} \cdot \underline{z} \quad \forall \underline{z} \neq \underline{0}.$$

Moltiplicando entrambe le matrici per  $\bar{V}^{-1}V^{-1}$  si otterrà

$$\underline{z}^{Tr} \cdot V^{-1}V\bar{V}^{-1} \cdot \underline{z} \geq \underline{z}^{Tr} \cdot V^{-1}\bar{V}\bar{V}^{-1} \cdot \underline{z} \quad \forall \underline{z} \neq \underline{0}$$

da cui

$$\underline{z}^{Tr} \cdot V^{-1} \cdot \underline{z} \geq \underline{z}^{Tr} \cdot V^{-1} \cdot \underline{z} \quad \forall \underline{z} \neq \underline{0}.$$

Ricordiamo ora che

$$a = \underline{1}^{Tr} \cdot V^{-1} \cdot \underline{1} e \bar{a} = \underline{1}^{Tr} \cdot \bar{V}^{-1} \cdot \underline{1},$$

si ricava

$$a \leq \bar{a}$$

e quindi

$$\frac{1}{a} \geq \frac{1}{\bar{a}}$$

come volevasi dimostrare. ■

Questo risultato implica che la presenza di titoli con caratteristiche antipersistenti ha influenza negativa sulla varianza e che, quindi, eseguendo una selezione di portafoglio in un mercato con titoli con tale caratteristica si otterrà un portafoglio avente una rischiosità maggiore rispetto ad un mercato con titoli non persistenti.

## CAPITOLO V

### CONCLUSIONI

#### 5.1 CONCLUSIONI

Quanto espresso in queste pagine cerca di fornire alcuni spunti utili a riconsiderare l'ipotesi di mercato efficiente, basato sulla distribuzione di probabilità Normale, come una descrizione solo parziale e, forse, restrittiva della realtà che si svolge nei mercati finanziari.

Nel capitolo V abbiamo infatti potuto appurare, tramite l'applicazione dell'analisi *rescaled range*, che in alcuni titoli del mercato italiano vi sia la presenza di una forma di dipendenza a lungo termine nella serie storica dei rendimenti logaritmici, il che porta al rigetto di una delle ipotesi alla base della EMH: l'indipendenza nei rendimenti logaritmici dei titoli azionari.

È anche per questo motivo che, da quando Mandelbrot per la prima volta nel suo libro del 1975 "*Gli oggetti frattali. Forma, caso e dimensione*" ne coniò il termine, i frattali hanno trovato e continuano a trovare numerose applicazioni anche nell'analisi dei mercati finanziari grazie alle loro particolari caratteristiche che, come spiegato nei primi capitoli di questa tesi, sembrano per certi versi adattarsi meglio alla natura che governa i processi dei prezzi dei titoli azionari.

Inoltre, nel capitolo IV, abbiamo dimostrato che la presenza di titoli con caratteristiche antipersistenti incidano negativamente sulla rischiosità, vista come varianza, di un portafoglio. Ciò ribadisce altresì l'esigenza di considerare in maniera più ponderata la componente di rischio nei portafogli finanziari in quanto la *non indipendenza* di alcuni titoli può influire in maniera non trascurabile nella sua determinazione.

Si potrebbe quindi concludere, generalizzando le conclusioni tratte, che l'esponente di Hurst, nei casi in cui l'ipotesi di indipendenza a lungo termine delle serie storiche dei rendimenti logaritmici venisse rifiutata, potrebbe essere considerato al fine della costruzione di un portafoglio finanziario in quanto un indice di H molto prossimo ad 1 potrebbe indicare una forte persistenza e, dunque, una maggiore prevedibilità sul possibile futuro dei prezzi di un titolo. In generale si potrebbe affermare che, andando a considerare due titoli finanziari entrambi con  $H > 0,5$  per la costruzione di un portafoglio, sarebbe da preferire il titolo con coefficiente di Hurst più alto (a parità di altre condizioni) in quanto i valori del suo prezzo futuro dovrebbero risultare maggiormente prevedibili e, inoltre, potrebbero presentare un numero di inversioni e cambiamenti di tendenza inferiori rispetto al titolo con coefficiente di Hurst minore.

