Università
Ca'Foscari
Venezia
Facoltà
di Economia

Corso di Laurea
in Economia e Finanza

Prova finale di Laurea

Valutazione dei rischi di mercato: Extreme Value Theory e sue applicazioni

Relatore
prof. Marco Corazza

Laureanda
Monica Benincà
Matricola 816091

Anno Accademico
2011-2012

Indice

Indice i

Elenco delle tabelle iii

Elenco delle figure iv

Introduzione 1

1 Il panorama del rischio 2
1.1 Introduzione . . . 2
1.2 Una prima versatile definizione . . . 3
1.3 Risk Management . . . 4
1.3.1 L'instabilità come unica certezza . . . 5
1.3.2 Measurement, prima introduzione al VaR . . . 9
1.4 I Rischi Finanziari . . . 12
1.4.1 Rischio di mercato . . . 12
1.4.2 Rischio di credito . . . 15
1.4.3 Rischio operativo . . . 16
1.4.4 Rischio di liquidità . . . 18
1.4.5 Il rischio nelle compagnie assicurative . . . 20
1.5 Regolamentazione . . . 21
1.5.1 I Requisiti patrimoniali delle banche . . . 22
1.5.1.1 Il primo accordo sul capitale: Basilea I . . . 22
1.5.1.2 Revisione del primo accordo: introduzione di requisiti patrimoniali per i rischi di mercato . . . 24
1.5.1.3 Basilea II . . . 28
1.5.1.4 Le recenti disposizioni di Basilea III . . . 34
1.5.2 Il margine di solvibilità nelle compagnie assicurative . . . 39

2 Approcci standard per i rischi di mercato 43
2.1 Introduzione . . . 43
2.2 Il metodo parametrico . . . 45
2.2.1 Le ipotesi sottostanti al modello . . . 46
2.2.2 Il modello lineare per un generico portafoglio . . . 51
2.2.3 Il modello quadratico, approccio delta-gamma . . . 56
2.3 La stima della matrice di varianze-covarianze . . . 59

2.3.1 La stima attraverso le medie mobili esponenziali 62
2.3.2 La previsione della volatilità avvalendosi dei modelli GARCH 63
2.3.3 La volatilità implicita 66
2.3.4 Le correlazioni 68
2.4 I modelli di simulazione 69
2.4.1 Le simulazioni storiche 70
2.4.2 Le simulazioni Monte Carlo 74
2.4.3 Le prove di stress 76

3 Criticità dei modelli VaR 80
3.1 Introduzione 80
3.2 Ostacoli operativi dei metodi tradizionali 81
3.3 Le proprietà di una coerente misura di rischio 84
3.4 I limiti del VaR 86
3.5 L'Expected shortfall 88
3.6 Valutazione della dipendenza tra variabili 90
3.6.1 Alcuni esempi di copula 93

4 La teoria dei valori estremi 95
4.1 Introduzione 95
4.2 La crescente attenzione alle condizioni non ordinarie 96
4.3 Teoria generale per il metodo Block-maxima 98
4.3.1 La stima dei parametri 102
4.3.2 Il metodo block-maxima per le prove di stress 104
4.4 Il metodo Peaks over threshold 106
4.4.1 Adattare al modello le perdite in eccesso 108
4.4.2 Misure il rischio con il metodo POT 111
4.5 Modelli multivariati 112

5 Applicazioni 114
5.1 Introduzione 114
5.2 Confronto tra il metodo block-maxima e il modello POT 115
5.2.1 Alcune analisi preliminari 116
5.2.2 Applicazione del metodo block-maxima 120
5.2.3 Applicazione del metodo POT 122
5.3 Una semplice prova di stress utilizzando il metodo block-maxima . 131
5.4 Calcolo dello stressed VaR 135

Commento finale 141

Bibliografia 143

Elenco delle tabelle

1.1 Evoluzione del mercato dei derivati
Fonte: Jorion, 2007 14

5.1 Indici di asimmetria e curtosi 118
5.2 Test di normalità 119
5.3 Stima dei parametri del campione con 8260 dati 120
5.4 Stima dei parametri del campione con 900 dati 120
5.5 Stima dei parametri del campione 1 (8260 dati) 123
5.6 Stima dei parametri del campione 2 (900 dati) 123
5.7 Stima del VaR, $u = 2,5\%$ 126
5.8 Stima del VaR, $u = 2,75\%$ 126
5.9 Stima dell'ES, $u = 2,5\%$ 126
5.10 Stima dell'ES, $u = 2,75\%$ 126
5.11 Stima del VaR, $u = 2,5\%$ 127
5.12 Stima del VaR, $u = 2,75\%$ 127
5.13 Stima dell'ES, $u = 2,5\%$ 127
5.14 Stima dell'ES, $u = 2,75\%$ 127
5.15 Stima delle misure di rischio senza la perdita del 1987, soglia $u = 2,75\%$ e livello di confidenza al 99,9% 131
5.16 Stima dei parametri del modello GEV 132
5.17 Stima del return level 132
5.18 Test di normalità 136
5.19 Stima dei parametri del FTSE 100 137
5.20 Stima del VaR e dello sVaR 137
5.21 Esponenti per il calcolo del VaR a T giorni 140

Elenco delle figure

1.1 Andamento del mercato azionario statunitense, Fonte: ''FED'' 8
1.2 Cambio Euro/Dollaro, Fonte: ''FED'' 9

2.1 Distribuzione normale per l'approccio parametrico 48
2.2 Distribuzione probabilistica del valore di un portafoglio 57

4.1 Densità di probabilità per le distribuzioni GEV standard 101
4.2 Eccesso medio in base al valore della soglia 110

5.1 Andamento dei prezzi nei due periodi 117
5.2 Rendimenti dello S&P per i due periodi 117
5.3 Q-Q plot delle serie dei rendimenti 119
5.4 Residui, campione 1 121
5.5 Residui, campione 2 122
5.6 Distribuzione empirica degli eccessi, campione 1 124
5.7 Distribuzione empirica degli eccessi, campione 2 124
5.8 Analisi dei residui, campione 1 125
5.9 Analisi dei residui, campione 2 125
5.10 VaR e ES per il campione 1 con u=2,75% e livello di confidenza del 99,9% 128
5.11 VaR e ES per il campione 2 con u=2,75% e livello di confidenza del 99,9% 129
5.12 VaR e ES per il campione 2 con u=2,75% e livello di confidenza del 99% 130
5.13 Prove di stress per l'indice S&P 500, perdita massima ogni 14 trimestri 133
5.14 Prove di stress per l'indice S&P 500, perdita massima ogni 28 trimestri 134
5.15 Andamento dei prezzi e dei rendimenti del FTSE 100 135
5.16 Andamento dei prezzi e dei rendimenti del FTSE 100 durante il periodo di stress 136
5.17 Stima del Var 138
5.18 Stima dello stressed VaR 139

Introduzione

Durante il precedente decennio il mercato finanziario internazionale è stato attraversato da numerosi periodi di instabilità che hanno trascinato con sé incertezza e arrecato perdite, talvolta di dimensioni assai notevoli, a istituti finanziari e non.

Da qui la necessità di dotarsi di modelli di gestione del rischio in grado di rispondere alle variazioni inattese che il valore delle attività detenute in portafoglio potrebbe subire. Altresì, il comitato di Basilea ha ritenuto opportuno, dopo la persistenza della crisi finanziaria del 2007/2008, rivedere il sistema di determinazione del requisito patrimoniale a fronte dei rischi di mercato, introducendo l'obbligo per le istituzioni che si avvalgono dei modelli interni la misura aggiuntiva dello ''stressed VaR''.

Lo scopo della mia tesi è esaminare le diverse possibilità offerte per il calcolo del VaR, evidenziando in particolar modo che i metodi standard, ovvero il metodo parametrico e le tecniche di simulazione, non sono capaci di catturare gli eventi estremi, cioè quelli che dovrebbero essere oggetto di valutazioni più attente da parte del risk management.

Viene così introdotta come possibile soluzione la teoria dei valori estremi (EVT-*Extreme Value Theory*) per consentire il computo del VaR, per livelli di confidenza elevati, con eccellente precisione per garantire un requisito patrimoniale corrispondente al profilo di rischio del portafoglio titoli esaminato.

Capitolo 1

Il panorama del rischio

1.1 Introduzione

Il concetto di rischio non è univoco e non è sintetizzabile in un'unica definizione valida per tutti i contesti. Esso è legato all'incertezza e non all'ignoranza, intesa come non conoscenza, con la quale non ha nessun legame.

Esattamente, che cos'è il rischio? Il *rischio* può essere qualificato come la possibilità che si verifichi un evento indesiderato e inaspettato. In particolare nel contesto economico-finanziario rappresenta la possibilità che le variabili come il valore delle attività, del capitale o dei profitti in generale possano subire variazioni avverse.

Tutte le società che operano a livello globale sono in via approssimativa soggette ad una duplice forma di rischio: il *business risk* legato alle scelte decisionali e operative e il *financial risk* che dipende dai movimenti delle variabili finanziarie.

Gli operatori dei mercati finanziari internazionali sono caratterizzati dall'avversione al rischio, infatti il problema dell'investitore risiede nel quantificare il giusto *trade-off* tra rischio e rendimento massimizzando una propria funzione di utilità. Queste caratteristiche sembrano in contrasto tra di loro poiché maggiore è il guadagno, quindi il rendimento, più l'investitore è soddisfatto ma per ottenere elevati rendimenti è necessario investire in attività rischiose. Quindi, un investitore razionale a parità di rendimento preferirà sempre l'investimento me-

no rischioso, caratteristica che si riflette nella forma concava della sua funzione di utilità.

Tuttavia è solo attraverso l'assunzione di posizioni incerte e rischiose che è possibile realizzare utili. Pertanto sia per le istituzioni bancarie che assicurative, che per loro natura assumono posizioni aleatorie, il *risk management* è l'attività chiave, alla quale compete il ruolo di gestire posizioni e coperture sfruttando a proprio favore l'esperienza e le tecniche più adeguate per controllare e trasferire il rischio e garantire risultati positivi anche in presenza di incertezza.

1.2 Una prima versatile definizione

In generale il rischio è strettamente connesso all'incertezza e per potersi dotare di una struttura analitica valida esso deve essere associato alla nozione di casualità e alla definizione di probabilità così come formulata da A. N. Kolmogorov (1933).

Secondo la sua impostazione assiomatica, un esperimento casuale è definito dalla terna (Ω, F, P). L'insieme di tutti i possibili esiti è rappresentato da Ω e su tale spazio campionario è possibile specificare alcuni insiemi di risultati, indicati con F che rappresentano gli eventi ottenibili da operazioni di unione e intersezione tra i sottoinsiemi dello spazio campionario Ω. Infine P denota la misura di probabilità di F; si tratta di una funzione che lega ciascun sottoinsieme di Ω a un numero reale non negativo compreso tra zero e uno e la somma della probabilità associata a ogni evento è pari a 1.

A questa impostazione possono essere legati diversi problemi finanziari. Si potrebbe immaginare un investitore che acquisti azioni di una società, oppure una compagnia assicurativa che stipuli una polizza o semplicemente un individuo che scelga di convertire il tasso del mutuo da fisso a variabile. Tutte queste scelte sono rischiose perchè denotano l'incertezza del valore che assumeranno nel futuro, ovvero quale sarà il prezzo del titolo, se si verificherà l'evento tale da

determinare il pagamento da parte dell'assicurazione e quali saranno gli importi da versare in base al nuovo accordo del mutuo.

Ognuna di queste situazioni può essere qualificata da una *variabile casuale* dove ciascuna posizione rischiosa X è una funzione dello spazio di probabilità (Ω, F, P). La misura di rischio di una generica posizione X è associata alla sua funzione di ripartizione $F_X(x) = P(X \leq x)$ che indica la probabilità che alla fine del periodo considerato il valore di X sia minore o uguale a un certo valore x.

Tuttavia i processi economici studiati sono dinamici, quindi legati alla componente temporale. La variabile temporale assume un ruolo fondamentale nella spiegazione del fenomeno e il passato diventa utile per interpretare, almeno in parte, il presente. Si introducono così i *processi stocastici* definiti come «una sequenza di variabili aleatorie $\{X_t, t \in T\}$ indicizzate da un parametro $t \in T$ e definite nello spazio di probabilità $(\Omega, F, P(\cdot))$».[1] L'indice temporale t fa parte all'insieme T che può essere sia discreto che contiunuo.

1.3 Risk Management

Per le istituzioni finanziarie nello svolgere la propria attività caratteristica è fondamentale avvalersi di adeguati sistemi di gestione del rischio, per saper sempre che posizione assumere dinanzi a situazioni sfavorevoli non previste. Si delinea così l'esigenza di adottare un opportuno sistema di *risk management* definito come «*a discipline for living with the possibility that future events may cause adverse effects*».[2]

È risaputo che un corretto sistema di gestione del rischio può incrementare il valore di una qualsiasi impresa e di conseguenza anche il valore per i propri *shareholders*. Ecco perchè anche le grandi società commerciali che operano su scala mondiale soggette alle fluttuazioni dei cambi e alla volatilità dei tassi

[1] Cappuccio Orsi, 2005.
[2] McNeil, Frey, Embrechts, 2005.

di interesse, quindi non solo gli istituti finanziari soggetti a regole di vigilanza, investono in strutture di *risk management*.

L'evoluzione dell'industria del *risk management* è da imputare soprattutto alla necessità di disporre di valide metodologie per il *pricing* degli strumenti derivati e per valutare coperture attraverso questi strumenti. Gli avvenimenti degli ultimi decenni dimostrano che perdite consistenti sono state subite proporio a causa di un uso non appropriato di questi prodotti, associato soprattutto ad una carente gestione interna. La rivista *Fortune* in una copertina definì i derivati «*lurking alligators, presumably ready to bite you*» e il ricco investitore Warrent Buffet in una sua dichiarazione li qualificò come «*financial weapons of mass distruction*»[3].

Tuttavia le perdite che i mercati hanno subito nell'arco degli anni '90 rappresentano solo il 3% del valore totale degli strumenti derivati contrattati e solo l'1% del valore totale del mercato. Dunque i derivati hanno un duplice aspetto, sono sicuramente necessari per costruire efficenti portafogli e massimizzare il loro rendimento ma d'altro canto sono rapidi nell'accumulare considerevoli perdite catastrofiche.

1.3.1 L'instabilità come unica certezza

La finanza internazionale è stata profondamente rinnovata nel 1973, data importante sia per la prima pubblicazione della formula Black-Scholes-Merton per la determinazione del prezzo di un opzione call di tipo europeo, che per l'apertura della principale borsa per la negoziazione di opzioni, la Chicago Options Exchange[4]. Le innovazioni accademiche e gli sviluppi tecnologici sono requisiti imprescindibili in questo settore, in particolare dall'abolizione degli accordi di

[3]Jorion, 2007.
[4]CBOE, `http://www.cboe.com`.

Bretton Woods[5] nel 1971, che stabilirono la fine del sistema dei cambi fissi, la volatilità dei mercati valutari aumentò significativamente decretando la necessità di rinnovare i modelli utilizzati.

L'imprevedibilità degli avvenimenti che hanno caratterizzato i mercati globali dal 1970 ad oggi può essre illustrata ricordando alcuni tra gli episodi meno attesi:

- La crisi petrolifera del 1973 seguita da elevati tassi di inflazione e da fluttuazioni dei tassi di interesse.
- Il 19 Ottobre 1987, il cosiddetto lunedì nero nel quale la borsa statunitense perse quasi il 23% bruciando circa un trilione di Dollari.
- La bolla finanziaria scoppiata in Giappone nel 1989.
- Il crollo del mercato dei *bond* americani nel 1994, quando la Federal Reserve dopo aver tenuto per tre anni i tassi di interesse bassi iniziò una serie di innalzamenti.
- La crisi asiatica del 1997 causata da pesanti speculazioni finanziarie che determinarono la svalutazione della moneta locale facendo perdere a Indonesia, Malesia, Korea e Thailandia circa tre quarti del valore della capitalizzazione azionaria in Dollari.
- Il default russo del 1998 che provocò il fallimento dell'importante *hedge fund* Long Term Capital Management.
- L'attacco terroristico dell'11 Settembre 2001 che distrusse il Word Trade Center nel cuore del *financial district* di New York costringendo alla chiusura dei mercati finanziari per ben sei giorni; oltre alla considerevole per-

[5] Accordo sottoscritto nel 1944 da 44 paesi volto a tracciare un nuovo sistema monetario e valutario internazionale basato su un regime di tassi di cambio fissi, in particolare tutti i paesi, eccetto gli Stati Uniti, si impegnarono ad agganciare il prezzo delle valute nazionali al Dollaro. Sempre con lo stesso accordo venne istituito il Fondo monetario internazionale FMI e la Banca internazionale per la ricostruzione e lo sviluppo (Banca mondiale), ad oggi ancora esistenti ma con ruoli profondamente cambiati.

dita in vite umane decretò la perdita di 1.7 trillioni di Dollari del mercato azionario statunitense.

- Il crollo dei mutui *subprime* nel 2007 portando al fallimento di Lehman nel 2008, alla crisi di Bear Stearn e all'ingente salvataggio da parte della Federal Reserve dell'American International Group.

- La recessione dell'Eurozona che dal 2011, facendo leva sulle debolezze della Grecia e altri Paesi, mette a rischio l'intera unione monetaria, come dimostrato dal cedimento dell'Euro nei confronti del Dollaro e dai crescenti rendimenti richiesti nel mercato obbligazionario e in quello dei Credit Default Swaps.[6]

Per illustrare come sono cambiati i mercati negli ultimi 40 anni e come si sia evoluta l'instabilità negli ultimi 15 anni vengono proposti alcuni grafici.

La figura 1.1 rappresenta il valore del mercato azionario statunitense attraverso l'indice S&P 500 dal 1970 ad oggi, mentre nella parte inferiore del grafico è disegnata la serie storica dei rendimenti. Si nota con facilità che tra gli anni '70 e '80 il valore del mercato azionario è rimasto pressoché stabile fino al crollo del 1989 per poi registrare un boom della borsa dalla seconda metà degli anni novanta. Dal 2001 ad oggi l'instabilità del mercato è molto evidente, in particolare lo scoppio della bolla della new economy nel 2000 che ha giustficato la diminuzione del costo del denaro riducendo i tassi dal 7% all'1% tra il 2000 e il 2004. Il 2007 poi segna la crisi dei mutui *subprime* causata dal periodo di eccesso di liquidità durante il quale erano stati concessi mutui per l'acquisto di abitazioni a soggetti che non erano in grado di onorare il prestito e le insolvenze che via via si accumularono fecero crollare di nuovo il mercato statunitense.

[6]Fonte: Diebold, Doherty e Herring, 2011 e Borsa Italiana `http://www.borsaitaliana.it`.