## FORMULARIO

$$t_i = i \cdot \left(\frac{T-0}{n}\right) = i \cdot \Delta t, \forall i = 0, 1, \dots, n \quad (1.1)$$

$$t_{i+1} - t_i = \frac{T}{n} = \Delta t, \forall i = 0, 1, \dots, n. \quad (1.2)$$

$$P_{t_{i+1}} = P_{t_i} \left[ 1 + \mu(t_{i+1} - t_i) + \sigma\sqrt{(t_{i+1} - t_i)}\varepsilon_{t_i} \right], \forall i = 0, 1, \dots, n - 1 \quad (1.3)$$

$$P_{t_i+\Delta t} = P_{t_i} \left[ 1 + \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon_{t_i} \right], \forall i = 0, 1, \dots, n - 1 \quad (1.4)$$

$$P_{t_i+\Delta t} - P_{t_i} = P_{t_i}\mu\Delta t + P_{t_i}\sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon_{t_i}, \forall i = 0, 1, \dots, n - 1 \text{ e } \varepsilon_{t_i} \sim \mathcal{NIID}(0,1) \quad (1.5)$$

$$dP(t) = P(t)\mu dt + P(t)\sigma\sqrt{dt}\varepsilon(t), \text{ con } \varepsilon(t) \sim \mathcal{NIID}(0,1) \quad (1.6)$$

$$\frac{dP(t)}{P(t)} = \mu dt + \sigma\sqrt{dt}\varepsilon(t), \text{ con } \varepsilon(t) \sim \mathcal{NIID}(0,1) \quad (1.7)$$

$$\ln P(t) \sim \mathcal{N} \left[ \ln P(0) + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t, \sigma\sqrt{t} \right] \quad (1.8)$$

$$\ln P_{t_i+\Delta t} \sim \mathcal{N} \left[ \ln P_{t_i} + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t, \sigma\sqrt{\Delta t} \right] \quad (1.9)$$

$$E(P_{t_i+\Delta t}) = P_{t_i} \cdot e^{\mu\Delta t} \quad (1.10)$$

$$v = x'Vx, \quad \pi = x'r, \quad 1 = x'e \quad (1.11)$$

$$E(r_i) = r_f + \beta_i[E(r_i) - r_f] \quad (1.12)$$

$$\mathcal{L}^n(A) = \inf \{ \sum_{i=1}^{m \leq \infty} \text{vol}^n(A_i) \mid A \subset \cup_{i=1}^{m \leq \infty} A_i \} \quad (2.1)$$

$$\text{diam}(U) = \sup \{ \|\underline{x} - \underline{y}\|, \forall \underline{x}, \underline{y} \in U \} \quad (2.2)$$

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \{ \sum_{i=1}^{m \leq \infty} [\text{diam}(U_i)]^s \mid F \subset \cup_{i=1}^{m \leq \infty} U_i \text{ e } 0 < \text{diam}(U_i) \leq \delta \} \quad (2.3)$$

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F) \blacksquare \quad (2.4)$$

$$s^* = \text{dim}_H(F) = \inf \{ s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = 0 \} = \sup \{ s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = \infty \} \quad (2.5)$$

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{se } s < s^* = \text{dim}_H(F) \\ 0 & \text{se } s > s^* = \text{dim}_H(F) \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\text{dim}_M(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{\ln(\frac{1}{\delta})} \blacksquare \quad (2.7)$$

$$\text{dim}_H(F) \leq \text{dim}_M(F) \quad (2.8)$$

$$C = \cap_{k=0}^{\infty} C_k = \lim_{k \rightarrow \infty} C_k \quad (2.9)$$

$$\mathcal{H}_{\delta \leq 3^{-k}}^s(C) = \inf \{ \sum_{i=1}^{m \leq \infty} [\text{diam}(U_i)]^s \mid F \subset \cup_{i=1}^{m \leq \infty} U_i \text{ e } 0 < \text{diam}(U_i) \leq \delta \} \leq$$

$$\sum_{i=1}^{2^k} (3^{-k})^s == 2^k \cdot 3^{-ks} = \left(\frac{2}{3^s}\right)^k \quad (2.10)$$

$$\mathcal{H}^s(C) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(C) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3^s}\right)^k \quad (2.11)$$

$$\mathcal{H}^s(C) = \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3^s}\right)^k = 0 & \text{se } \left(\frac{2}{3^s}\right) < 1 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3^s}\right)^k = 1 & \text{se } \left(\frac{2}{3^s}\right) = 1 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3^s}\right)^k = \infty & \text{se } \left(\frac{2}{3^s}\right) > 1 \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\mathcal{L}(K_k) = \left(\frac{4}{3}\right)^k \Rightarrow \mathcal{L}(K) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^k = \infty \quad (2.13)$$

$$s^* = \text{dim}_H(P) = \text{dim}_B(P) = \frac{\ln 4}{\ln 3} \cong 1,261859 \quad (2.14)$$

$$M_{n+1} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3: \begin{array}{l} \exists i, j, k \in \{0,1,2\}: (3x - i, 3y - j, 3z - k) \in M_n \\ \text{e non pi\`u di una fra } i, j, k \text{ \u00e8 uguale a } 1 \end{array} \right\} \quad (2.15)$$

$$\sum_{i=1}^n X_i = a_n X + b_n \quad (3.1)$$

$$\ln \Phi(u) = i \delta u - |\gamma u|^\alpha [1 + i \beta \operatorname{sgn}(u) \omega(u, \alpha)] \quad (3.2)$$

$$X_{t,n} = \sum_{u=1}^t (e_u - M_n) \quad (3.3)$$

$$R_n = \operatorname{Max}(X_{t,n}) - \operatorname{Min}(X_{t,n}) \quad (3.4)$$

$$\frac{R}{S_n} = \frac{\max_{1 \leq n \leq t} \sum_{u=1}^n (e_u - M_n) - \min_{1 \leq n \leq t} \sum_{u=1}^n (e_u - M_n)}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{u=1}^n (e_u - M_n)^2}} \quad (3.5)$$

$$\frac{R}{s} = \left( \frac{N}{2} \right)^H \quad (3.6)$$

$$\frac{R}{s} = a N^H \quad (3.7)$$

$$\gamma(k) = E\{[X(t + \Delta t) - X(t)] \cdot [X(t + k + \Delta t) - X(t + k)]\} = \frac{1}{2} [(\Delta t + k)^{2H} - \Delta t^{2H} - k^{2H}] \quad (3.8)$$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{E\{R[X(t), T] / S[X(t), T]\}}{a T^{1/\alpha}} = 1 \quad (3.9)$$

$$H = \frac{1}{\alpha} \quad (3.10)$$

$$G_X = \{(t, Y) \in \mathbb{R}^2 | Y = X(t) \wedge t \in [0, \infty)\} \quad (3.11)$$

$$\dim_H(G_X) = \dim_B(G_X) = 2 - H \quad (3.12)$$

$$1 < \dim_H(G_X) = \dim_B(G_X) < 2 \quad (3.13)$$



$$R_t(1) = \frac{P_{t+1}}{P_t} \quad (4.1)$$

$$R_t(n) = \frac{P_{t+1}}{P_t} \cdot \frac{P_{t+2}}{P_{t+1}} \cdot \dots \cdot \frac{P_{t+n}}{P_{t+(n-1)}} = \prod_{i=1}^n \frac{P_{t+i}}{P_{t+(i-1)}} = \frac{P_{t+n}}{P_t} \quad (4.2)$$

$$\underline{X}_t(1) = [X_{1t}(1), X_{2t}(1), \dots, X_{kt}(1)]^{Tr} \quad (4.3)$$

$$\underline{\mu} = [EX_{1t}(1), EX_{2t}(1), \dots, EX_{kt}(1)]^{Tr} = [\mu_1 X_{1t}(1), \mu_2 X_{2t}(1), \dots, \mu_k X_{kt}(1)]^{Tr} \quad (4.4)$$

$$V = [Cov(X_{it}(1), X_{jt}(1))] = [\sigma_{ijt}(1)] \quad (4.5)$$

$$\underline{z} = [z_1, z_2, \dots, z_k]^{Tr} \quad (4.6)$$

$$m = \underline{z}^{Tr} \cdot \underline{\mu} = \sum_{i=1}^k z_i \mu_i \quad (4.7)$$

$$v = \underline{z}^{Tr} \cdot V \cdot \underline{z} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k z_i z_j \sigma_{ij} \quad (4.8)$$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \underline{z}^{Tr} \cdot V \cdot \underline{z} \quad (4.9)$$

$$\underline{z}(m) = \frac{m}{ac-b^2} (aV^{-1}\underline{\mu} - bV^{-1}\underline{1}) + \frac{1}{ac-b^2} (cV^{-1}\underline{1} - bV^{-1}\underline{\mu}) \quad (4.10)$$