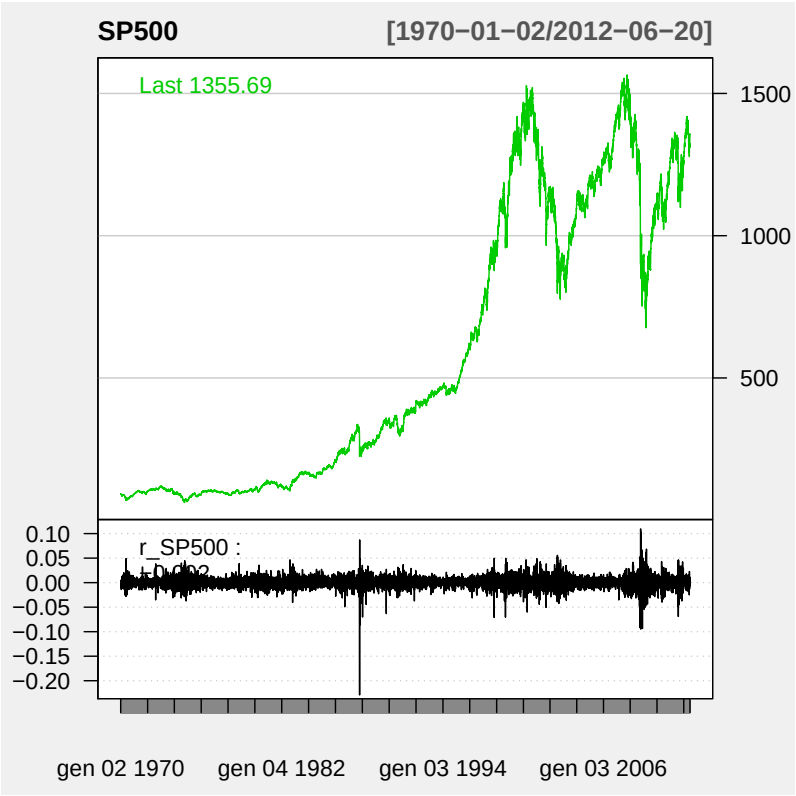

Figura 1.1: Andamento del mercato azionario statunitense, Fonte: ''FED''

Nella figura 1.2 è illustrato il cambio Euro Dollaro dal 1999, data in cui la moneta unica è stata quotata per la prima volta, ad oggi. L'andamento è abbastanza erratico e inzialmente quando l'Euro era scambiato solo nel mercato valutario aveva perso molto potere rispetto al Dollaro. Dal 2001, anno importante perché segna l'inizio di un periodo negativo per l'economia Usa, anche a causa dell'offensiva contro l'Afghanistan, il trend è cambiato. Monete e banconote dell'Euro sono entrate in circolazione tra gli europei l'1 gennaio 2002, la spinta è stata positiva e nello stesso anno è stata riagganciata la parità con il Dollaro. Tuttavia anche la politica della Federal Reserve di mantenere bassi i tassi di interesse ha favorito la corsa dell'Euro che nel 2004 raggiunse quota 1,36\$/€. Il record storico dell'Euro risale al luglio 2008 quando gli Usa erano travolti dalla crisi dei mutui *subprime*. L'incertezza economica presto si è trasmessa anche in Europa determinando elevata variabilità nel tasso cambio, come nelle altre variabili

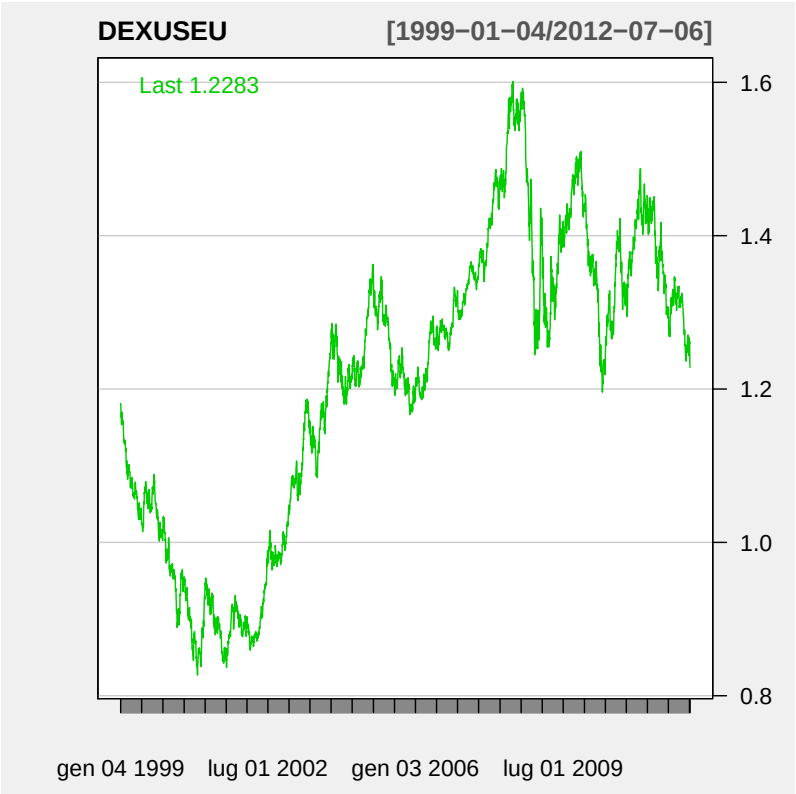

Figura 1.2: Cambio Euro/Dollaro, Fonte: ''FED''

economico-finanziarie, e ad oggi in piena crisi dell'Eurozona, il suo trend è al ribasso, almeno nel breve termine.

1.3.2 Measurement, prima introduzione al VaR

Dotarsi di una valida misura di rischio è una condizione imprescindibile e l'analsi moderna dispone di numerosi approcci.

Nella teoria di portafoglio formulata da Markovitz (1959) il rischio inteso come dispersione dal valore medio, è un concetto simmetrico rappresentato dalla deviazione standard, secondo il modello di equilibrio dei mercati finanziari sviluppato da Sharpe (1963) e noto come *Capital Asset Pricing Model* CAPM si introduce la stima del coefficiente beta dei titoli azionari come indicatore del grado di rischio sistemico, ovvero quanto il rendimento di un titolo azionario dipenda da quello raggiunto complessivamente dal mercato. Infine per descrivere i di-

versi aspetti di un portafoglio di derivati assumono rilievo le ''Greche'', ognuna delle quali considera una diversa dimensione di rischio con lo scopo di misurare la sensibilità del valore del derivato in base allo *strike price*, al prezzo di mercato, alla vita residua del contratto, al tasso di interesse a breve e alla volatilità dell'*underlying asset*.

Nessuno di questi criteri però fornisce una stima del rischio complessivo cui un'istituzione è sottoposta. La soluzione comunemente accettata è quella di effettuare una stima della distribuzione dei possibili cambiamenti che il valore di tutte le posizioni potrebbe subire, avvalendosi dei dati storici per specificare il modello da utilizzare.

Immaginando di detenere un portafoglio composto da d *asset*, ciascuno con il rispettivo peso $w_1, ..., w_d$, con $w_i \in \mathbb{R}$ e $\sum_{i=1}^{d} w_i = 1$; si assume che le variazioni di valore che il portafoglio potrebbe subire nell'arco di un certo intervallo di tempo possono essere illustrate dalla distriuzione $X = \sum_{i=1}^{d} w_i X_i$ comunemente chiamata *profit and loss distribution* P&L, dove X_i rappresenta l'alterazione del valore dell'investimento i-esimo. Di conseguenza misurare il rischio di questo portafoglio significa determinare la sua funzione di ripartizione $F_X(x) = P(X \leq x)$.

Il raggiungimento di questo obiettivo è subordinato dall'individuazione di un opportuno modello per il vettore casuale $(X_1, ..., X_d)$ degli investimenti e tuttavia, come verrà illustrato in seguito, i modelli finora elaborati non consentono di individuare una soluzione unica a questo problema.

Notevole contributo allo sviluppo di queste tecniche deriva dalle istituzioni finanziarie che hanno reso disponibili i propri schemi di calcolo. J.P. Morgan nel 1995 è stata la prima a divulgare il proprio modello VaR, denominato *RiskMetrics* o ''modello 4.15'', dall'idea dell'allora presidente della banca Dennis Weatherstone di «ricevere ogni giorno alle 16.15 un'informazione sintetica, racchiusa in un singolo valore monetario, relativa ai rischi di mercato dell'intera banca nei diver-

si segmenti di mercato (azionario, obbligazionario, valute, derivati, *commodity*, *emerging market* ecc.) e nelle diverse aree geografiche di operatività»[7].

La soluzione fornita dai modelli VaR è quantificare il valore della massima perdita che si potrebbe registrare in un determinato orizzonte temporale ad un certo livello di probabilità in base ai cambiamenti delle variabili di mercato sottostanti. Si definisce quindi il VaR come la stima probabilistica della massima perdita che un portafoglio, o una posizione, potrebbero registrare durante un determinato orizzonte temporale e in corrispondenza ad un certo livello di confidenza. Definendo π il livello di confidenza e L la perdita analiticamente si ottiene:

$$Pr(L > VaR) = 1 - \pi \tag{1.1}$$

Questi metodi di calcolo sono largamente utilizzati sia dalla contabilità finanziaria delle grandi società, sia dai *fund managers* così come dalle istituzioni finanziarie e dalle autorità di vigilanza come strumento per determinare il capitale minimo richiesto a fronte dei rischi assunti.

A questo scopo, l'espressione per calcolo del VaR può essere così riformulata:

$$Pr(\Delta P_{\Delta t} \leq VaR) = \pi \tag{1.2}$$

dove $\Delta P_{\Delta t}$ rappresenta i cambiamenti del valore di mercato del portafoglio P durante l'orizzonte temporale Δt con probabilità π. Questa equazione indica che una perdita di valore pari o superiore rispetto al VaR si verifica con una probabilità pari a π, o al contrario, con una probabilità pari a π è possbile subire perdite uguali o maggiori rispetto al VaR.

Secondo quest'ultima interpretazione il VaR è determinato in funzione del livello di confidenza π, quindi data $F(\Delta P_{\Delta t})$ la funzione di ripartizione $\Delta P_{\Delta t}$ allora:

$$F^{-1}(\pi) = VaR \tag{1.3}$$

[7] Sironi, 2005.

dove con F^{-1} si indica l'inversa di $F(\cdot)$.

Una delle principali difficoltà nell'utilizzo del VaR è la specfificazione della funzione di ripartizione $F(\cdot)$ che nei metodi comuni, come l'*approccio varianze-covarianze*, viene approssimata alla distribuzione normale anche se è noto che le caratteristiche dei rendimenti dei fattori di mercato sono frequentemente difformi dalla gaussiana, in particolar modo nell'eventualità di valori estremi.

Una possibile soluzione a questo problema è rappresentata dall'utilizzo dei *modelli di simulazione* che non richiedono alcuna stima dei parametri della distribuzione dei rendimenti dei fattori di mercato, anche se come sarà illustrato nel Capitolo 2 presentano alcune problematiche.

Tuttavia nell'ambito accademico a partire dagli anni Novanta è stato accolto un nuovo approccio di calcolo basato sulla teoria dei valori estremi: l'*Extreme Value Theory*. I sostenitori di questa teoria partono dalla premessa che un *risk manager* deve concentrarsi sui valori estremi della distribuzione dei profitti e delle perdite che sono collocati proprio sulle code di quest'ultima.

1.4 I Rischi Finanziari

Complessivamente i rischi cui è soggetta l'industria finanziaria sono rappresentati da quattro ampie categorie: rischio di mercato, rischio di credito, rischio operativio e rischio di liquidità. Di seguito si procederà ad una singola trattazione per ciascuna categoria consiederando anche le eventuali interazioni dato che il loro limite di pertinenza non sempre risulta di facile individuazione.

1.4.1 Rischio di mercato

Le banche quando effettuano attività di investimento e di negoziazione in valori mobiliari, assumono posizioni esposte alla volatilità dei prezzi delle attività oggetto di contrattazione che potrebbero trasformarsi in perdite e compromettere l'attività bancaria.

Il rischio di mercato viene controllato attraverso l'imposizioni di limiti sul capitale e sulle esposizioni, attraverso specifiche misure del *VaR* condotte dal *risk manager*. In particolare il rischio di mercato sarà l'oggetto principale di questo elaborato.

Questa importante categoria fa riferimento ai cambiamenti di valore che uno strumento finanziario, o un portafoglio, potrebbero subire a causa di alterazioni inattese delle variabili di mercato, ovvero dei prezzi azionari, dei tassi di cambio, dei tassi di interesse e della volatilità di tali variabili.

La valutazione può avvenire in termini di *absolute risk*, che porta a una misura monetaria (espressa in termini di valuta), oppure come *relative risk*, misurato rispetto a un *benchmark* di riferimento. Mentre il primo mira a concentrare l'attenzione sulla volatilità del *total return*, l'altro valuta il rischio in termini di *tracking error*, o deviazione dall'indice.

Il rischio di mercato può essere classificato in *directional* e *non-directional risk*. *Directional risk* riguarda le esposizioni lineari che dipendono direttamente dall'andamento dei movimenti delle variabil di mercato come i prezzi azionari, i tassi di interesse, i tassi di cambio e i prezzi delle *commodity*. *Non-directional risk* comprende il resto dei rischi non menzionati, che consistono nelle esposizioni non lineari, quindi contratti di opzione, *hedge position* o *volatilities*.

I rischi di mercato hanno assunto un ruolo molto importante nel corso dell'ultimo ventennio, in particolare i due fenomeni di seguito presentati hanno modificato profondamente i mercati finanziari internazionali facendone aumentare l'importanza.

A partire dagli anni Novanta si è assistito ad un crescente ricorso al processo *securitization* da parte dell'industria bancaria con lo scopo di trasformare prestiti e mutui illiquidi nel breve periodo in attività dotate di un mercato secondario liquido. La crisi sfociata in USA nell'estate 2007 ha però dimostrato che gli intermediari avevano cercato più che altro di liberarsi di una considerevole entità di

rischi. Infatti i crediti erogati erano stati approvati considerando più la possibilità di trasferirli nel mercato secondario che il merito di credito del mutuatario. Le gravi conseguenze sono state di entità globale e hanno richiamato le autorità ad un maggior impegno per quanto concerne il controllo dell'intermediazione creditizia.

Anno	Strumento
1972	Foreign currency futures
1973	Equity options
1975	Treasury bond futures
1981	Currency swap
	Eurodollar futures
1982	Interest-rate swaps
	Equity index futures
1983	Options on equity index
	Interest-rate caps and floors
1985	Swaptions
1987	Compound options
	Average options
1989	Quanto options
1990	Equity index swaps
1991	Differential swaps
1994	Credit default swaps
1996	Electricity futures
1997	Weather derivatives
2001	Single-stock futures
2004	Volatility index futures

Tabella 1.1: Evoluzione del mercato dei derivati
Fonte: Jorion, 2007

Tuttavia anche il crescente utilizzo degli strumenti derivati, connessi al rischio di variazioni che possono subire i fattori di mercato sottostanti o le condizioni di volatitilità di questi, portano ad un aumento dei rischi in capo agli intermediari finanziari che ne fanno ricorso. Particolarmente rischioso è l'utilizzo di derivati negoziati *over-the-counter* poiché incorporano anche il rischio di credito associato a possibili inadempimenti imputabili alla controparte. Strumenti sempre più sofisticati sono stati sviluppati nel corso degli ultimi anni per soddisfare le sva-

riate esigenze dei clienti per coprire i rischi più specifici, come dimostrato dalla tabella 1.1.

1.4.2 Rischio di credito

Il rischio di credito si riferisce alla possibilità che una controparte, nei confronti della quale esiste un'esposizione, risulti indisposta o incapace ad adempiere alle proprie obbligazioni generando così una variazione inattesa del valore di mercato della posizione creditoria.

La definizione così formulta racchiude in sé tre concetti implciti che meritano di essere chiariti. Innanzitutto il rischio di credito non riguarda esclusivamente l'insolvenza della controparte, ma considera anche il semplice deterioramento del merito creditizio, giugendo così alla scomposizione in *rischio di insolvenza* e in *rischio di migrazione*. Il primo si riferisce alla perdita derivante dall'inadempimento degli obblighi previsti a carico del debitore, mentre il secondo si riferisce al peggioramento del profilo di rischio della posizione alla quale il mercato accolla un innalzamento dello *spread* richiesto. Per cogliere appieno questi due aspetti una misura di rischio adeguata non dovrebbe limitarsi a una distribuzione binomiale dei possibili eventi (insolvenza o non insolvenza) ma dovrebbe far riferimento a una distribuzione continua o discreta che consideri gradualmente, in base a diversi livelli di probabilità, la possibilità che l'evento estremo di morosità si manifesti.

Il successivo elemento da discutere riguarda l'inaspettato deterioramento della posizione. Infatti nelle fasi precedenti la concessione di credito la banca deve fare valutazioni riguardo le prospettive di evoluzione economico-finanziarie dell'affidato e il rischio di credito si riferisce all'eventualità che in futuro queste si dimostrino errate determinando ritardi nei pagamenti degli interessi o nel mancato o parziale rimborso del capitale.

L'ultimo aspetto da considerare riguarda la dilatazione del concetto di rischio

di credito. Esso non si limita alle sole posizioni in impieghi in titoli e in prestiti inculsi nel bilancio ma, come richiesto dalle autorità di vigilanza per quanto concerne la determinazione dei requisiti patrimoniali a fronte dei rischi di credito, inculde anche ''le posizioni fuori bilancio, come quelle rappresentate dagli strumenti derivati contrattati in mercati *over-the-counter* (rischio di sostituzione o di pre-regolamento) e dal regolamento di transazioni nazionali e internazionali in titoli, in valute o in strumenti finanziari derivati (rischio di regolamento)''[8]. In questa sede va effettuata una pecisazione sui criteri che le istituzioni finanziarie utilizzano per classificare i rischi cui sono sottoposte. Esse fanno riferimento ai fattori causali che determinano il relativo rischio, con la conseguenza che nella categoria dei rischi di credito rientrano anche i rischi di variazione dei prezzi dei titoli obbligazionari che l'autorità di vigilanza considera come rischio specifico all'interno della categoria dei rischi di mercato. Infatti, le variazioni dei prezzi dei titoli di debito sono causate da fattori relativi alle caratteristiche dell'emittente, come il deterioramento del merito creditizio, quindi è evidente che il rischio di tali variazioni dovrebbe essere classificato come rischio reddito.

1.4.3 Rischio operativo

Questa configurazione di rischio ha assunto importanza sia da parte dell'industria finanziaria sia da parte delle autorità di vigilanza solo recentemente, in particolare dalla fine degli anni Novanta. Ciò che ha scatenato l'insorgere di una crescente attenzione verso questa visone del rischio è riconducibile all'elevato ricorso da parte del settore a sofisticati sistemi informatici e gestionali e alla crescita del commercio elettronico. Tutto ciò espone le banche all'eventualità di subire perdite a causa di errori da parte degli operatori nell'immettere informazioni errate o distorte o in seguito a frodi volte a minare la sicurezza dei sistemi

[8] Sironi, 2005.

stessi. Anche l'aumento delle operazioni di fusione e acquisizione potrebbero compromettere un'adeguata integrazione dei sistemi interni.

La definizione di rischio operativo formulata dal Comitato di Basilea in un documento specifico del settembre 2001 è la seguente «*The risk of loss resulting from inadequate or failed internal processes, people and systems or from external events*».[9] Ciò che maggiormente deve esser messo in rilievo è l'esplicita considerazione dei rischi esterni come fattori determinanti di perdite e questa definizione, come precisato dal Comitato di Basilea, include il rischio legale ma esclude il rischio reputazionale, strategico e sistemico.

I fattori causali insiti in questa categoria di rischio riguadano quindi la possibilità che i sistemi interni risultino inadeguati e si commettano degli errori di programmazione nelle applicazioni o si verifichino interruzioni delle reti informatiche, causando sia una perdita di informazioni rilevanti sia il mancato rispetto di adempimenti contrattuali.

Diventa perciò evidente la connessione tra il rischio operativo con il rischio di mercato e di credito perché ad esempio un problema operativo in una contrattazione potrebbe generare un *settlment fail* e quindi rischio di mercato. Anche gli errori, le frodi o le violazioni di regole e procedure interne da parte del personale possono causare perdite considerevoli, basti pensare a un *trader* che falsifichi la propria posizione dopo aver accumulato una grossa perdita di mercato. Un esempio è rappresentato dalla crisi del 1995 della banca britannica Bearings, causata dal *trader* Nick Lesson che attraverso la costruzione di appositi conti interni aveva nascosto per lungo tempo ingenti perdite registrate sul mercato dei derivati dell'indice Nikkei della borsa di Tokyo.

Anche i fattori esterni che non possono essere controllati dalla banca devono essere presi in considerazione. Si tratta della possibilità di subire atti di terrorismo o di vandalismo, eventi politici o militari, cambiamenti sfavorevoli nel

[9] Basilea, 2001.

contesto politico-fiscale ed eventi naturali come terremoti, inondazioni o incendi.

Infine va considerato il rischio legale che comprende l'eventualità di registrare multe o penalità derivanti sia da controlli delle autorità di vigilanza sia da azioni legali svolte da privati. In quest'ultima ottica è facile comprendere come le parti che subiscano un danno in una transazione, come nel caso di operazioni non andate a buon fine condotte dalla banca, potrebbero richiedre in via giurisdizionale l'annullamento dell'operazione.

Tuttavia il rischio operativo si caratterizza rispetto alle due precedenti catergorie (rischio di mercato e rischio di credito) dalla limitata presenza sul mercato di strumenti per la sua copertura che consentano di prezzarlo e trasferirlo ad altri soggetti. Si tratta di una conseguenza dei problemi relativi alla sua misurazione poiché la disponibilità di dati è scarsa e le conseguenze di eventi molto dannosi sono di complessa quantificazione[10].

Non sempre i confini tra le categorie di rischio qui esposte sono ben definiti, infatti ci sono alcuni autori[11] che fanno rientrare nel rischio operativo anche il cosiddetto *model risk*, che si incorre quando i modelli scelti per valutare alcuni strumenti non sono adatti a quel determinato profilo di rischio. Basti pensare all'uso del modello Black-Scholes-Merton per il *pricing* di un opzione esotica, quando in realtà le assunzioni base del modello vengono violate in principio.

1.4.4 Rischio di liquidità

Di solito il rischio di liquidità viene trattato separatamente rispetto agli altri rischi qui considerati ma viene qui incluso data l'importanza delle recenti promulgazioni del Comitato di Basilea[12] di prevedere una solida base di liquidità inserendo standard armonizzati per ciascuna delle diverse giurisdizioni a livello internazionale. I coefficienti di liquidità introdotti sono volti a stabilire livelli minimi e

[10] Sironi, 2005.
[11] Jorion, 2007.
[12] Contenute nello schema di regolamentazione Basilea 3.

a promuovere condizioni di parità concorrenziale per evitare una sorta di ''gara'' verso standard meno prudenziali.

Il rischio di liquidità assume due forme, conosciute come *asset-liquidity risk* e *funding liquidity risk*. Il primo, chiamato anche *market/product-liquidity risk* si riscontra quando una transazione non può essere condotta in base ai comuni prezzi di mercato a causa dell'ampiezza della posizione rispetto alle consuete contrattazioni eseguite. Questo rischio è funzione delle condizioni prevalenti sul mercato e varia a seconda delle diverse *asset class* e in base alla variabile temporale. Alcune attività finanziarie come le principali valute o i Titoli di Stato di maggior rilievo, possono fare affidamento su un mercato molto profondo che consente di liquidare con facilità le posizioni senza incorrere in effetti indesiderati sul prezzo. Tuttavia se si considerano contrattazioni ad oggetto derivati esotici negoziati *over-the-counter* o azioni relative ai paesi emergenti i prezzi potrebbero subire conseguenze negative, che potrebbero peggiorare ulteriormente in base all'ampiezza della posizione. Per poter arginare questo rischio le istituzioni finanziarie devono imporre dei limiti per quanto riguarda le posizioni assumibili in certi mercati o prodotti ed attuare una adeguata diversificazione. Il rischio di liquidità può essere calcolato in modo approssimativo attraverso una misura VaR, avendo cura però di accertarsi che l'orizzonte temporale considerato per la misura non sia minore del perodo necessario per la liquidazione della posizione.

Il *funding liquidity risk*, conosciuto anche come *cash-flow risk*, si riferisce al rischio di inadempimento degli impegni di pagamento: le cause sono riferibili alla impossibilità di reperire fondi cui consegue la necessità di dover liquidare parte delle attività o all'impossibilità di ottenere una proroga dei termini. Diventa perciò evidente l'influenza reciproca tra il *cash flow risk* con il *product-liquidity risk* allor quando diventa indispensabile smobilizzare attività a condizioni one-

rose; questo problema riguarda in particolare i portafogli *levered*[13] soggetti ai *margin calls* dei prestatori. Va prestata molta attenzione sia in relazione al *funding* che alla valutazione del *costo del funding* in termini di perdita da smobilizzo derivabile dalle attività necessarie per fronteggiare l'inadempimento. Recentemente questo problema è stato di notevole interesse per le banche di maggiori dimensioni a causa della instabilità di molti strumenti fianziari come le opzioni, gli ABS[14] o gli *hedge fund*.

Non è facile governare questo rischio, ma un istituzione finaziaria dovrebbe essere in grado di pianificare i propri impegni di cassa, tenendo costantement controllata la situazione imponendo limiti nel *cash-flow gap* e attuando una buona diversificazione delle proprie attività.

1.4.5 Il rischio nelle compagnie assicurative

Oltre al settore bancario anche l'industria assicurativa deve dotarsi di un sistema di valutazione dei rischi e di un adeguato patrimonio. Essi sono necessari per mantenere la solvibilità dell'istituto nel lungo periodo e per poter onorare l'impegno del risarcimento nei confronti dell'assicurato qualora l'evento dannoso si verifichi nell'arco di tempo coperto.

Anche le compagnie assicurative hanno una certa responsabilità sociale nei confronti del pubblico e una situazione di crisi di sovlibilità porterebbe a una sfiducia generale determinando flessioni negative nelle polizze stipulate. Il ruolo delle assicurazioni nel fornire soluzioni a possibili problemi finanziari futuri è legato da come il *risk management* e l'*asset and liabilities management* valu-

[13] Si tratta di portafogli che includono titoli acquistati prendendo denaro a prestito, il profilo di rischio è elevato perché se gli investimenti si trasformano in perdite l'investitore potrebbe non riuscire a rimborsare il capitale preso in prestito. Anche se, nell'eventualità che gli investimenti effettuati realizzino un guadagno, l'investitore potrebbe contare su un profitto ottenuto senza l'uso di denaro proprio.

[14] Asset-backed security, ovvero strumenti finanziari originati da operazioni di cartolarizzazione di crediti, quindi una banca che non vuole attendere fino alla scadenza il rimborso di un prestito può ''impacchettarlo" in obbligazioni e venderlo a un fondo o a un privato. In genere i prestiti che più si adattano per queste operazioni sono i mutui immobiliari o i prestiti per l'acquisto di automobili o i crediti legati all'uso di carte di credito.

tano gli eventi passati, stimano il rischio attualmente coinvolto e ipotizzano un modello sugli eventi futuri.

Le istituzioni assicurative devono sopportare un ulteriore rischio, indicato come *underwriting risk*, che riguarda i cambiamenti che possono subire le condizioni ambientali, causando catastrofi naturali, oppure le modifiche demografiche della popolazione che vanno ad influire le tavole attuariali o alterazioni nel comportamento dei consumatori.

1.5 Regolamentazione

L'imposizione di regole al settore finanziario non appartiene a una recente prassi del sistema, ma ha origine a partire dal XVIII secolo quando le primitive regole, seppur locali, furono promulgate a favore delle prime banche veneziane o delle nascenti compagnie assicurative londinesi.

La regolamentazione nei confronti del settore bancario ha assunto dimensioni più consistenti solo a partire dalla fine del 1974 quando i Governatori delle banche centrali del G10 istituirono il Comitato di Basilea[15] con lo scopo di cooperare nel campo della viglianza sull'attività bancaria internazionale. Il comitato non gode di alcuna autorità sopranazionale, di conseguenza proposte, raccomandazioni o conclusioni non possiedono alcun valore legale. Il Comitato si propone di indicare linee guida, standard e raccomandazioni e di formulare proposte auspicandosi che vengano recepite dalle autorità di vigilanza di ciascuna nazione.

Il sistema di vigilanza volto a garantire la solvibilità delle compagnie assicurative a livello europeo è stato tracciato a partire anni '70 dalla prima generazione di direttive assicurative[16] ed è stato successivamente implementato negli anni

[15] Attualmente i paesi rappresentati sono: Belgio, Canada, Francia, Germania, Giappone, Gran Bretagna, Italia, Lussemburgo, Paesi Bassi, Spagna (dal 2001), Stati Uniti, Svezia e Svizzera.

[16] Direttiva 73/239/CEE e Direttiva 79/267/CEE.

'90 dalle direttive di terza generazione[17] che imposero una armonizzazione delle norme.

A partire dalla metà degli anni '80, in Europa e nel resto dei paesi industrializzati, si è sviluppato un processo di concentrazione tra l'industria bancaria, assicurativa e dei sevizi mobiliari, dando origine a dei gruppi con lo scopo di offrire servizi diversificati, accedere a nuovi mercati e sperimentare politiche di *cross-selling*. Via via che strutture organizzative sempre più complesse e integrate vennero predisposte si delineò il *conglomerato finanziaro*, cioè un organo «nell'ambito del quale un certo numero di unità separate svolgono attività finanziarie non omogenee tra le diverse attuabili: bancaria, d'intermediazione mobiliare e assicurative»[18].

Contestualmente è nata anche l'esigenza di favorire lo scambio di informazioni e la cooperazione nell'attività di vigilanza sui conglomerati finanziari, così a partire dal 1996 è stato istituito il Joint Forum on Financial Conglomerates, sotto il supporto del Comitato di Basilea, dell'International Organisation of Securities Commissions (IOSCO) e dell'International Association of Insurance Supervisors (IAIS).

1.5.1 I Requisiti patrimoniali delle banche

1.5.1.1 Il primo accordo sul capitale: Basilea I

Il primo disegno normativo proposto in tema di adeguatezza patrimoniale delle banche risale al luglio del 1988 con il proposito di far recepire alle autorità di vigilanza delle rispettive nazioni l'imposizione di coefficienti minimi di patrimonializzazione.

I motivi che hanno spinto alla formulazione dell'accordo partono dall'evidenza della progressiva diminuzione del grado di capitalizzazione dei principali si-

[17] Direttiva 92/49/CEE e Direttiva 92/96/CEE.
[18] Cappiello, 2008.

stemi bancari[19]. Si temeva infatti che l'indebolimento del rapporto tra i mezzi propri e il totale dell'attivo avrebbe provocato una crisi di solvibilità sia delle banche nazionali che delle istituzioni controllate da gruppi bancari esteri.

Lo schema elaborato si basa su un indice di capitalizzazione di tipo *risk asset ratio* disposto in misura pari all'8% derivante dal rapporto tra il patrimonio di vigilanza e la somma delle attività ponderate per il rischio.

L'accordo prevedeva un sistema di ponderazioni per assegnare pesi più elevati alle attività ritenute maggiormente rischiose imponendo così una dotazione superiore di capitale. La ponderazione avveniva distinguendo le attività in quattro categorie di fattori di ponderazione (0%, 20%, 50% e 100%). I criteri per distinguere le varie poste erano dati in base al grado di liquidità (cassa, titoli, prestiti), alla natura dei debitori (governi centrali, banche, imprese, enti sovranazionali) e all'area geografica di residenza (paesi appartenenti o meno all'area OCSE[20]). Il sistema era tale che ad esempio a fronte di un prestito verso un'impresa il requisito patrimoniale era cinque volte superiore rispetto a un prestito verso una banca dell'area OCSE.

I limiti di un tale schema erano numerosi. In particolare, l'accordo si concentrava troppo sul rischio di credito e considerava solo l'eventualità dell'insolvenza del mutuatario per assegnare il grado di ponderazione a ciascuna controparte nella valutazione del rischio delle singole poste in bilancio e fuori bilancio.

Una considerevole lacuna riguardava la mancata considerazione dei rischi connessi ai contratti derivati, quindi legati a fattori di mercato come i tassi di interesse o i tassi di cambio, anche se la loro importanza era già risaltata dalle crisi bancarie del 1974 e dalla crisi delle Savings&Loans statunitensi.

Infine veniva data scarsa attenzione al diverso grado di rischio delle attività sia in relazione al *rating*, infatti un impresa con *rating* AAA era soggetta al me-

[19]Sironi, 2005.
[20]Organizzazione per la Cooperazione e lo Sviluppo Economico.

desimo requisito patrimoniale di un'impresa con *rating* B, sia in relazione alla vita residua, poiché la rischiosità di un'esposizione ha una relazione diretta con la vita residua del titolo. Nemmeno la diversificazione di portafoglio di posizioni creditizie veniva considerata e le modalità di calcolo disposte per le operazioni di *hedging* e per i *credit derivative* erano ritenute insoddisfacenti.

Il sistema così delineato ha altresì favorito, per le banche dotate di avanzata esperienza nel campo, lo sviluppo di operazioni di arbitraggio regolamentare con l'obiettivo di sostituire esposizioni di elevata qualità con esposizioni di qualità inferiore che presentano lo stesso vincolo patrimoniale ma una reddittività attesa superiore. Infatti le grandi banche intrnazionali reagirono, ad esempio aumentando le loro esposizioni creditizie verso i mutui all'edilizia commerciale (caratterizzate da un requisito patrimoniale inferiore rispetto all'assoribimento di capitale) oppure cedendo a terzi, mediante operazioni di cartolarizzazioni, le esposizioni creditizie meno rischiose, caratterizzate quindi da un requisito patrimoniale superiore rispetto al rischio effettivo.

1.5.1.2 Revisione del primo accordo: introduzione di requisiti patrimoniali per i rischi di mercato

Modelli evoluti per la valutazione delle variabili di mercato sono diventati necessari a causa dell'espandersi dell'attività di negoziazione in prodotti derivati, della crescente volatilità delle variabili finanziarie e infine dal progressivo uso di processi di *securitization*. I primi passi per inserire schemi regolamentari a fronte dei rischi di mercato, sono stati compiuti sia dal Comitato di Basilea, nelle proposte avanzate nel 1993 e nel 1995, sia dalla Comunità Europea[21] motivando ulteriormente le banche all'introduzione e allo sviluppo di un adeguato sistema di *risk management*.

[21] Direttiva n.93/6/CEE.

Le critiche[22] verso le proposte del Comitato del 1993 e al supplemento del 1995, da parte soprattuto dalle maggiori banche internazionali, spinsero alla redazione dell'Emendamento del 1996 che ad oggi rappresenta la base di partenza per il calcolo dei requisiti patrimoniali a fronte dei rischi di mercato.

Lo schema predisposto dalle autorità è costituito da una metodologia basata sui modelli VaR che impone un sistema *mark to market*[23] delle posizioni e un patrimonio minimo in grado di coprire una quota significativa delle perdite che sarebbero state registrate nel corso di un qualunque periodo di detenzione di due settimane nell'arco dei cinque anni passati.

Innanzitutto va precisato che i requisiti patrimoniali per i rischi di mercato vanno applicati alle sole posizioni del *trading book*[24], che include i valori mobiliari acquisiti con scopi speculativi o per soddisfare esigenze della clientela e i contratti derivati e le altre operazioni fuori bilancio effettuate a fini di copertura dei rischi connessi ai valori mobiliari inclusi nel portafoglio di negoziazione[25]. Le posizioni devono essere quantificate in base ai prezzi di mercato.

Le posizioni valutarie e su merci vanno imputate totalmente al calcolo del requisito patrimoniale e potranno essere valutate sia al valore di mercato che al valore contabile.

La direttiva comunitaria del 1993 aveva altrsì previsto l'introduzione di requisiti relativamente al rischio di regolamento, di controparte e di concentrazione.

[22]Riguardavano il mancato riconoscimento della possibilità di utilizzare i modelli interni, la scarsa attenzione verso la diversificazione di portafoglio come fattore in grado di ridurre il rischio complessivo e la valutazione dei contratti di opzione con il solo approccio *delta-equivalent*, tralasciando i profili di rischio connessi alla non linearità (coefficiente gamma) e alla volatilità (coefficiente vega) di questi strumenti.

[23]Metodo di valutazione del valore di titoli e strumenti finanziari in base ai correnti prezzi di mercato.

[24]Portafoglio di strumenti finanziari di negoziazione di vigilanza, si contrappone al *banking book* ovvero il portafoglio prestiti bancari.

[25]Si noti che i contratti derivati negoziati per la copertura di posizioni relative al *banking book*, come gli *swaps* non vengono considerati per il calcolo del requisito patrimoniale a fronte dei rischi di mercato ma vanno assoggettati ai requisiti patrimoniali a fronte del rischio di credito. Compito delle autorità dei singoli paesi è sorvegliare che la ripartizone degli strumenti tra *banking book* e *trading book* non avvenga con pratiche elusive.

Il *rischio di regolamento* è connesso alla possibilità di insolvenza della controparte al momento della esecuzione degli obblighi contrattuali; il *rischio di controparte* riguarda le transazioni ad oggetto strumenti finanziari rimaste inadempiute, quelle in cui un'istituzione finanziaria abbia effettuato versamenti per titoli prima di riceverli o abbia consegnato titoli prima di riscuotere il relativo compenso; infine il *rischio di concentrazione* si incorre quando si detengono strumenti finanziari in capo ad un unico emittente superando il limite individuale di fido[26].