$$v(m) = \underline{z}^{Tr}(m) \cdot V \cdot \underline{z}(m) = \frac{a}{ac-b^2} m^2 - \frac{2b}{ac-b^2} m + \frac{c}{ac-b^2} \quad (4.11)$$

$$v^*(m^*) = \frac{1}{a} \quad (4.12)$$

$$V = \frac{R(T)}{\sqrt{T} \cdot S(T)} \quad (4.13)$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \overline{Cov}(X_i, X_j) \forall i, j = 1, 2, \dots, n \quad (4.14)$$

$$\bar{\sigma}_{ii} = \overline{Cov}(X_i, X_i) = \overline{Var}(X_i) \quad (4.15)$$

$$\sigma_{ij} = (\bar{\sigma}_{ij})^{H_i+H_j} = Cov(X_i, X_j) \forall i, j = 1, 2, \dots, n \quad (4.16)$$

$$\sigma_{ii} = (\bar{\sigma}_{ii})^{2H_i} = Cov(X_i, X_i) = Var(X_i) \quad (4.16)$$

## **BIBLIOGRAFIA**

- ALEXANDER S., 1964, "Price movements in speculative markets: trends or random walks, No. 2", in Cootner P., ed., "The random character of stock market prices", M.I.T. Press, Cambridge.
- ARNOLD B. C., 1983, "Pareto distributions", Fairland, MD, International cooperative.
- BACHELIER L., 1900, "Theory of speculation" in Cootner P., "The random character of stock market prices", M.I.T. Press, Cambridge.
- BLACK F., 1972, "Capital market equilibrium with restricted borrowing", Journal of Business 45.
- BLACK F., SCHOLES M., 1973, "The pricing of options and corporate liabilities", Journal of Political Economy 81.
- BRASOLIN A., CORAZZA M., NARDELLI C., 1992, "Autosimilarità e comportamento non lineare di un indice azionario nel Mercato italiano", Atti del XVI convegno A.M.A.S.E.S., Treviso.
- BROCK W. A., 1986, "Distinguishing random and deterministic systems", Journal of Economic Theory 40.
- CAMPBELL J. Y., LO A. W., MACKINLAY A. C., 1997, "The econometrics of financial Markets", Princeton University Press, Chichester, West Sussex.

- CANESTRELLI E., CIPRIANI M., CORAZZA M., 1993, “Determinazione dei parametri di una funzione di distribuzione Pareto Lévy stabile”, Rendiconti per il comitato degli studi economici XXX/XXXI.
- CANESTRELLI E., NARDELLI C., 1991/1, “Criteri per la selezione del Portafoglio”, G. Giappichelli Editore, Torino.
- CANESTRELLI E., NARDELLI C., 1991/2, “Distribuzioni stabili di Lévy dei rendimenti del Mercato azionario italiano”, Atti del XV convegno A.M.A.S.E.S., Grado.
- CAPPUCCIO N, ORSI R., 2005, “Econometria”, il Mulino Editore.
- COHN D. L., (1980) “Measure Theory”. Boston, Birkhäuser.
- COOTNER P. H., 1964, “The random character of Stock Market Prices”, M.I.T. Press.
- CORAZZA M., 1993/1994, “Caso e Caos deterministico: un approccio all’analisi delle leggi di evoluzione dei prezzi speculativi”, Tesi di dottorato, Università degli studi di Brescia, Brescia.
- CORAZZA M., MALLIARIS A. G., NARDELLI C., 1993, “Searching for fractal structure in agricultural futures market”, Euro Working Group on Financial modelling, Mantova, 14th meeting.
- CORAZZA M., NARDELLI C., 1993/1, “Analisi della struttura frattale del mercato finanziario italiano”, Rendiconti del Comitato per gli Studi Economici, XXX/XXXI.
- CORAZZA M., NARDELLI C., 1993/2, “Fenomeno della dipendenza a lungo termine nel Mercato finanziario italiano”, Atti del XVII convegno A.M.A.S.E.S., Ischia.
- CORAZZA M., NARDELLI C., 1993/3, “Looking for fractal structure in the Capital Market”, International Conference on predictability and nonlinear modeling in natural sciences and economics, Wageningen.