L'attività di *moral suasion* condotta dagli organi di vigilanza ha spinto le principali istituzioni finanziarie a dotarsi di un sistema per la misurazione e il controllo dei rischi di mercato talmente avanzato da consentire al Comitato di introdurre nell'Emendamento del 1996 la possibilità per le banche di scegliere tra l'applicazione del metodo standard o l'utilizzo dei modelli interni.

Il *metodo standard*, definito anche metodologia *building block*, suddivide il rischio originato da posizioni in titoli di debito e in titoli di capitale nella componente di rischio generico, imputabile all'andamento sfavorevole del complesso degli strumenti finanziari, e di rischio specifico associato al singolo emittente. I requisiti patrimoniali per i titoli di debito e per i titoli di capitale vengono calcolati separatamente e il requisito totale è pari alla somma tra i requisiti patrimoniali calcolati per il rischio di posizione, il rischio di regolamento, il rischio di controparte, il rischio di concentrazione, il rischio di cambio e il rischio di posizone su merci.

L'utilizzo dei *modelli interni* è subordinato all'approvazione della rispettiva autorità di vigilanza e la valutazione va effettuata in base a criteri qualitativi e quantitativi. Per soddisfare la prima categoria di requisiti si deve disporre di un'unità autonoma e adeguata di gestione del rischio, nella quale deve essere coinvolta anche l'alta direzione della banca, e di modelli idonei che devono essere integrati nel processo quotidiano di misurazione del rischio e sottoposti perio-

[26]Per ulteriori dettagli Direttiva «grandi fidi» 92/121/CEE.

dicamente a verifiche nonché a prove di *stress testing* per simulare le perdite in situazioni estremamente critiche di mercato. I requisiti di carattere quantitativo riguardano il calolo del VaR che deve essere misurato su base giornaliera ipotizzando una detenzione di dieci giorni lavorativi con un livello di confidenza del 99% stimando la voltilità per un periodo non inferiore a un anno e aggiornando i dati con frequenza trimestrale. Il VaR complessivo è pari alla somma dei VaR connessi alle diverse categorie di mercato. Per quanto riguarda i contratti di opzione il modello interno deve cogliere i diversi profili di rischio relativi ai cambiamenti di valore dell'*underlying asset*, alla convessità di questi cambiamenti e al valore dell'opzione in base allo scorrere del tempo.

Dopo la definizione dei criteri da seguire il Comitato ha stabilito che «il requisito patrimoniale minimo è l'importo maggiore fra la misura del VaR relativo al giorno precedente ($VaR_{t-1,10,99\%}$) e la media dei VaR relativi ai 60 giorni precedenti»[27] e quest'ultimo importo va moltiplicato per un fattore (MF) stabilito dalle rispettivi autorità di vigilanza nazionali che varia da 3 a 4 in funzione della qualità del modello interno. Analiticamente:

$$RP_{mkt} = max\left(VaR_{t-1,10,99\%}; MF \times \frac{1}{60}\sum_{i=1}^{60} VaR_{t-i,10,99\%}\right) + SR. \tag{1.4}$$

Secondo il giudizio del Comitato i modelli interni adottati dalle banche non coprono la componente di rischio specifico (SR); essa viene perciò imputata nella misura in cui il modello non coglie questo particolare e in nessun caso il patrimonio calcolato potrà essere inferiore al 50% del corrispondente requisito misurato in base al metodo standard.

Il patrimonio deputato alla copertura dei rischi in generale è costituito, in ordine alla qualità dei mezzi che lo compongono, dal capitale azionario e dagli utili non distribuiti (*tier 1*), dal patrimonio supplementare (*tier 2*) e è stata introdotta esclusivamente a fronte dei rischi di mercato una terza categoria (*tier 3*) composta

[27] Basilea, 1996

dalle passività subordinate con scadenza non inferiore a 2 anni e che prevedono una clausola di *lock-in*[28].

I gruppi bancari devono calcolare il *requisito patrimoniale consolidato*[29] e nell'eventualità che solo alcune componenti del gruppo applichino i modelli interni il requisito totale è pari alla somma tra il valore derivante dall'utilizzo del modello interno e il valore ottenuto con la metodologia standardizzata.

1.5.1.3 Basilea II

Il lungo e laborioso progetto di riforma del primo accordo è iniziato nel 1999[30] e ha coinvolto in discussioni, revisioni e aggiustamenti tutti gli operatori disponibili. Il Nuovo Accordo sul Capitale (NAC)[31], destinato a risolvere i problemi come la scarsa considerazione dei derivati creditizi, l'iniquità del sistema delle ponderazioni e l'inadeguata valutazione della complessità dei portafogli detenuti dalle grandi banche internazionali, è entrato in vigore il 1 gennaio 2008.

Il NAC si basa su tre pilastri:

1. Requisiti patrimoniali minimi.
2. Vigilanza prudenziale.
3. Disciplina del mercato.

Il ***primo pilastro*** riguarda i requisiti patrimoniali a fronte della copertura dei rischi di credito, di mercato e operativi; quest'ultima categoria è di prima introduzione come verrà di seguito approfondito.

Per quanto riguarda *i rischi di credito* è previsto la scelta tra l'utilizzo dell'approccio standard o quello dei rating interni. L'*approccio standard* prevede che le

[28]Impedisce il rimborso del capitale e il pagamento degli interessi se questo riduce il patrimonio della banca in misura inferiore rispetto ai minimi previsti dalla normativa regolamentare.

[29]Viene calcolato in base alle stesse grandezze contabili previste per il calcolo del patrimonio individuale delle banche; esso deve essere calcolato due volte l'anno (30 giugno e 31 dicembre) e i criteri da seguire sono i medesimi previsti per la redazione del bilancio consolidato delle banche.

[30]Basilea, 1999b.

[31]Basilea,2006.

ponderazioni del il rischio avvengano in base ai giudizi esterni delle agenzie di rating (ECAI)[32] «qualificate»[33] e le principali innovazioni riguardano:

- L'abolizione della minore ponderazione agli appartenenti dell'area OCSE;
- L'autorità di vigilanza nazionale deve scegliere se attribuire alla singola banca una ponderazione pari a una categoria immediatamente inferiore rispetto a quella dello stato sovrano di appartenenza oppure se considerare la valutazione delle agenzie esterne;
- L'introduzione di quattro diverse ponderazioni a livello *corporate*;
- La previsione di specifiche ponderazioni per il rischio connesso ai derivati creditizi.

Solo le banche che presentano determinati requisiti minimi possono adottare l'approccio basato sui *rating interni*, che a sua volta si divide in *foundation approach* nel quale i dati relativi alle componenti di rischio [34] vengono forniti dalle autorità di vigilanza e in *advanced approach* nel quale tali valutazioni possono essere quantificate dalla banca stessa solo se soddisfa ulteriori requisiti.

Queste innovazioni hanno consentito una maggiore sensibilità al rischio così da permettere di calibrare il requisito patrimoniale in base al livello di rischiosità del portafoglio di ciascuna banca favorendo le banche di minori dimensioni poiché presentano portafogli caratterizzati da bassa complessità.

Il requisito patrimoniale per il *rischio operativo* introdotto con Basilea II non costituisce una novità come categoria di rischio in sè, in quanto era già noto che disfunzioni di procedure, dei sistemi interni o delle risosrse umane costituiscono

[32]Sono definite ECAI (*Eligible external Credit Assessment Institution*).

[33]Per qualificate si intende che questi organi devono rispettare requisiti di oggettività, indipendenza, disponibilità internazionale dei dati, trasparenza delle metodologie, adeguatezza delle risosrse e credibilità delle proprie valutazioni.

[34]Si tratta della quantificazione del tasso di perdita in caso di insolvenza del mutuatario *Loss given default* LGD, dell'entità dell'esposizione in caso di insolvenza *Exposure at default* EAD e la vita residua dell'operazione *Maturity* M.

fonte di rischio. L'innovazione risiede nella prediposizione di tecniche per la sua gestione e valutazione.

Per calcolaro, il Comitato ha previsto tre approcci alternativi che si distinguono a seconda del grado di sofisticazione e di precisione. Il metodo base[35] che dispone alle banche di detenere il 15% del reddito lordo; il metodo standardizzato[36] che divide le attività bancarie in otto *business line* e per ciascuna si calcola il requisito patrimoniale in base al reddito operativo e a una proxy che individua il grado di rischiosità; il metodo avanzato[37] con il quale ciascuna banca determina con il proprio modello interno il requisito, sempre previa autorizzazione della rispettiva autorità di vigilanza.

Il ***secondo pilastro*** riguarda l'attività di vigilanza prudenziale e ispettiva svolta dalle singole autorità nazionali e consente a queste la possibilità di imporre requisiti patrimoniali superiori rispetto a quelli previsti dallo schema di adeguatezza patrimoniale. Vengono così affiancate alle regole quantitative dei processi di scambio di informazioni tra autorità, a livello di Comitato, nei confronti delle banche controllate per tener conto dei profili di rischio specifici associati al singolo gurppo bancario.

Alle autorità di vigilanza nazionale compete quindi il controllo che il calcolo dei requisiti patrimoniali avvenga in conformità con le disposizioni e la facoltà di richiedere, qualora lo ritengano opportuno, un patrimonio superiore rispetto agli altri paesi valutato in base a requisiti qualitativi come l'assetto organizzativo o l'accuratezza dei processi evitando che questo scenda sotto i minimi previsti.

Il ***terzo pilastro*** definisce la disciplina del mercato e la logica sottostante è di favorire l'informazione al pubblico e la trasparenza delle banche in modo che il mercato possa valutare la rischiosità connessa a ciascun gruppo bancario e quin-

[35] *Basic Indicator Approach*, BIS.
[36] *Traditional Standardised Approach*, TSA.
[37] *Advanced Measurement Approaches*, AMA.

di selezionare l'intermediario cui rivolgersi. La *disclosure*[38] riguarda l'adeguatezza e la composizione del patrimonio, le pratiche contabili adottate, le posizioni creditizie assunte, i metodi di valutazione del rischio e dell'allocazione del capitale.

Basilea II nel suo complesso tralascia un problema non indifferente, quello della prociclicità. Il sistema del NAC è fondato sui *rating* quindi in presenza di un ciclo economico in declino si assisterebbe a frequenti *downgrade* che si ripercuoterebbero in un maggior requisito patrimoniale delle banche che le costringerebbe a una contrazione del credito. Queste reazioni a catena finirebbero per aggravare le fluttuazioni del ciclo economico danneggiano la stabilità del sistema bancario internazionale.

Verso Basilea III La crisi finanziaria sfociata nel 2007 dopo il crollo dei mutui *sub-prime* ha dimostrato che lo schema dei requisiti patrimoniali predisposto non era in grado di sopperire alle perdite che via via venivano contabilizzate. La disciplina dell'Emendamento del 1996 per far fronte ai rischi di mercato era diventata inadeguata e presentava diverse lacune. Infatti la quota maggiore delle perdite subite dalle banche internazionali era riferita alle posizioni detenute nel *trading book* e i requisiti patrimoniali calcolati erano al di sotto del patrimonio necessario per far fronte alle perdite.

Anche le recenti disposizioni di Basilea II soffrono di alcuni punti deboli, in particolare vi sono carenze riguardo la considerazione del rischio di concentrazione e dei rischi delle attività titolarizzate, nonché problemi relativi agli strumenti fuori bilancio.

Le soluzioni emanate dal Comitato sono contenute in due documenti di revisione dell'accordo di Basilea II pubblicati nel luglio 2009[39]. La revisione dei Tre Pilastri è diventata effettiva a partire dal gennaio 2011 mentre le norme di

[38] L' informazione da rendere nota.
[39] Basilea, 2009a e Basilea 2009b.

rafforzamento dei requisiti di mercato sono entrate in vigore a gennaio 2012, ad eccezione della parte relativa al secondo pilastro che è entrata in vigore da subito.

Per ciascuno dei tre pilastri sono state introdotte alcune innovazioni. Per quanto riguarda i requisiti patrimoniali[40] è stata prevista una maggiorazione dei pesi nel sistema di ponderazioni delle attività cartolarizzate per cogliere l'elevato rischio incorporato imponendo altresì sistemi di analisi molto più rigidi. Il supplemento relativo al secondo pilastro è volto a rafforzare il controllo di vigilanza sulla *governance* delle banche e sul rischio di concentrazione nonché sulla previsione di incentivi per le istituzioni finanziare che dimostrano di saper gestire in modo proficuo il rischio nel lungo periodo. Infine la disciplina del mercato contenuta nel terzo pilastro è stata consolidata attraverso l'introduzione di un'informativa trasparente sulle esposizioni derivanti da cartolarrizazioni contenute nel portafoglio di negoziazione e sulle posizioni fuori bilancio.

Il rinnovo della regolamentazione dei rischi di mercato, volto a rafforzare la copertura dei rischi in e fuori bilancio e le esposizioni su strumenti derivati, ha colpito la metodologia di calcolo per entrambi gli approcci, standard e modelli interni, l'azione delle autorità di viglilanza e l'informativa da rendere nota al mercato.

La novità per le banche che fanno uso del *metodo standard* risiede nella determinazione del requisito patrimoniale a fronte del rischio specifico. Non è più possibile effettuare compensazioni tra posizioni lunghe e corte ma si procede ad un calcolo separato del requisito a fronte della somma di tutte le posizioni lunghe e della somma delle posizioni corte. Il requisito finale è pari all'8% del valore totale della maggiore tra il totale delle esposizioni *long* o *short* e non è più prevista la riduzione del coefficiente nel caso di portafoglio liquido e ben diversificato.

Le istituzioni finanziarie che adoperano i *modelli interni* devono aggiornare i loro sistemi a numerose modifiche.

[40] Primo pilastro.

I modelli VaR utilizzati devono considerare come fattori di rischio tutte le variabili rilevanti che la banca utilizza nei modelli di *pricing* e una loro omissione deve essere giustificata alle autorità. In particolare nel calcolo del VaR si deve considerare la non linearità dei contratti di opzione e le caratteristiche degli altri prodotti rilevanti, come gli ABS.

I *database* devono essere aggiornati con frequenza mensile, non più trimestrale, e i modelli devono essere abbastanza flessibili per consentire frequenti aggiornamenti.

Le istituzioni devono calcolare una misura VaR aggiuntiva, chiamata «*stressed value-at-risk*». Questa grandezza è stata inserita per valutare il VaR in codizioni particolari di stress acuto dei mercati finanziari. Il rilevamento va effettuato almeno settimanalmente su una base di 10 giorni lavorativi con un intervallo di confidenza del 99% e l'input di dati storici da utilizzare deve includere almeno 12 mesi consecutivi di «*significant financial stress relevant to the bank's portfolio*»[41]. Il *range* di dati considerato deve essere sottoposto all'approvazione delle autorità di vigilanza e lo stesso provvedimento ritiene che il periodo 2007/2008 riflette in modo adeguato le turbolenze finanziarie da includere.

Ogni banca deve detenere giornalmente un capitale minimo pari alla somma del massimo tra il VaR del giorno precedente e la media del VaR calcolato nei 60 giorni precedenti più il massimo tra la misura più recente dello stressed VaR e la media dello stressed VaR dei 60 giorni precedenti. In formule:

$$RP_{mkt} = max\left[(VaR_{t-1})\,;m_c \cdot VaR_{avg}\right] + max\left[(sVaR_{t-1})\,;m_s \cdot VaR_{avg}\right] \tag{1.5}$$

I fattori moltiplicativi m_c e m_s assumono un valore minimo pari a 3 che può raggiungere il valore 4 in base alla qualità dei modelli verificata con l'applicazione dei risultati derivanti dai *backtesting*.

[41] Basilea 2009a.

Le banche devono sottoporre i propri modelli a rigorose prove di stress che vanno effettuate o attraverso una valutazione del portafoglio in situazioni di crisi recenti[42] oppure simulando il valore del portafoglio davanti a cambiamenti nelle assunzioni sulla volatilità e sulle correlazioni.

Rispetto alla formula 1.4 prevista per il calcolo del VaR nell'emendamento del 1996 si nota che non vi è più la previsione del requisito di capitale nei confronti del rishio specifico. Infatti le banche che dispongono di modelli interni che soddisfano i requisiti qualitativi e quantitativi e i requisiti aggiuntivi disposti dalle autorità nazionali sono esonerate dal requisito addizionale aggiuntivo calcolato secondo il metodo standard. In particolare, i requisiti aggiuntivi richiesti riguardano le attività legate a tassi di interesse e su derivati creditizi per i quali i modelli interni devono cogliere la componente di rischio di default e di rischio di migrazione. Un requisito patrimoniale addizionale è previsto anche per specifiche posizioni individuate separatamente dal Comitato.

1.5.1.4 Le recenti disposizioni di Basilea III

A dicembre 2010 è stato pubblicato lo «Schema di regolamentazione internazionale per il rafforzamento delle banche e dei sistemi bancari»[43], comunemente denominato Basilea III ed è stato emanato per consentire alle banche di superare le future fasi di tensione economico-finanziaria senza incorrere nel il rischio di contagio dall'economia finanziaria all'economia reale.

La crisi del 2007/2008 ha avuto effetti così duri nel sistema bancario a causa di numerosi motivi. Le banche presentavano un livello di indebitamento troppo elevato che si era accumulato negli anni precedenti; questo associato a una diminuzione della qualità e del livello del patrimonio e alla mancata previsione di riserve di liquidità soddisfacenti hanno reso la situazione molto critica. Le perdite

[42] La crisi russa del 1998, la situazione del 2000 dopo lo scoppio della bolla tecnologica o la crisi dei mutui *sub-prime* del 2007/2008.

[43] Basilea, 2010 agguiornato a giugno 2011.

che via via si generavano derivanti dall'attività di negoziazione, dalle posizioni su crediti e dai processi di ''re-intermediazione'' di grosse esposizioni fuori bilancio hanno amplificato i problemi connessi alla prociclicità determinando una riduzione dell'indebitamento e una perdita di fiducia nella solvibilità di diversi istituti bancari.

Le autorità nazionali e sovranazionali, come l'Unione Europea, sono state costrette a intervenire per cercare di risanare il sistema bancario sia a livello microprudenziale, di singolo istituto bancario, sia a livello macroprudenziale, nei confronti dei rischi sistemici riferiti al settore nel suo complesso. Tuttavia gli interventi nei due diversi gradi di applicazione sono tra loro connessi poiché una migliore gestione a livello micro riduce il rischio sistemico di eventuali turbolenze.

Il Comitato con Basilea III ha colto l'occasione per prendere i provvedimenti necessari in materia di adeguatezza patrimoniale, per rafforzare lo schema regolamentare, e in materia di liquidità, in modo da prevedere una solida base e rafforzare l'attività di vigilanza.

Interventi per rinvigorire lo schema di adeguatezza patrimoniale Il sistema bancario internazionale è progredito con riforme che si sono rifatte allo schema dei tre pilastri precedentemente previsto.

Le modifiche qualitative subite dai requisiti patrimoniali si sono rivolte alle componenti del patrimonio di base, che dovrà essere costituito esclusivamente da azioni ordinarie e da riserve da utili non distribuiti, e all'eliminazione del patrimonio di viglanza di terzo livello, previsto a fronte dei soli rischi di mercato. Dal punto di vista quantitativo le banche dovranno disporre di maggiori requisiti per soddisfare l'imposizione di coefficienti minimi del rapporto tra il patrimonio di vigilanza e le attività ponderate per il rischio; questi avranno decorrenza da gennaio 2013 e saranno progressivamente incrementati fino al 2018. Per quanto

riguarda la disciplina del mercato, gli istituti bancari saranno tenuti a trasmettere in modo trasparente la composizione del patrimonio di vigilanza nonchè il suo legame con le voci pubblicate nel bilancio.

La copertura dei rischi di mercato è stata dilatata per inserire misure volte a difendere gli istituti da rischi rilevanti in e fuori bilancio in relazione a contratti derivati, pronti contro termini e finanziamento titoli attraverso la previsione del requisito a fronte del *rischio di credito di controparte*. La riforma ha introdotto tecniche di valutazione del rischio di controparte che tengono conto di periodi di stress in modo da ridurre il problema della prociclicità, riguardo la diminuzione dei requisiti patrimoniali in periodi di bassa volatilità, e agevolare una gestione integrata con i rischi di mercato. Un requisito aggiuntivo, definito *Credit Value Adjustement* CVA, dovrà essere calcolato per valutare la variazione dei prezzi di mercato che consegue a un degrado del merito creditizio della controparte e il metodo di calcolo dipende dalla metodologia utilizzata dalla banca. Infine per fronteggiare il rischio sistemico, che deriva dalle interconnessioni tra i diversi istituti, nell'ambito degli strumenti derivati sono state introdotte maggiori ponderazioni verso le parti più esposte al contagio dei rischi nei confronti del complesso degli istituti.

Interventi per ridurre il *cliff effect*, ovvero la variazione dei requisiti patrimoniali a fronte delle valutazioni delle ECAI, sono stati attuati con la previsione dell'obbligo di valutazione interna delle esposizioni su cartolarizzazioni provviste di *rating* esterno.

Il Comitato ha altresì previsto l'introduzione di un requisito che non si fonda sul rischio ma dipende dalla leva finanziaria, si tratta del *leverage ratio*, misura che ogni autoritià dovrà calcolare in base alla propria giurisdizione e ai criteri contabili utilizzati. Lo scopo è moderare la leva finanziaria degli istituti bancari limitando la flessione delle linee di credito concesse nei momenti di crisi e disporre di una misura che funge da presidio nei confronti degli errori di modello e di

valutazione.

La conservazione del capitale è stata realizzata con l'introduzione di un *buffer*, cioè l'accantonamento di riserve durante i periodi di stabilità economica per potervi attingere qualora subentrino delle perdite. Viene contestualmente inserita anche una forma di tutela dei depositanti poiché se si esauriscono le riserve le autorità devono imporre limitazioni alla distribuzione dei dividenti, ai riacquisti di azioni proprie e ai bonus al personale in modo da far sopportare il peso agli azionisti, agli altri portatori di capitale e ai dipendenti e non ai depositanti.

A livello macroprudenziale è stato ritenuto necessario limitare la diffusione degli shock legati al settore bancario attraverso i canali creditizi che legano l'economia finanziaria all'economia reale. Ogni autorità partecipante al Comitato dovrà delegare un organo responsabile della determinazione di un *buffer* anticiclico qualora ritenga che si manifestino situazioni tali da propagare il rischio sitemico. L'ampiezza del *buffer* è prevista tra zero e 2,5% delle attività ponderate per il rischio, ogni singola banca dovrà tener conto della struttura geografica del proprio portafoglio di posizioni creditizie e le banche internazionali dovranno considerare la misura imposta nelle varie giurisdizioni cui sono collocate. Esso potrà essere rimosso qualora le condizioni del mercato risultino abbastanza stabili e con un andamento positivo da non richiedere più capitale aggiuntivo.

Istituzione dei requisiti di liquidità Un'aspetto del sistema regolamentare trascurato dal Comitato con i precedenti accordi era in rifermimento alla previsione di una valida base di liquidità per gli istituti bancari, i quali messi a dura prova da situazioni di illiquidità del sistema non previste sono sopravvissuti solo grazie a massicci interventi delle banche centrali.

Le prime linee guida sono state pubblicate nel 2008 attraverso il documento *Principles for Sound Liquidity Risk Management and Supervision*[44] e successi-

[44]Per ulteriori informazioni `http://www.bis.org/publ/bcbs144.pdf`.

vamente integrate con l'emanazione dello schema Basilea III. Il Comitato ha così introdotto due nuovi requisiti: il *Liquidity Coverage Ratio* per favorire la resilienza[45] a breve termine, e il *Net Stable Funding Ratio* che promuove la resilienza a lungo termine. Essi si basano su dei parametri di rischio condivisi a livello internazionale che in alcuni casi contengono elementi soggetti a modificazioni a livello delle singole giurisdizioni.

IL *Liquidity Coverage Ratio* svolge il compito di salvaguardare la liquidità delle banche durante un orizzonte temporale di 30 giorni facendo sì che queste detengano attività liquide di elevata qualità che possono essere prontamente usate per far fronte a momentanei deflussi di cassa in periodi di stress acuto. Le situazioni che tende a proteggere sono in relazione a tensioni sia idiosincratiche che sistemiche nelle quali si prevede si verifichino eventi come il declassamento del *rating* creditizio della banca, pesanti prelievi da parte dei depositanti, aumenti in relazione agli *haircut*[46] nelle operazione di finanziamento garantite e dei margini richiesti in operazioni su derivati. Le attività che possono costituire questo cuscinetto «devono essere non vincolate, facilmente liquidabili sui mercati anche in periodi di tensione e, idealmente, stanziabili presso banche centrali.».[47]

Il *Net Stable Funding Ratio* funge da indicatore strutturale evitando che nei momenti di elevata liquidità le banche utilizzino in modo eccessivo il finanziamento a breve termine. Gli istututi bancari sono tenuti a detenere nell'arco di un anno «un ammontare minimo di provvista stabile in relazione al grado di liquidità dell'attivo, nonché al potenziale fabbisogno contingente di liquidità derivante da impegni fuori bilancio»[48].

L'entrata in vigore di questi indicatori è prevista rispettivamente entro l'1 gennaio 2015 ed entro l'1 gennaio 2018 e verranno monitorati dalle autorità in base

[45]Termine che in campo finanziario indica la capacità delle banche di resistere durante momenti di crisi del sistema finanziario nel suo complesso.
[46]Scarti applicati nelle operazioni di finanziamento garantite.
[47]Basilea, 2011.
[48]Basilea, 2011.

a indicatori come l'allineamento delle scadenze contrattuali, la concentrazione della raccolta o le attività non vincolate a disposizione.

1.5.2 Il margine di solvibilità nelle compagnie assicurative

La solvibilità delle compagnie assicurative è legata alla probabilità di fallimento e una corretta gestione tecnica[49] associata a una equilibrata gestione patrimoniale-finanziaria[50] sono di primaria importanza. Il margine di solvibilità è costituito dal «patrimonio libero da qualsiasi impegno prevedibile»[51] ovvero dal capitale sociale, dalle riserve e da utili/perdite di esercizi precedenti portati a nuovo. Esso ha il ruolo di fronteggiare le variazioni subite dai rischi assicurati, assorbire perdite dall'attività di investimento, coprire rischi generali come le calamità naturali e far fronte alle perdite derivanti da errori di gestione.

Inizialmente è stato predisposto dall'Unione Europea il regime regolamentare *Solvency I*[52], che definiva in modo omogeneo per tutte le giurisdizioni appartenenti all'UE regole minime di patrimonializzazione. Il sistema delineato presentava però diverse carenze, in particolare:

- Venivano predisposte dotazioni patrimoniali senza considerarela distinzione tra ramo danni e ramo vita, applicando aliquote pressochè uniche ai parametri di natura tecnica;

- Non era adeguatamente considerato il profilo qualitativo del portafoglio assicurato e degli impieghi disposti per la sua copertura[53];

[49] La gestione tecnica comprende l'attività di assunzione di rischi, le riassicurazioni, la gestione del portafoglio rischi, le operazioni e la gestione del risarcimento.

[50] Riguarda il raggiungimento dell'equilibrio finanziario attraverso un'adeguata combinazione tra rischio, rendimento e liquidità del portafoglio in linea con le poste del passivo.

[51] Cappiello, 2008.

[52] Direttive nn.12 e 13 del 2002.

[53] Ad esempio, la composizione del portafoglio passivo non veninva considerata in sede di determinazione del livello minimo del margine di solvibilità anche se alcune sue poste presentano un livello di sovrasinistralità superiore richiedendo perciò un requisito patrimoniale più elevato rispetto ad altre.

- L'attenzione era focalizzata sulle voci di natura tecnica trascurando la composizione del portafoglio investimenti, i rischi connessi nonché i benifici derivani dalla diversificazione;

- Il calcolo del margine di solvibilità non teneva conto delle diverse fasi che un azienda può attraversare, perciò non era adeguato in condizioni di elevato stress finanziario.

La riforma di questo sistema è diventata necessaria alla luce del fatto che non basta solo una adguata patrimonializzazione a garanzia della solvibilità, ma è importante elaborare adguate poilitiche aziendali accompagnate da un rigoroso sistema di controllo rischi. Il processo di innovazione della legislazione comunitaria è iniziato nel 2001 quando la Commissione Europea ha avviato il progetto *Solvency II* per creare un sistema di regole omogeneo a livello internazionale e intersettoriale. Lo scopo è favorire una maggiore competitività tra le compagnie assicurative attraverso regole idonee e adeguati sistemi di controllo dei rischi.

Per realizzare questo progetto nel 2003 è stato istituito il *Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors*, CEIOPS, con il compito di redigere una prima bozza di legge e il comitato si è avvalso della collaborazione della *International Actuarial Association*, IAA, per analizzare i rischi del settore assicurativo, in continuità con le norme prescritte da Basilea II.

Il proposito di riforma si è tradotto in una direttiva europea[54] che raccoglie tutte le direttive assicurative emanate in modo da creare una sorta di Testo Unico in riferimento ai principi di semplificazione, trasparenza, proporzionalità e valutazione d'impatto.

Proprio come le disposizioni di Basilea II e Basilea III lo schema contenuto in Solvency II ripercorre la struttura basata sui tre pilastri.

[54]Direttiva 2009/138/CE.

Il **primo pilastro** dispone in materia di requisiti di vigilanza prudenziale ed è previsto che il requisito patrimoniale assuma un importo compreso tra il *Solvency Capital Requirement* SCR e il *Minimum Capital Requirement* MCR, che di seguito saranno chiariti.

Il requisito del SCR è stato introdotto con lo scopo di prevedere un livello di capitale che consenta all'assicurazione di far fronte a eventuali perdite impreviste e allo stesso tempo offrire sicurezza agli assicurati che i pagamenti saranno regolarmente onorati. Il calcolo di questo requisito è basato sull'operatività dell'impresa e le formule da applicare sono standardizzate per ramo. Le imprese assicurative devono calcolare almeno una volta all'anno il VaR dei fondi propri con un livello di confidenza del 99,5% su un orizzonte temporale di un anno utilizzando sia la formula standard sia i modelli interni. Una volta calcolato il requisito patrimoniale, esso può essere sottoposto al *supervisory review process* per valutare se è necessario capitale addizionale per far fronte agli impegni verso gli assicurati.

Il secondo requisito, il MCR, rappresenta la «soglia patrimoniale minima (chiamata *rete di sicurezza*) al di sotto della quale le obbligazioni assunte da un assicuratore sono ritenute rappresentative di un livello di rischio inacettabile per gli assicurati» [55].

Il requisito patrimoniale non può essere inferiore al MCR, che assume un importo in valore assoluto pari a € 2,2mln per il ramo danni e € 3,2mil per il ramo vita, ovvero almeno il 25% e il 45% rispettivamente del requisito del ramo danni e del ramo vita in relazione all'importo del SCR. Il calcolo avviene misurando almeno ogni tre mesi il VaR dei fondi propri con un livello di confidenza dell'85% su un orizzonte temporale di un anno.

È previsto che le riserve tecniche siano di importo pari al valore attuale che l'impresa dovrebbe pagare se dovesse trasferire le proprie obbligazioni ad un'al-

[55] Cappiello, 2008.

tra impresa. Questo calcolo è coerente con il mercato perché il valore economico di attività e passività viene valutato in relazione ad importi immediatamente contrattabili e presenta attributi di prudenza, affidabilità e obiettività.

Gli investimenti con la nuova normativa comunitaria sono liberi, fatta salva la possibilità per le autorità di vigilanza nazionale di introdurre limitazioni in base a determinate circostanze o in certi periodi di tempo limitati. Questa previsione non pregiudica la solvibilità poiché le imprese con portafogli più rischiosi sono soggette anche ad un requisito patrimoniale superiore e consente alle compagnie assicurative di monitoriare costantemente il rischio assunto.

Il **secondo pilastro** si occupa dell'attività di vigilanza attraverso norme sulla *corporate governance*, sui controlli interni, sul sistema di *risk management* e in materia di attività, strumenti e poteri di vigilanza. Infatti è previsto che le compagnie assicurative devono stimare costantemente i rischi assunti e la propria posizione di solvibilità per la quale le autorità di vigilanza hanno la facoltà di richiedere requisiti patrimoniali addizionali.

Infine il **terzo pilastro** prevede disposizioni riguardo gli obbilighi informativi da rendere disponibili al mercato delineando i contenuti e le modalità che tutti i reparti aziendali devono rispettare.

La direttiva dispone anche in materia di vigilanza di gruppo poiché è noto che in presenza di gruppo il requisito patrimoniale è inferiore rispetto alla somma del patrimonio delle singole componenti. Sono previsti tre metodi alternativi per il calcolo del SCR e per quanto riguarda la vigilanza sono previste specifiche segnalazioni per evitare la concentrazione dei rischi.

Capitolo 2

Approcci standard per i rischi di mercato

2.1 Introduzione

Per stimare il rischio è necessario innanzitutto individuare la variabile di interesse, che nel caso dei rischi derivanti dai fattori di mercato è riconducibile alle seguenti categorie: tassi di interesse, tassi di cambio, valore dell'*equity* e prezzi delle *commodity*.

La teoria finanziaria non considera solo le variazioni negative come fonte di rischio ma assumono importanza tutte le *performance* eccezionalmente elevate, sia positive che negative. Considerare il rischio in modo simmetrico in termini di dispersione dai possibili risultati è logico poiché gli attori dei mercati finanziari posso avere posizioni *long* o *short*, verso il mercato domestico oppure verso l'estero o essere nella posizione di consumatori o produttori.

Le perdite sono funzione della dipendenza tra la volatilità delle variabili finanziarie sottostanti e l'esposizione alla fonte di rischio. Per quanto riguarda il primo fattore non è possibilie fare alcunché ma l'esposizione al rischio può essere aggiustata, ad esempio, attraverso l'uso dei derivati.

A seconda dello strumento considerato, vi sono diversi metodi per valutarne l'esposizione al rischio. Nel mercato obbligazionario la sensitività del prezzo rispetto ai movimenti dei tassi di interesse viene stimata dalla *duration*, anche se la

misura prodotta è imperfetta poiché la relazione prezzo-rendimento non è lineare ma convessa[1]; una corretta valutazione si ottiene perciò grazie alla *convexity*. Nel mercato azionario il grado di rischio sistemico è colto dal valore del ben noto *beta* (β) di ciascun titolo e per quanto riguarda le opzioni il *delta* (δ)[2], esprime la sensibilità del prezzo dell'opzione in base alle variazioni dell'attività sottostante e il *gamma* (γ)[3] indica le variazioni del delta di un opzione in base ai cambiamenti del prezzo del sottostate.

Ad ogni modo la volatilità dei mercati internazionali comporta sia rischi che opportunità che devono essere propriamente valutati. Il *Value at Risk* è una misura del *downside risk* largamente condivisa, in grado di cogliere l'effetto combinato della volatilità sottostante e dell'esposizione ai rischi finanziari mediante l'utilizzo di un singolo numero, permettendo così una facile e veloce comprensione.

Dinnanzi a una comune e riconosciuta definizione di rischio, sono state elaborate diverse metodologie per stimare la distribuzione futura del rendimento di un certo portafoglio o più precisamente le perdire che questo potrebbe subire. Gli approcci più diffusi e largamente utilizzati sono il *metodo varianze-covarianze* e l'analisi basata sulle *simulazioni storiche*.

La prima metodologia, definita anche *metodo parametrico*, è caratterizzata dalla stima della sensibilità dello strumento, o del portafoglio di strumenti, alle variazioni e alla volatilità dei rendimenti dei fattori di mercato, nonché sulla correlazione tra questi. Inoltre il livello di confidenza viene determinato in base all'ipotesi di distribuzione normale dei rendimenti delle attività di riferimento. Si tratta di un modello ampiamente utilizzato nell'ambito dei sistemi di *risk management* anche per il fatto che si ispira alla banca dati *RiskMetrics* alla quale

[1]Un aumento del tasso riduce il prezzo meno di quanto lo aumenta un'identica correzione del tasso di segno negativo.

[2]Il delta δ di un opzione rappresenta la derivata del valore del portafoglio rispetto alla variabile di mercato sottostante.

[3]Derivata del delta δ rispetto alla variabile di mercato.

diverse istituzioni finanziarie si avvalgono per lo sviluppo del proprio modello interno.

Le *tecniche di simulazione* invece sono basate su una logica di *full-valuation* in base alla quale, per stimare la potenziale variazione del valore di mercato di singole posizioni o interi portafogli, vengono rivalutate tutte le poste in base alle nuove condizioni di mercato simulate utilizzando appropriati modelli di *pricing*. A differenza del metodo parametrico il livello di confidenza desiderato viene individuato sulla distribuzione dei profitti e delle perdite generata dalla simulazione, isolando il percentile desiderato. I metodi di misurazione riconducibili all'approccio delle simulazioni sono: le simulazioni storiche, le simulazioni Monte Carlo e le prove di stress.

In questo Capitolo si procede con la descrizione di queste due tecniche, sviluppando le modalità di valutazione per i diversi strumenti e i metodi per la previsione della volatilità.

2.2 Il metodo parametrico

Il successo di questo modello è legato alla semplicità nell'assumere che i rendimenti dei fattori di mercato si distribuiscono secondo il modello teorico della variabile casuale normale multivariata. Il valore della densità di probabilità di questa distribuzione dipende dai parametri μ e σ^2 ovvero la media e la varianza della distribuzione della variabile casuale X. Questo metodo è chiamato parametrico appunto perché si basa sulla stima dei parametri della distribuzione.