- COWLES A., JONES H. E., 1937, "Some a posteriori probabilities in stock market actions", *Econometrica* vol. 5.
- DEVANEY R. L., 1989, "Introduction to chaotic dynamical system", The Benjamin/Cumming Publishing, Menlo Park.
- DOTTO M., 2001, "Oggetti frattali per le applicazioni nei mercati finanziari", tesi di dottorato, Università degli studi di Venezia.
- DUPERNEX S., 2007, "Why might share prices follow a random walk?", *Student Economic Review* vol. 21.
- EINSTEIN A., 1956, "Investigation on the theory of the Brownian movement, Dover Publications Inc., New York, Dover.
- FALKONER K., 1990, "Fractal Geometry, Mathematical foundations and applications", John Wiley&Sons, Chichester.
- FAMA E. F., 1963, "Mandelbrot and the stable paretian hypothesis", *Journal of Business*, in Cootner P. H. "The random character of stock market prices", The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts.
- FAMA E. F., 1965, "The behavior of stock market prices", *Journal of Business* 38.
- FAMA E. F., 1970, "Efficient capital markets: a review of Theory and empirical work", *The Journal of Finance*, 25.
- FAMA E. F., 1991, "Efficient capital markets: II", *The Journal of Finance* XLVI, 5.
- FAMA E. F., MILLER M. H., 1972, "The Theory of Finance", New York: Holt, Rinehart and Winston.
- FEDER J., 1988, "Fractals", New York: Plenum Press.
- FISHBURN P. C., (1979) "Utility Theory for Decision Making, Krieger", Huntington (NY).

- GAMMEL B. M., 1998, "Hurst's rescaled range statistical analysis for pseudorandom number generators used in physical simulations", *Physical review* vol. 8 n. 2.
- GERALD A. E., 1990, "Measure, Topology and Fractal Geometry", Springer-Verlag Inc., New York.
- GLEICK J., 1987, "Chaos. Making a new science", Viking Penguin Inc., New York.
- GRANDMONT J., MALGRANGE P., 1986, "Nonlinear economic dynamics: Introduction", *Journal of Economic Theory* 40.
- GRASSBERGER P., PROCACCIA I., 1983, "Characterization of strange attractors", *Physical Review Letters* 48.
- GREENE M. T., FIELITZ B. D., 1977, "The effect of long term dependence on risk-return models of common stocks", *Operations Research*.
- GUERRAGGIO A., 1991, "Matematica generale", Bollati Boringhieri Editore s.r.l., Torino.
- HICKS J., 1979, "Casuality in Economics", New York: Basic Books.
- HULL J. C., 1997, "Options, Futures and other derivatives", Prentice Hall Inc.
- HURST H. E., 1951, "Long term storage capacity of reservoirs", *Transactions of the American society of civil engineers* 116.
- LANDENNA G., 1980, "Fondamenti di statistica descrittiva", Società Editrice il Mulino, Bologna.
- LO A. W., 1991, "Long term memory in stock market prices", *Econometrica* 59.
- LORENZ E. N., 1962, "Deterministic non periodic flow", *Journal of the atmospheric sciences* 20.
- MANDELBROT B. B., 1960, "Stable paretian random functions and the multiplicative variation of income", *Econometrica* 29.

- MANDELBROT B. B., 1960, "The Pareto-Lévy law, and the distribution of income", *International Economic Review* 1.
- MANDELBROT B. B., 1963/1, "New methods in statistical economics", *The Journal of Political Economy* LXXI, 5.
- MANDELBROT B. B., 1963/2, "The variation of certain speculative prices", *Journal of Business* in COOTNER P. H., 1964, "The random character of stock market prices", M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts.
- MANDELBROT B. B., 1967, "The variation of some other speculative prices", *Journal of Business* 15.
- MANDELBROT B. B., 1972/1, "Statistical methodology for nonperiodic cycles: from the covariance to the R/S analysis", *Annals of Economic and Social Measurement* 1.
- MANDELBROT B. B., 1972/2, "When can price be arbitrated efficiently? A limit to the validity of the random walk and the martingale models", *the reviews of Economics and Statistics* 53.
- MANDELBROT B. B., 1975, "Les object fractals"
- MANDELBROT B. B., 1982, "The fractal geometry of Nature", W. H. Freeman, New York.
- MANDELBROT B. B., 1999, "Una passeggiata frattale a Wall Street", *Le Scienze* n. 368.
- MANDELBROT B. B., TAQQU M. S., 1979, "Robust R/S analysis of long run serial correlation, *International Statistical Institute, 42th Session, Manila.*
- MANDELBROT B. B., VAN NESS J., 1968, "Fractional Brownian motion, fractional noises, and applications", *SIAM Review* 10.
- MANDELBROT B. B., WALLIS J. R., 1969, "Robustness of the rescaled range R/S in the measurement of noncyclic lon run statistical dependence", *Water Resource Research* 5.