Analiticamente il VaR di una singola posizione è:

$$VaR_i = VM_i \times \delta_i \times \sigma_i \times \alpha \tag{2.1}$$

Il VaR è perciò determinato dal prodotto tra il valore di mercato della posizione VM, la sensibilità del fattore di mercato alle variazioni racchiusa nel coefficiente

δ [4] e la potenziale variazione sfavorevole del fattore di mercato ottenuta dal prodotto tra la volatilità σ del fattore di mercato e un fattore scalare α che consente di ottenere una misura di rischio corrispondente al livello di confidenza desiderato, data l'ipotesi di distribuzione normale dei rendimenti.

2.2.1 Le ipotesi sottostanti al modello

La scelta del livello di confidenza rappresenta l'avversione al rischio dell'istituto finanziario in base al grado di protezione che esso intende esercitare sul proprio portafoglio di strumenti. In questo approccio tale problema si traduce nella scelta di un determinato multiplo della deviazione standard, indicato da α.

In particolare si ritiene che i prezzi del fattori di mercato siano distribuiti secondo una log-normale, in modo che i rendimenti logaritmici relativi al periodo $(t-1, t)$ siano distribuiti secondo una normale:

$$R_t = ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) \approx \frac{\Delta S_t}{S_{t-1}}. \tag{2.2}$$

Limitatamente al caso univariato, per le variabili casuali continue la funzione di densità di probabilità $f_X(x)$ assume valori maggiori o uguali a zero in corrispondenza di ciascun possibile valore x della variabile casuale X.

La funzione di densità di probabilità che caratterizza una variabile casuale distribuita normalmente è:

$$f_X(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp \frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2 \tag{2.3}$$

Il valore della densità di probabilità in corrispondenza dei valori di x della vv.cc. X dipende unicamente dai parametri μ e σ^2, ovvero la media e la varianza della distribuzione assunti da X. La forma della distribuzione è campanulare ed è simmetrica attorno al suo valore atteso μ con code che tendono asintoticamente

[4] Nel caso di obbligazioni è pari alla *modified duration*, per le posizioni in valuta estera è pari all'unità e per titoli azionari coincide con il *beta* β.

a zero per valori di x assunti da X molto grandi o piccoli mentre la forma più o meno schiacciata dipende dal valore di μ e σ^2.[5]

La distribuzione normale risulta utile qualora si desideri calcolare la probabilità che i valori assunti da una certa variabile stocastica, come i prezzi azionari o i tassi di interesse, si mantengano all'interno di un certo intervallo intorno al valore medio. Ad esempio se si desidera calcolare la probabilità che le variazioni subite da una variabile si mantengano all'interno dell'intervallo con estremi $(\mu - 2\sigma)$ e $(\mu + 2\sigma)$ basta calcolare:

$$\int_{\mu-2\sigma}^{\mu+2\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left[\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right] dx$$

È così che grazie all'assunzione di distribuzione normale dei rendimenti che è possibile interpretare il fattore α come il livello di confidenza della misura di rischio ottenuta.

Va precisato che se, come in questo caso, lo scopo è quello di calcolare il valore a rischio, quindi la perdita potenziale, ogni esposizione è di fatto esposta a metà degli eventi racchiusi nella distribuzione di probabilità. Pertanto se si considera un certo multiplo della deviazione standard, come nella formula un multiplo pari a 2, si deve tener presente che il livello di protezione è superiore a quello che si otterrebbe studiando l'intera distribuzione di probabilità. Analiticamente se si considera l'intervallo tra $(-\infty)$ e $(\mu + \alpha\sigma)$ si ottiene:

$$Prob\left[x < (\mu + \alpha\sigma)\right] = \int_{-\infty}^{\mu+\alpha\sigma} f(x)dx = Prob(Z < \alpha) = 1 - c$$

dove $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ rappresenta una variabile distribuita secondo una normale standardizzata ovvero con media nulla e deviazione standard unitaria $N(0,1)$ e c indica il livello di confidenza prescelto.

Ponendo $\alpha = 2$ si ottiene:

$$1 - c = \int_{-\infty}^{\mu+\alpha\sigma} f(x)dx = Prob(Z < 2) = 2,28\%$$

[5]Gallo Pacini, 2002.

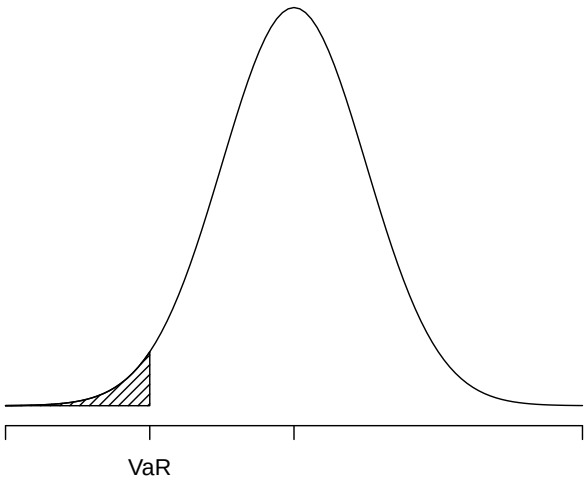

Figura 2.1: Distribuzione normale per l'approccio parametrico

ricavando $c = 97,72\%$.

La misura del valore a rischio che si calcola con questo procedimento rappresenta, per la singola posizione o per il portafoglio di posizioni, la distanza tra il profitto atteso $E(P)$ e la perdita massima L_c corrispondente al livello di confidenza prescelto. Analiticamente:

$$VaR = E(P) - L_c \tag{2.4}$$

In base a questa logica, la figura 2.1 è stata costruita partendo da una normale standard e il valore del VaR evidenziato corrisponde a un livello di confidenza del 97,72%, pari a 2 volte la deviazione standard.

Quasi sempre, nel calcolare il VaR durante l'orizzonte temporale considerato, si assume che il tasso di variazione atteso del prezzo di una variabile di mercato sia nullo. Si tratta di una affermazione che non è rigorosamente esatta. Questa ipotesi è giustificabile dal breve orizzonte temporale che caratterizza l'attività di

negoziazione e in parte dal fatto che l'evidenza empirica relativa alle variabili di mercato dimostra che il tasso di variazione del prezzo di una variabile di mercato durante un ristretto intervallo temporale ha un valore atteso che è, in linea di massima, piccolo rispetto alla deviazione standard. Quindi poiché il rendimento medio registrato in un periodo passato non può essere considerato indicativo del rendimento atteso, si preferisce affidarsi ad approssimazioni di quest'ultimo come il tasso *risk free* o se si valutano brevi orizzonti temporali un valore nullo[6].

Nell'ipotesi di rendimento medio nullo, anche il profitto atteso diventa nullo e la (2.4) si semplifica:

$$VaR = -L_c. \tag{2.5}$$

Un aspetto relativamente complesso si delinea nella scelta dell'intervallo di confidenza, il quale riflette il grado di avversione al rischio della singola istituzione finanziaria. Ad esempio istituzioni particolarmente avverse al rischio sceglieranno un multiplo della volatilità molto elevato per ottenere maggiore protezione e di conseguenza assumeranno posizioni meno rischiose in base al *trade-off* rischio e rendimento atteso.

Supponendo poi che un istituzione desideri mantenere il proprio *rating* di merito creditizio, dovrebbe allocare in ogni *business unit* un importo di capitale tale da preservare la propria classe di *rating*. Ad esempio se detiene un *rating* AA al quale è associata una probabilità di insolvenza a un anno del 0,03%[7], l'istituzione potrebbe scegliere di applicare un livello di confidenza pari al 99,97%.[8] In via generale il livello di confidenza che viene effettivamente usato per i primi calcoli è a volte minore rispetto a quello dichiarato perché la stima del VaR per elvati livelli di confidenza è molto complessa e spesso porta a cattive stime perché la distribuzione effettiva presenta code più spesse rispetto alla distribuzione normale.

[6]Sironi, 2005.
[7]In base alle classi di rating delineate dall'agenzia S&P.
[8]Hull, 2008.

Deve essere valutato in modo adeguato anche l'orizzonte temporale di riferimento. Questa decisione è vincolata da limiti oggettivi, come il grado di liquidità del mercato attinente alla posizione. Ad esempio, la scelta di un intervallo giornaliero per una posizione in una delle principali valute negoziabili è appropriata e viceversa per una posizione relativa a un titolo azionario di una società non quotata è congruo scegliere un intervallo di tempo maggiore. Si possono considerare anche condizioni di natura soggettiva, in particolare con rifermento all'*holding period* della singola posizione. Pertanto una posizione assunta in ottica speculativa va valutata con un breve orizzonte temporale, mentre ad esempio un fondo pensione potrebbe utilizzare una misura VaR con orizzonte temporale a un mese data la minore attività di negoziazione delgli strumenti all'interno portafoglio e il fatto che potrebbe contenere attività poco liquide.

Il problema principale per analizzare la volatilità per elevati orizzonti temporali, come ad esempio un anno, è la carenza di dati. Infatti se si desidera effettuare una stima che sia significativa a partire dai rendimenti annui del passato per prevedere la volatilità futura si deve disporre di un campione di dati sufficientemente ampio. Dal punto di vista statistico è dimostrato che un campione di 20-30 anni di osservazioni è sufficiente ma vi può essere incertezza riguardo la significatività di dati relativi a periodi così lontani per stimare le variabili future.

Per sopperire a questa complicazione si utilizza la volatilità giornaliera per stimare la volatilità per i periodi più lunghi. Infatti se si ipotizza che i rendimenti giornalieri siano rappresentati da vv. cc. indipendenti e identicamente distribuite con media nulla, la stima del VaR per qualsiasi orizzonte temporale N è:

$$NdayVaR = 1dayVaR \times \sqrt{N}. \tag{2.6}$$

Infatti, in base al teorema del limite centrale[9] la somma di variabili casuali identicamente e indipendentemente distribuite provenienti da una gaussiana è anch'essa una variabile casuale normale e la deviazione standard che si ottiene dalla somma di N variabili casuali indipendentemente e identicamente distribuite è $\sqrt{N}$ volte la deviazione standard di ciascuna distribuzione. Ciò significa assumere che la variazione dei fattori di mercato che si è verificata il giorno t è indipendente da quella registrata il giorno $t-1$ e non influenza quella relativa al giorno $t+1$. Studi empirici però dimostrano che i rendimenti dei fattori di mercato sono autocorrelati, in particolare nei periodi caratterizzati da tensioni finanziarie.

Tuttavia questa formula è frequentemente usata per calcolare la volatilità decadale, come previsto anche dal Comitato di Basilea che subordina la facoltà di elaborare un modello interno per determinare il requisito patrimoniale a fronte dei rischi di mercato all'adozione di un *holding period* di almeno 10 giorni lavorativi.

Infine assume rilievo per la determinazione del livello di confidenza anche la dimensione della posizione assunta. Infatti se la dimensione della posizione su un titolo azionario è superiore al volume medio di negoziazioni giornaliere del titolo, è ragionevole aspettarsi una tempistica maggiore per liquidare la posizione rispetto a posizioni di dimensioni minori.

2.2.2 Il modello lineare per un generico portafoglio

Calcolare il VaR di un portafoglio sottoposto a N diversi fattori di mercato richiede l'introduzione dei coefficienti di correlazione fra i rendimenti dei fattori

[9] Il teorema afferma che da un campione di variabili casuali i.i.d. ognuna con media μ e varianza finita σ^2, sotto condizioni molto generali del modello probabilistico delle X_i, si ha che $\overline{X}_n - \mu/\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \overset{n\to\infty}{\to} N(0,1)$, dove $\overline{X}_n$ è la vv. cc. media campionaria $\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$. Tale risultato è vero se le X_i di partenza sono distribuite normalmente e per n sufficientemente elevato tale risultato si estende ad una grande maggioranza di modelli probabilistici.

di mercato. Analiticamente:

$$VaR_{P,N} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(VM_i \times \delta_i \times \alpha \times \sigma_i) \times (VM_j \times \delta_j \times \alpha \times \sigma_j) \times \rho_{ij}} \tag{2.7}$$

dove ρ_{ij} indica il coefficiente di correlazione fra il rendimento del fattore di mercato i e il rendimento del fattore di mercato j.

Questa formula è agevole nel caso di un portafoglio composto da due posizioni, mentre se si vuole stimare il VaR di un portafoglio reale composto da più posizioni soggette a numerosi fattori di mercato, è utile ricorrere alla formalizzazione matriciale.

Consideriamo di disporre di N posizioni, ognuna delle quale assume una misura VaR pari a VaR_1, VaR_2,..., VaR_n che espressi in forma vettoriale sono:

$$\overline{V} = \begin{pmatrix} VaR_1 \\ VaR_2 \\ \cdots \\ VaR_n \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

In modo analogo è possibile esprimere in forma matriciale anche i coefficienti di correlazione tra i rendimenti dei fattori di mercato:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \cdots & \rho_{1,N} \\ \rho_{2,1} & 1 & \cdots & \rho_{2,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{N,1} & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

Pertanto il VaR del portafoglio, dove con $\overline{V}^T$ si indica la trasposta del vettore $\overline{V}$, risulta essere:

$$VaR_P = \sqrt{\overline{V}^T \times C \times \overline{V}} \tag{2.10}$$

È possibile applicare il modello lineare anche alle opzioni. Considerando un portafoglio che contiene opzioni scritte su un'unica azione con prezzo corrente

pari a S e che il delta δ della posizione sia:

$$\delta = \frac{\Delta VM}{\Delta S}$$

quindi:

$$\Delta VM = \delta \Delta S \tag{2.11}$$

dove ΔS corrisponde alla variazione giornaliera del prezzo dell'azione e ΔVM è la variazione giornaliera del valore di mercato del portafoglio. Ora, definito con Δx il tasso di variazione giornaliera del prezzo dell'azione, cioè:

$$\Delta x = \frac{\Delta S}{S}$$

si ha che ΔVM e Δx sono tra loro legati in modo lineare dalla relazione:

$$\Delta VM = S\delta\Delta x$$

Nel caso in cui si disponga di un portafoglio composto da posizioni su opzioni che dipendono da diverse variabili di mercato è possibile ricavare la relazione lineare che lega tra loro, almeno approssimativamente, ΔVM e i Δx_i:

$$\Delta VM = \sum_{i=1}^{n} S_i \delta_i \Delta x_i \tag{2.12}$$

dove S_i è il valore della i-esima variabile di mercato e δ_i è il delta del portafoglio rispetto alla i-esima variabile di mercato.

L'approccio delta-normal Finora è stato ipotizzato che la distribuzione dei rendimenti dei fattori di mercato (titoli azionari, tassi di interesse, tassi di cambio e prezzi delle *commodity*) sia assimilabile alla distribuzione normale, senza esaminare anche la distribuzione dei prezzi di tali variabili. L'approccio precedentemente presentato assume implicitamente che la relazione che lega il rendimento

di ciascun fattore di mercato con il suo prezzo sia lineare. Infatti se il rendimento di un portafoglio è composto da una combinazione lineare di variabili normali, anche esso è caratterizzato da una distribuzione normale.

Una singola posizione può essere soggetta a più variabili di mercato e per applicare il metodo *delta-normal* diventa necessario effettuare una scomposizione delle attività presenti nel portafoglio seguendo una tecnica di *mapping*[10]. Così facendo il portafoglio viene modificato in modo da ottenre un ''portafoglio virtuale" formato da posizioni standardizzate aggregate a seconda del fattore di rischio cui sono esposte.

Ad esempio una posizione di indebitamento a termine per acquistare valuta estera, può essere scomposta in tre parti. Se si considera un indebitamento in euro per l'acquisto di dollari si hanno le seguenti posizioni virtuali: l'indebitamento iniziale in euro a termine, l'acquisto di dollari a pronti e l'investimento in dollari. Successivamente si deve determinare il valore attuale delle tre posizioni virtuali e calcolare il relativo VaR tramite il modello univariato che tenga conto della volatilità del fattore di rischio associato a ciascuna posizione virtuale. Il VaR complessivo si ottiene applicando la (2.10), tenendo conto quindi delle correlazioni tra i diversi fattori di mercato e il legame tra le distinte posizioni virtuali.

Invece se lo scopo è valutare una posizione in titoli azionari si dovrebbero considerare come fattori di rischio i singoli prezzi, ma nel caso di un portafoglio ben diversificato composto da titoli quotati in diversi mercati di borsa mondiali la stima di volatilità e correlazioni diventerebbe troppo onerosa data la quantità di dati che tale stima implica. Tuttavia si procede con l'aggregazione delle singole posizioni in titoli azionari in una posizione virtuale relativa ad ogni mercato di

[10]Per una accurata misurazione del rischio è necessario valutare le posizioni rispetto al loro valore di mercato. Questa operazione non è molto complessa per quanto riguarda i titoli azionari o i tassi di cambio ma non è così facile per quanto riguada i titoli obbligazionari con cedola; infatti risulta alquanto articolato scontare tutti i *cash flows* futuri rispetto al relativo fattore di rischio individuato in base alla curava dei tassi a termine.

borsa cui l'istituzione è esposta. Così facendo si ottengono tante posizioni fittizie quanti sono i mercati borsistici nei quali l'istituzione è operativa e ogni singola $i-$esima posizione viene «mappata» al relativo $j-$esimo mercato azionario sulla base del proprio coefficiente β:

$$VM_j = VM_i \times \beta_i \tag{2.13}$$

dove con VM_j si indica il valore della posizione virtuale nel mercato azioanrio $j-$esimo, con VM_i il valore di mercato della posizione effettiva del titolo $i-$esimo e β_i[11] rappresenta la sensibilità del rendimento del titolo rispetto alla variabilità del rendimento del mercato nel quale è quotato in base al modello del CAPM. Il calcolo del VaR relativo alla posizione nel titolo $i-$esimo viene stimato in base alla voltatilità del rendimento dell'indice del mercato azionario in cui esso è negoziato:

$$VaR_i = VM_i \times \beta_i \times \sigma_j \times \alpha. \tag{2.14}$$

Infine il VaR complessivo relativo al mercato $j-$esimo è dato da:

$$VaR_j = \left(\sum_{i=1}^{N} VM_i \times \beta_i \right) \times \sigma_j \times \alpha. \tag{2.15}$$

Questa metodologia di calcolo è fondata sull'ipotesi che le variazioni del rendimento di un singolo titolo azionario possono essere spiegate in base alla variabilità del rendimento del mercato azionario nel quale il titolo è quotato. Tuttavia spesso il *mapping* fondato sul coefficiente β porta a una sottostima del rischio, la quale è molto evidente se il portafoglio presenta una elevata concentrazione in un limitato numero di titoli dove il rischio specifico associato a ciascun titolo

[11] La variabilità del rendimento di un titolo può essere distinta nelle due componenti di rischio specifico, eliminabile con l'adozione di un'deguata politica di diversificazione di portafoglio, e il rischio generico che deriva da fattori comuni a tutti i titoli quotati nello stesso mercato. Il rischio sistemico di un titolo rappresenta la covarianza del suo rendimento con quello del portafoglio di mercato e perciò il *beta* (β) di un titollo azionario è usato per rappresentare la sensibilità del rendimento del titolo rispetto al rendimento del portafoglio di mercato, ovvero l'indice azionario di riferimento.

non viene eliminato dalla diversificazione. Alternativamente è possibile stimare in modo più corretto il rischio sistemico di un titolo azionario attraverso un modello multifattoriale quale l'*arbitrage pricing theory* APT.