- MARKOWITZ H. M., 1952, "Portfolio selection", *Journal of Finance* 7.
- MARKOWITZ H. M., 1959, "Portfolio selection: efficient diversification of investments", New York: John Wiley & Sons.
- MC NEES S. K., 1985, "Which forecast should you use?", *New England Economic Review*.
- MEDIO A., 1992, "Chaotic dynamics. Theory and applications to economic", Cambridge University Press, Cambridge.
- MELESE F., TRANSUE W., 1986, "Unscrambling chaos through thick and thin", *Quarterly Journal of Economics*.
- MOORE A. B., 1964, "Some characteristics of changes in common stock prices", in COOTNER P. H., "The random character of stock market prices", M.I.T. Press, Cambridge.
- MORICONI F., 1994, "Matematica finanziaria", Il Mulino, Bologna.
- NARDELLI C., 1992, "Approccio all'indagine della struttura frattale e caotica del mercato finanziario italiano", tesi di dottorato, Università degli studi di Brescia.
- OSBORNE M. F. M., 1959, "Brownian motion in the stock market", *Operations Research* 7.
- PETERS E. E., 1989, "Fractal structure in the capital markets", *Financial Analysis Journal*.
- PETERS E. E., 1991, "Chaos and order in the capital markets", John Wiley & Sons Inc.
- PETERS E. E., 1994, "Fractal market analysis", John Wiley & Sons Inc.
- PIANCA P., "Matematica finanziaria II", dispensa didattica, Università degli studi di Venezia.



- PICCOLO D., 1990, "Introduzione all'analisi delle serie storiche", La nuova Italia scientifica, Roma.
- PIERCE J. R., 1961, "Symbols, Signal and Noise", New York: Harper & Row.
- PRIGOGINE I., STENGERS I., 1984, "Order out of Chaos", Bantam Books, New York.
- ROBERTS H. V., 1959, "Stock market patterns and financial analysis: methodological suggestions", *Journal of Finance* 14.
- ROSS S. A., WESTERFIELD R. W., JAFFE J. F., 1997, "Finanza aziendale", il Mulino, Bologna.
- RUELLE D., 1981, "Small random perturbations of dynamical systems and the definition of attractors", *Communications of Mathematical Physics* 82.
- SAMUELSON P. A., 1965, "Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly", *Industrial Management Review* 6.
- SHARPE W. F., 1963, "A simplified model of portfolio analysis", *Management Science* 9.
- SHARPE W. F., 1964, "Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk", *Journal of Finance* 19.
- SHARPE W. F., 1970, "Portfolio theory and capital markets", McGraw-Hill, New York.
- SHILLER R. J., 1989, "Market volatility", M.I.T. Press, Cambridge.
- STOCK J. H., WATSON M. W., "Introduzione all'Econometria", Pearson Editore.
- SUNDARAM R. K., 1996, "A first course in optimization theory", Cambridge University Press, New York.
- SUTCLIFFE J. V., 1979, "Obituary. Harold Edwin Hurst: 1 January 1880 – 7 December 1978", *Hydrological Sciences-Bullettin-des Science hydrologiques*, Wallingford, Oxon, UK.

THOMPSON J. M. T., STEWART H. B., 1986, "Nonlinear dynamics and Chaos",  
John Wiley & Sons.

WORKING H., 1934, "A random difference series for use in the analysis for time  
series", Journal of the American Statistical Association 29.

YAMAGUTI M., HATA M., KIGAMI J., 1993, "Mathematics of fractals",  
American Mathematical Society 167.

WEB: <http://it.wikipedia.org>

WEB: <http://performancetrading.it>

WEB: <http://galileo.cincom.unical.it>

WEB: <http://www.webfract.it/>

WEB: <http://www.mat.unimi.it/>