L'approccio asset-normal Questo approccio, seguito da importanti banche internazionali, si basa sull'assunzione che i rendimenti delle singole posizioni, e non dei fattori di mercato, siano distribuite in modo normale. La differenza tra le due diverse ipotesi è di facile intuizione se si considera ad esempio uno *zero coupon bond*, dove il rendimento del fattore di mercato, ovvero il tasso di interesse, non coincide con il rendimento della posizione soggetta alle variazioni del prezzo del *bond*.

Per seguire questo approccio metodi di calcolo appena illustrati rimangono validi; è sufficiente modificare i coefficienti di correlazione dei fattori di mercato con i coefficienti di correlazione fra i rendimenti delle singole posizioni che compongono il portafoglio. Di fatto questo approccio semplifica i calcoli perché non richiede la valutazione fra i fattori di mercato e il valore delle posizioni.

2.2.3 Il modello quadratico, approccio delta-gamma

Per alcuni strumenti finanziari, quali le obbligazioni e le opzioni, la relazione lineare tra le variazioni dei fattori di mercato e le variazioni del valore di mercato della posizione è valida solo in prima approssimazione.

Ad esempio, funzione prezzo-rendimento delle obbligazioni è convessa e, considerando solo la *duration*, si otterrebbe una sottostima dell'aumento del prezzo rispetto alla diminuzione del tasso di rendimento e una sovrastima della diminuzione del prezzo a fronte di un aumento del rendimento. Il valore delle opzioni invece cambia in modo continuo in relazione alle variazioni del valore di mercato dell'attività sottostante e mantenere l'ipotesi di linearità significherebbe assumere un coefficiente δ costante.

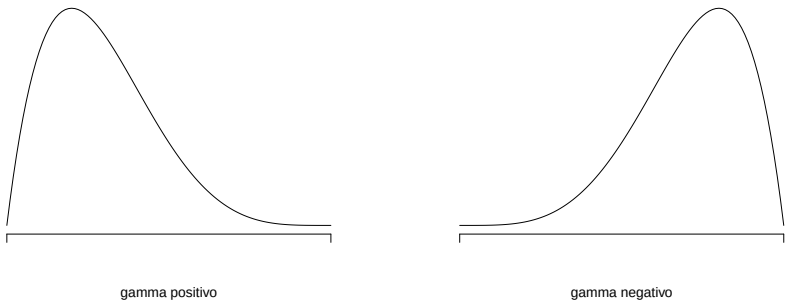

Figura 2.2: Distribuzione probabilistica del valore di un portafoglio

Per questi strumenti è utile correggere la stima della sensibilità del valore di mercato delle singole posizioni considerando anche la curvatura della relazione tra il valore di mercato e il fattore di rischio quindi la convessità delle obbligazioni e il gamma γ delle opzioni. In particolare per le opzioni l'impatto del γ sulla distribuzione probabilistica del valore del portafoglio porta a una asimmetria positiva se il coefficiente è positivo mentre una asimmetria negativa nel caso di coefficiente negativo come rappresentato nella figura 2.2. È dimostrato che il gamma di una *call* lunga è positivo e se la distribuzione probabilistica del prezzo dell'attività sottostante è normale, allora la distribuzione probabilistica del prezzo dell'opzione ha asimmetria positiva. Viceversa una *call* corta ha un gamma negativo e la distribuzione normale del prezzo dell'attività sottostante porta a una distribuzione del valore della posizione con asimmetria negativa.

Come già scritto, il VaR di un portafoglio è strettamente connesso alla coda sinistra della distribuzione probabilistica delle variazioni del valore di mercato della posizione ΔVM e nel caso di un livello di confidenza del 99%, il VaR rappresenta il valore della coda di sinistra al di sotto della quale vi rientra solo l'% della distribuzione. Nel caso di un portafoglio con gamma positivo, quindi con una sottile coda di sinistra, e ipotizzando una distribuzione normale di VM si otterrebbe una sovra-stima del VaR. In modo analogo, in presenza di gamma

negativo e una coda di sinistra spessa si tenderebbe a sotto-stimare il VaR.

Una stima più accurata si può ottenere considerando la *convexity* per le obbligazioni e il gamma per le opzioni, oltre alla *modified duration* e al delta.

Ad esempio, se si valuta un portafoglio con delta pari a δ e gamma uguale a γ e che dipende da una sola attività il cui prezzo è indicato con S è possibile ottenere una migliore approssimazione calcolando:

$$\Delta VM = \delta \Delta S + \frac{1}{2}\gamma(\Delta S)^2$$

in cui, usando la posizione

$$\Delta x = \frac{\Delta S}{S}$$

si ottiene la relazione:

$$\Delta VM = S\delta\Delta x + \frac{1}{2}S^2\gamma(\Delta x)^2. \tag{2.16}$$

In relazione a un generale portafoglio con n variabili di mercato sottostanti, in cui ogni strumento dipende da una sola variabile, la relazione diventa:

$$\Delta VM = \sum_{i=1}^{n} S_i\delta_i\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}S_i^2\gamma_i(\Delta x_i)^2$$

nella quale S_i è il valore dell'$i-$esima variabile di mercato e δ_i e γi sono il delta e il gamma rispetto alla $i-$esima variabile di mercato.

La complessità di questo approccio consiste nell'identificazione della forma della distribuzione delle variazioni del portafoglio. Infatti con il metodo *delta-normal* le variazioni del valore del portafoglio sono lineari rispetto alle variazioni dei fattori di mercato, mentre in questo caso la distribuzione delle variazioni del valore del portafoglio è funzione della combinazione di un'approssimazione lineare (parametro δ) e di una quadratica (parametro γ). Ad esempio se si considera la seguente equazione per esprimere le variazioni del valore di una *call* rispetto alle variazioni del valore del sottostante:

$$\Delta C \approx \partial\Delta S + \frac{1}{2}\Delta S^2 \tag{2.17}$$

è chiaro che ΔS e ΔS^2 non possono essere entrambi distribuiti secondo una normale, in particolare se ΔS è normale, allora ΔS^2 è distribuito secondo una χ^2 e perciò ΔC non necessariamente è distribuita secondo una normale.

Tuttavia l'utilizzo dell'approccio delta-gamma talvolta può portare a stime distorte poichè le opzioni oltre ai problemi connessi alla non linearità dei *payoff* possono presentare anche la «non-monotonicità» della relazione tra valore dell'opzione e valore dell'attività sottostante, come nel caso di uno *straddle*[12]. In questo caso rivalutare la posizione rispetto alle condizioni di mercato ottenute in base alla stima delle variabili rilevanti, quindi attraverso una *full-valuation* porterebbe a stime più precise[13].

2.3 La stima della matrice di varianze-covarianze

Una delle criticità dell'approccio parametrico risiede nella previsione della volatilità dei fattori di mercato e la relativa correlazione. Questo problema viene affrontato non solo nell'ambito del *risk management* ma si estende anche al *pricing* dei contratti di opzione e in ambito di *asset allocation* per la determinazione di portafogli efficienti in base al criterio media-varianza.

Elaborare modelli che considerano la varianza dei fattori di mercato e le correlazioni tra tali variabili come un valore costante nel tempo attraverso lo scarto quadratico medio dei rendimenti su un periodo storico è in contrasto con l'evidenza empirica.

Affermare che la volatilità e le correlazioni non sono costanti nel tempo significa riconoscere che in alcuni periodi la volatilità può essere relativamente bassa e in altri relativamente elevata[14] e computare così un valore a rischio adeguato in base alle condizioni del mercato. Fra i vari modelli che riescono a coglie-

[12]Contestuale acquisto di un'opzione *call* e di un'opzione *put* con lo stesso *strike price* e medesima scadenza.

[13]Hull, 2009.

[14]Questa caratteristica viene chiamata *persistenza* della volatilità.

re l'evoluzione temporale della varianza si ricordano: la media mobile con pesi esponenziali, i modelli a eteroschedasticità condizionata autoregressiva in base ai quali è possibile effettuare delle previsioni e la volatilità implicita nel prezzo delle opzioni che corrisponde alla valutazione della volatilità da parte del mercato.

Come affermato dalla Equazione (2.2) i rendimenti dei fattori di mercato, indicati con u_i, vengono calcolati dal logaritmo naturale del rapporto tra il valore della variabile di mercato S al tempo i rispetto al valore al tempo $i-1$ in modo da ottenere il tasso di rendimento composto continuamente durante il giorno i, cioè:

$$u_i = ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right). \tag{2.18}$$

In base alle m più recenti osservazioni dei rendimenti u_i la stima corretta del tasso di varianza giornaliero è:

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(u_{n-i} - \bar{u})^2 \tag{2.19}$$

dove con $\bar{u}$ si indica la media campionaria delle u_i:

$$\bar{u} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} u_{n-i}$$

Di solito per computare il VaR nell'Equazione (2.20) si assume che $\bar{u}$ sia nulla e si sostitusce $m-1$ con m passando da una stima corretta della varianza a una stima di massima verosimiglianza. La formula del tasso di varianza diventa perciò:

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} u_{n-1}^2 \tag{2.20}$$

Questo è un metodo semplice e molto diffuso per stimare la volatilità storica a scopo previsionale. Il calcolo si basa sulle medie mobili, cioè della media relativa a un numero fisso di dati, indicati con m, che avanzano nel tempo in modo da sostituire il dato più lontano con quello più recente e mantenendo fissa la dimensione del campione.

In realtà questo calcolo presenta la peculiarità che le stime possono variare sensibilmente al variare dell'ampiezza del campione di dati. Infatti se si usa un lungo periodo passato le nuove condizioni del mercato verrebbero assorbite solo in via marginale, mentre un breve intervallo temporale davanti a uno *shock* dei mercati presenterebbe una variazione molto pronunciata della volatilità della variabile di mercato. In modo analogo quando il dato anomalo esce dal campione la stima cambia senza probabilmente alcuna variazione di rilevo nel fattore di mercato oggetto di analisi.

Per valutare più accuratamente il livello attuale di volatilità viene frequentemente usato un sistema di ponderazioni in modo da dare maggiore importanza ai dati più recenti:

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_{n-1}^2, \tag{2.21}$$

in cui $\alpha_i \in [0, 1]$ indica il peso assegnato al dato di i giorni fa e i pesi decrescono via via che le osservazioni diventano più lontane del tempo e la somma delle ponderazioni deve essere pari all'unità:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$$

Si può estendere questa idea assumendo anche che esista una volatilità media di lungo periodo e alla quale si desidera dare rilievo. Il modello che si ottiene è il seguente:

$$\sigma_n^2 = \gamma V_L + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_{n-i}^2 \tag{2.22}$$

dove con V_L viene indicata la varianza di lungo periodo e $\gamma \in [0, 1]$ è peso assegnatole. Di nuovo, la somma di tutti i pesi deve essere sempre pari all'unità:

$$\gamma + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1.$$

Questo modello è stato inizilamente proposto da Engle (1982) e è noto come ARCH(m). La varianza viene stimata attraverso una varianza media di lungo

periodo e m osservazioni con pesi che diminuiscono in base alla distanza nel tempo. Ponendo $\omega = \gamma V_L$ il modello diventa:

$$\sigma_n^2 = \omega + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_{n-i}^2. \tag{2.23}$$

2.3.1 La stima attraverso le medie mobili esponenziali

Questo metodo di calcolo, elaborato da J.P. Morgan e definto varianza *RiskMetrics*, riesce a superare i problemi prima evidenziati, riguardo l'alterazione che la stima subisce in base allo slittamento del campione di dati man mano che si raccolgono dati recenti, attraverso un sistema di ponderazioni non uniformi. Si tratta di un modello particolare rispetto agli schemi di ponderazione appena esposti nel quale i pesi α_i diminuiscono in modo esponenziale in base alla distanza dei valori nel tempo. In particolare, rispetto alla Equazione (2.22) si ha che $\alpha_{i+1} = \lambda\alpha_i$, nel quale λ è una costante compresa tra 0 e 1. L'espressione analitica per aggiornare le stime della volatilità è la seguente:

$$\sigma_n^2 = \lambda\sigma_{n-1}^2 + (1-\lambda)u_{n-i}^2. \tag{2.24}$$

Una formula compatta si ottiene se, nell'equazione appena descritta, si sostituiscono via via i valori di $\sigma_{n-1}^2, \sigma_{n-2}^2, ..., \sigma_{n-m}^2$:

$$\sigma_n^2 = (1-\lambda)\sum_{i=1}^{m} \lambda^{i-1} u_{n-i}^2 + \lambda^m \sigma_{n-m}^2 \tag{2.25}$$

Per m sufficientemente elvato $\lambda^m \to 0$ e quindi il termine $\lambda^m\sigma_{n-m}^2$ è pressoché irrilevante e l'equazione equivale alla (2.21) con $\alpha_i = (1-\lambda)\lambda^{i-1}$.

Questo approccio presenta il vantaggio che i dati utilizzati sono relativamente pochi, quotidianamente serve solo «memorizzare» la stima corrente del tasso di varianza e il più recente valore di mercato per trovare il nuovo valore di u^2. Le variazioni della volatilità vengono considerate soprattutto se il valore di λ è basso, ad esempio se il giorno $n-1$ il fattore di mercato registra un forte rialzo tale da determinare un alto valore di u_{n-1}^2 la volatilità σ_n stimata per il giorno n

aumenta. In particolare, è il valore del fattore λ che determina in che misura la stima della volatilità giornaliera reagisce alle recenti variazioni dei rendimenti; così un basso valore di λ determina stime molto volatili per i giorni successivi mentre un valore di λ prossimo a 1 fa sì che le reazioni siano molto contenute[15]. Inoltre il *decay factor* λ consente di adeguare la stima in modo progressivo, infatti nell'eventualità che un dato al rialzo dell'indice esca dal campione la stima diminuisce in modo graduale e non improvviso.

Nel caso in cui venga scelto un valore $\lambda = 1$ le ponderazioni diventano uguali per tutte le osservazioni passate e si ritornerebbe alla varianza semplice espressa dall'Equazione (2.21) e, in questo caso, anche le osservazioni passate hanno un certo ruolo nel calcolo della volatilità.

2.3.2 La previsione della volatilità avvalendosi dei modelli GARCH

Questa classe di modelli è stata inzialmente proposta da Bollerslev (1987) per far fronte ai problemi legati alla scarsa flessibilità e all'onerosità di dati che contraddistinguono i modelli ARCH. L'acronimo GARCH (*Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*) sta ad indicare che si tratta di modelli a eteroschedasticità condizionale autoregressiva, ovvero riconoscono che la volatilità cambia nel tempo e che i livelli passati di volatilità influenzano i livelli futuri.

Dal punto di vista empirico, le serie storiche finanziarie presentano periodi relativamente tranquilli con bassa volatilità interrotti da significative fluttuazioni in aumento che possono persistere anche per molto tempo, questo fenomeno viene definito *volatility clustering*.

Una precisazione diventa necessaria. La stima prodotta da modelli come le medie mobile esponenziali, o in generale la varianza calcolata come costante a partire da campioni più o meno ampi di dati storici, è definita varianza non

[15] Per l'aggiornamento giornaliero della stima della volatilità il valore di λ secondo il database RiskMetrics, creato da J.P. Morgan e divulgato nel 1994 , è pari a $0,94$.

condizionale. Invece, nei modelli GARCH si effettua una stima della varianza condizionale, che si ottiene attraverso la specificazione di un modello. Il calcolo della varianza condizionale richiede anche la stima della media condizionale, ma nelle applicazioni finanziarie qui analizzate sarà approssimata a un valore nullo o al tasso *risk free*. Tuttavia esistono diverse versioni dei modelli GARCH che differiscono in base alla specificazione della forma funzionale adottata.

L'equazione analitica che rappresenta il modello generale GARCH(p, q) è:

$$\sigma_n^2 = \gamma V_L + \alpha_1 u_{n-1}^2 + ... + \alpha_p u_{n-p}^2 + \beta_1 \sigma_{n-1}^2 + ... + \beta_q \sigma_{n-q}^2 \tag{2.26}$$

La varianza condizionale viene quindi modellizzata inserendo le p più recenti osservazioni relative a u^2, ovvero il tasso di rendimento al quadrato della variabile di mercato considerata, e q ritardi relativi ai valori passati della stessa varianza. La varianza condizionale dipende così anche dai propri valori storici, in particolare l'inserimento dei disturbi al quadrato catturano l'evoluzione di breve/brevissimo periodo della variabile considerata mentre i valori passati della varianza assorbono gli effetti di lungo periodo.

Tuttavia la maggioranza dei modelli GARCH viene specificata in base alla versione GARCH(1,1) e l'equazione corrispondente è:

$$\sigma_n^2 = \gamma V_L + \alpha u_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2 \tag{2.27}$$

dove la somma dei pesi deve essere pari all'unità:

$$\gamma + \alpha + \beta = 1.$$

È possibile ora affermare che le medie mobili esponenziali non sono altro che un caso particolare del GARCH(1,1) con $\gamma = 0$, $\alpha = (1 - \lambda)$ e $\beta = \lambda$.

Ponendo $\omega = \gamma V_L$, il modello generale con un solo ritardo può essere esplicitato nel modo seguente:

$$\sigma_n^2 = \omega + \alpha u_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2 \tag{2.28}$$

ed è questa la versione usata generalmente per la stima dei parametri. Prima vengono stimati ω, α e β e successivamente è possibile ottenere il valore di γ come $\gamma = 1 - \alpha - \beta$. La varianza di lungo periodo V_L viene calcolata dal rapporto ω/γ. Per ottenere un modello stabile è necessario che dalla stima dei parametri risulti $\alpha + \beta < 1$ altrimenti il peso assegnato a V_L è negativo. Purtroppo a volte, il modello GARCH può non essere stabile e la soluzione più ragionevole dinnanzi a questo problema sarebbe ritornare a stimare la volatilità avvalendosi del metodo medie mobili esponenziali.

Sebbene il modello si basi su un unico ritardo, esso è caratterizzato da una memoria infinita, infatti sostituendo σ^2_{n-1} nell'equazione (2.29) si ottiene:

$$\sigma^2_n = \omega + \alpha u^2_{n-1} + \beta(\omega + \alpha u^2_{n-2} + \beta\sigma^2_{n-2})$$

da cui:

$$\sigma^2_n = \frac{\omega}{1-\beta} + \alpha \sum_{i=1}^{\infty} \beta^{i-1} u^2_{n-1}.$$

Dato che i pesi diminuiscono esponenzialmente al tasso β, questo fattore può essere interpretato come *decay factor*, ovvero tasso di declino temporale alla stregua del λ delle medie mobili esponenziali.

Il modello fin qui esposto riconosce il fenomeno di correlazione seriale e lo esplicita attraverso un modello autoregressivo che riconosce una certa importanza alle informazioni provenienti dai possibili *shock* di mercato che le variabili possono registrare, lasciando che siano i dati stessi a determinare il valore del *decay factor*.

Allo stesso modo il modello presenta alcuni punti deboli, esso conserva l'ipotesi di normalità, anche se riferita alla distribuzione dei disturbi e non coglie il segno degli *shock* di mercato. Poiché il valore u_n viene elevato al quadrato, il suo effetto sulla stima è indipendente dal segno dell'osservazione. Ciò è in contrasto con l'evidenza empirica dei mercati azionari perché in genere la volatilità aumenta quando vi è un calo dei prezzi azionari ma rimane invariata quando

il valore del mercato sale[16]. Quindi con questo metodo di stima è possibilie registrare innalzamenti della volatilità, anche quando il suo valore effettivo non è mutato.

Per superare questi limiti sono state proposte altre specificazioni del modelli GARCH e le più diffuse e concretamente utilizzate per la previsione della volatilità di variabili finanziarie a scopo di *risk management* sono l'*Exponential* GARCH (EGARCH) e l'*Asymmetric* GARCH (AGARCH).

Nella versione EGARCH viene modellizzato il logaritmo naturale della varianza e non la varianza per far sì che la parte destra dell'equazione possa diventare negativa anche senza creare problemi. Analiticamente:

$$ln(\sigma_n^2) = \omega + \alpha \frac{\left|u_{n-1}^2\right|}{\sigma_{n-1}^2} + \beta\sigma_{n-1}^2 + \gamma \frac{u_{n-1}}{\sigma_{n-1}} \tag{2.29}$$

Per considerare la risposta asimmetrica della volatilità rispetto a improvvisi *shock* al rialzo o al ribasso è stata elaborata la versione AGARCH con la seguente equazione di specificazione:

$$\sigma_n^2 = \omega + \alpha(u_{n-1} - \vartheta)^2 + \beta\sigma_{n-1}^2 \tag{2.30}$$

Il parametro ϑ, positivo per definizione, viene introdotto per risolvere il problema relativo alla simmetria e amplifica l'effeto degli *shock* negativi e attenua quello degli *shock* a rialzo nella previsione della volatilità. Inoltre questo modello permette la possibilità di curtosi poiché generalmente assume una distribuzione t di $Student$ anziché una normale per i rendimenti.

2.3.3 La volatilità implicita

La stima della volatilità può avvenire anche attraverso il prezzo delle opzioni. A prescindere dal modello di *pricing* utilizzato, il prezzo delle opzioni è funzione

[16] Si tratta del cosiddetto *leverage effect*, infatti il valore del patrimonio di una società che emette titoli azionari diminuisce se i prezzi scendono aumentando così la leva finanziaria dell'impresa e il rischio finanziario connesso. Al contrario, quando il prezzo dei titoli aumenta si registra una diminuzione della variabilità della redditività attesa per gli azionisti.

del prezzo di esercizio, del prezzo di mercato del sottostante, della vita residua dell'opzione, del tasso *risk free* e della volatilità sottostante.

Il calcolo avviene attraverso un procedimento inverso poiché si conosce il valore di tutte le variabili prima elencate fuorché il valore della deviazione standard σ. In genere le formule di *pricing* delle opzioni, come la formula *Black e Scholes* non possono essere invertite analiticamente quindi si usa un processo iterativo denominato metodo delle tangenti[17].

I risultati che si ottengono con questo approccio possono differire sensibilmente a seconda se l'opzione utilizzata è *at-the-money*, *in-the-money* o *out-of-money*. In particolare, se il calcolo avviene con opzioni *at-the-money* i valori stimati della volatilità sono generalmente inferiori rispetto ad un calcolo che utilizza opzioni *in- o out-of-money* e questo fenomeno è definito *volatility smile*[18].

Stimare la volatilità implicita è utile per avere una visione *forward-looking* circa l'evoluzione futura della volatilità, perché deriva da stime attuali in base ai prezzi correnti del mercato. L'esattezza dei valori ottenuti dipende tuttavia dal fatto che il modello di *pricing* deve essere attendibile e largamente diffuso tra gli operatori dei mercati. Inoltre nel mercato dove viene contrattata l'opzione devono sussistere negoziazioni stabili e senza squilibri in relazione a domanda e offerta, accompagnate anche da un alto grado di liquidità.

È facile intuire che per gli scopi di *risk management* questa metodologia di calcolo non è utilizzabile poiché non esistono opzioni relative ai più svariati sottostanti dei quali è indispensabile stimare la variabilità e non tutti i mercati sono liquidi, efficienti e organizzati. Infine si dovrebbe considerare un opzione che presenta una vita residua che coincida con l'orizzonte temporale scelto per le

[17] In alternativa, processo di Newton-Raphson.

[18] Questo nome è stato assegnato poiché la rappresentazione grafica della volatilità implicita di opzioni con diverso prezzo di esercizio assomiglia ad un sorriso, in quanto le opzioni *at the money* hanno un coefficiente vega maggiore. Tale fenomeno viene spiegato anche come una sorta di correzione da parte del mercato in base al fatto che le code della distribuzione empirica sono più spesse della normale e il modello *Black e Scholes* produce un errata valutazione delle opzioni *in-* e *out-of-money*.

stime di rischio.

2.3.4 Le correlazioni

Se si desidera calcolare il VaR di un portafoglio è fondamentale servirsi della stima delle correlazioni tra i diversi fattori di mercato e non solo della volatilità di ciascuna variabile. La correlazione serve per individuare se tra due variabili estite o meno una relazione di dipendenza lineare ed è definita dal seguente rapporto:

$$\frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Se si considerano due variabili di mercato X e Y, come ad esempio due indici azionari, e si indicano con x_i e y_i e si calcolano i relativi tassi di rendimento calcolati in base all'Equazione (2.19), la stima della correlazione tra questi rendimenti per il giorno n è:

$$\frac{cov_n}{\sigma_{X,n}\sigma_{Y,n}}$$

dove con $\sigma_{X,n}$ e $\sigma_{Y,n}$ sono indicate la stima per il giorno n della volatilità rispettivamente per la variabile X e Y e con cov_n la stima per il giorno n della covarianza tra le due variabili. La stima della varianza in base alle m più recenti osservazioni viene calcolata ipotizzando la media nulla dei rendimenti e in modo analogo la covarianza è:

$$cov_n = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_{n-1}y_{n-1}. \tag{2.31}$$

In alternativa, se si utilizza il metodo delle medie mobili esponenziali l'aggiornamento della stima della covarianza avviene in base alla seguente equazione:

$$cov_n = \lambda cov_{n-1} + (1-\lambda)x_{n-1}y_{n-1} \tag{2.32}$$

dove i pesi corrisposti alle $x_i y_i$ diminuiscono in modo esponenziale via via che diventano più lontani nel tempo.

Infine anche i modelli GARCH possono essere utilizzati per la stima della covarianza e prevederne il livello futuro. L'aggiornamento della covarianza

attraverso un modello GARCH(1,1) avviene in base al modello:

$$cov_n = \omega + \alpha x_{n-1} y_{n-1} + \beta cov_{n-1} \tag{2.33}$$

e la covarianza di lungo periodo è $\omega/(1-\alpha-\beta)$.

Una volta calcolate le varianze e covarianze è possibile costruire la matrice di varianze-covarianze per il calcolo del VaR di un portafoglio. Tuttavia la matrice deve risulatare internamente coerente cioè in base alla Equazione (2.10) occorre che:

$$\overline{V}_T \times C \times V \geq 0$$

dove con V^T si indica il vettore composto dal VaR delle singole posizioni, con C la matrice dei coefficienti di correlazione e con $\overline{V}^T$ si la trasposta del vettore $\overline{V}$. Le matrici che soddisfano questa condizione sono «positive semi-definite».

Per garantire la certezza di ottenere una matrice «positiva semi-definita» è necesario calcolare varianze e covarianze in modo coerente. Infatti se le correlazioni vengono calcolate assegnando un peso alle m osservazioni più recenti, esso deve essero il medesimo peso usato per il calcolo delle varianza o se si utilizzano le medie mobili esponenziali, il valore del coefficiente λ deve essere lo stesso.

2.4 I modelli di simulazione

Questi modelli, definiti anche *metodi non parametrici*, si distinguono rispetto al metodo parametrico perché non richiedono la formulazione di alcuna ipotesi riguardo la forma della distribuzione dei fattori di mercato. Come anticipato, si tratta della stima attraverso le *simulazioni storiche*, il *metodo Monte Carlo* e le *prove di stress*. Tuttavia questa definizione non è propriamente adatta per il metodo Monte Carlo poiché è richiesto di selezionare una distribuzione analitica multivariata per i rendimenti dei fattori di mercato e stimarne i parametri[19].

Le caratteristiche comuni di questi metodi sono:

[19] Sironi, 2005.

- la *full valuation* in quanto il portafoglio viene completamente rivalutato in base alle nuove condizioni di mercato simulate superando così i problemi connessi con la non-linearità dei *payoff*;

- il calcolo del VaR in base al livello di confidenza prescelto non viene determinato ipotizzando una distribuzione normale dei rendimenti dei fattori di mercato ma si utilizza la logica del percentile, ''tagliando" la distribuzione empirica di probabilità delle variazioni di valore del portafoglio al percentile di confidenza prescelto. Il vantaggio connesso a questa procedura è che è adatto a valutare le situazioni in cui la relazione tra il valore di mercato dello strumento, o del portafoglio, con i fattori di mercato non è monotòna[20];

- non viene assunta l'ipotesi di distribuzione normale dei rendimeti, infatti le simulazioni storiche utilizzano la distribuzione empirica storica mentre il metodo Monte Carlo lasciano la scelta al ricercatore.

In particolare, rispetto all'ultima caratteristica, numerosi studi empirici hanno riconosciuto la non-normalità dei rendimenti e lo stesso Comitato di Basilea attraverso il fattore moltiplicatore, che può variare da un valore pari a 3 fino a un massimo di 4[21], ha voluto garantire una protezione da elementi di *model risk* che si incorrono qualora si utilizzi nei modelli interni l'ipotesi di normalità.

2.4.1 Le simulazioni storiche

Il calcolo del VaR di una posizione esposta ad un unico fattore di mercato avviene secondo un procedimento in cui la distribuzione empirica storica è sufficiente per il calcolo.

Per prima cosa si deve selezionare il campione di rendimenti giornalieri da utilizzare ai fini della simulazione e successivamente si rivaluta il valore della po-

[20] Ad esempio quando si valutano particolari strategie operative mediante opzioni scritte sullo stesso titolo, come ad esempio: *straddles*, *strips*, *straps* o *strangles*.

[21] Si veda Capitolo 1, Equazione (1.5), pag 32.

sizione in corrispondenza di ogni variazione intervenuta nell'intervallo di tempo considerato. I valori che si ottengono devono essere ordinati partendo dalla massima perdita fino al massimo guadagno che sarebbero stati conseguiti ottenendo così la distribuzione empirica di probabilità del valore del portafoglio. Una volta scelto il livello di confidenza si ''taglia" la distribuzione empirica in corrispondenza di quel valore e l'importo del VaR corrisponde al valore della perdita che l'esposizione avrebbe subito in base alle simulazioni.

Se si desidera calcolare il VaR di un portafoglio che contiene posizioni su più mercati azionari è possibile rappresentare le variazioni dei fattori di mercato utilizzando i diversi indici di borsa cui i titoli fanno riferimento e costruire la distribuzione empirica delle variazioni del portafoglio e procedere con la selezione del percentile. Si noti che le *performance* peggiori registrate da un indice non corrispondono necessariamente alle maggiori perdite subite dal portafoglio.

Quindi le fasi da seguire per calcolare il VaR di un portafoglio che contiene posizioni su più indici azionari possono essere così riassunte:

1. in prima istanza si deve quantificare il valore del portafoglio in base alle attuali condizioni di mercato e il rispettivo valore investito in ciascun indice azionario;

2. si seleziona un campione di dati storici degli indici azionari considerati ai fini della simulazione, potrebbe essere un intervallo di 253 giorni[22] relativo ai più recenti dati a disposizione oppure potrebbe essere in relazione ad un anno caratterizzato da elevato stress finanziario ai fini del calcolo dello *stressed-VaR*[23];

3. successivamente devono essere calcolate le variazioni percentuali giornaliere come rapporto tra il valore dell'indice del giorno i e il valore nel giorno

[22] In genere i giorni di negoziazione durante un anno sono 252, il campione è composto da un dato in più perché con la simulazione si vogliono creare 252 scenari.
[23] Basilea, 2009a.

$i-1$;

4. si calcola il valore che il portafoglio avrebbe avuto durante le variazioni intervenute durante il campione selezionato, quindi avendo a disposizione 253 dati relativi ai valori giornalieri degli indici si ottengono 252 scenari, quindi lo scenario i-esimo è quello che si ottiene moltiplicando il valore attuale del portafoglio con la variazione percentuale registrata da ciascun indice azionario tra il giorno $i-1$ e il giorno i per $1 \leq i \leq 252$;

5. una volta ottenuto il valore del portafoglio in corrispondenza di ciascun scenario, si devono calcolare i guadagni e le perdite e i valori così ottenuti devono essere ordinati dalla massima perdita al massimo guadagno;

6. infine si seleziona nella distribuzione empirica di probabilità il valore della perdita corrispondente al livello di confidenza prescelto e tale valore corrisponde al VaR.

La stima così ottenuta è in termini giornalieri, quindi per calcolare la stima per orizzonti temportali di dimensione N si deve moltiplicare il VaR per $\sqrt{N}$, come nell'equazione 2.6 relativamente ai metodi parametrici.

Sebbene questo metodo offra alcuni vantaggi, come l'assenza di ipotesi di normalità dei rendimenti e la praticità nel valutare posizioni con *payoff* non lineari o con rendimenti non monotòni, vi sono alcuni problemi che portano a una stima del VaR talvolta errata.

Per una istituzione finanziaria calcolare il VaR significa poter contare su una stima veloce e completa del rischio ad essa ancorato. Se il calcolo avviene attraverso il metodo delle simulazioni storiche è facile intuire che rivalutare l'intero portafoglio di posizioni dell'istituzione alle passate condizioni di mercato diventa molto oneroso e i tempi per computare tutti i dati diventano molto lunghi oltepassando le esigenze di quantificare il rischio rispetto all'attività di *trading*.

Implicitamente questo modello assume che la distribuzione storica dei rendimenti dei fattori di mercato sia stabile, ovvero che la distribuzione futura sarà uguale a quella passata. I rendimenti vengono cioè considerati come realizzazioni di distribuzioni indipendenti e identicamente distribuite e questa ipotesi è scarsamente valida sia dal punto di vista operativo che concettuale davanti a rendimenti che presentano volatilità non costante nel tempo.

Infine anche il campione di dati utilizzato per la stima presenta alcuni problemi connessi al fatto che gli eventi estremi, quindi i valori che si posizionano sulle code della distribuzione e maggiormente interessanti dal punti di vista del *risk management*, non si verificano con una frequenza molto elevata e il campione potrebbe sovra o sottorappresentarli. Tuttavia estendere il campione di dati comporterebbe includere valori ormai «obsoleti», perciò diventa necessario individuare la relazione di *trade-off* riguardo la lunghezza ottimale del campione.

Alcuni studiosi[24] hanno cercato di combinare attraverso un *approccio ibrido* il metodo delle simulazioni storiche con il metodo parametrico per superare il problema legato al *trade-off* appena enunciato. Essi aggiungono una fase al metodo delle simulazioni storiche attribuendo ponderazioni alle osservazioni storiche comprese nell'intervallo da $(t-1)$ a $(t-n)$, in modo da dare maggiore rilievo a quelle più recenti. I sitstema esposto è rappresentato dalla seguente equazione:

$$P_{t-1} = \frac{\lambda^i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda^i} \tag{2.34}$$

dove P_{t-1} rappresenta il valore della posizione o del portafoglio e il coefficiente λ assume valori compresi tra 0 e 1. Il VaR questa volta viene determinato ''tagliando'' la distribuzione empirica in corrispondenza del valore della ponderazione cumulata relativa al livello di condifenza desiderato.

[24] Boudoukh, Richardson e Whitelaw (1998).

Eppure introducendo questa modifica persistono ancora i problemi relativi alla instabilità nel tempo dei rendimenti dei fattori di mercato e attraverso il metodo delle *simulazioni storiche filtrate*[25] si è cercato di porvi soluzione.

Si tratta di un metodo concretamente utilizzato al LIFFE *London International Financial Futures Exchange* e utilizza un modello GARCH per filtrare i dati e rendere i residui i.i.d. e successivamente applica una tecnica di *bootstrap* su tali residui per generare gli scenare necessari per il calcolo del VaR in base alla logica del percentile. I rendimenti vengono standardizzati per la volatilità, ovvero «filtrati», in base alla stima della volatilità condizionata relativa al giorno corrispondente e se la stima è corretta i residui del modello sono i.i.d. ed è possibile lavorare su di essi.

Successivamente si procede all'estrazione casuale di campioni da una serie storica, ai quali è tuttavia possibile dare un peso maggiore alle osservazioni più recenti e far sì che questo decresca in modo esponenziale. La stima del VaR in base alla logica del percentile avviene sulla distribuzione costruita con i valori della serie storica degli *shock* filtrati e aggiornati in base alla stima della volatilità condizionata relativa al periodo per il quale si desidera stimare il valore a rischio.

2.4.2 Le simulazioni Monte Carlo

Il problema relativo alla carenza di nuovi dati può essere superato generandone di nuovi, ossia avvalendosi delle simulazioni Monte Carlo. Questo metodo è largamente utilizzato nei modelli di *pricing* e la stessa logca viene estesa per risolvare problemi di *risk management*.

Il metodo Monte Carlo richidede diversi passaggi, in particolare per la stima del VaR di una posizione soggetta a una singola variabile di mercato si deve partire dall'individuazione della distribuzione statistica che meglio si adatta ad approssimare la distribuzione dei rendimenti dei fattori di mercato studiata e del-

[25] Elaborato da Barone-Adesi e Giannopoulos (1998).

la quale vanno stimati media, varianza, curtosi e asimmetria. Successivamente si devono simulare molti (circa 10.000) scenari evolutivi della variabile in esame. Spesso si ricorre ad un generatore di numeri casuali attraverso l'estrazione da una distribuzione uniforme con valori compresi tra 0 e 1. Una volta simulati i diversi scenari si deve calcolare il valore della posizione in corrispondenza di ognuno di essi e infine, come nelle simulazioni storiche, si deve ''tagliare" la distribuzione empirica in corrispondenza del percentile corrispondente al livello di confidenza desiderato.

Per stimare il VaR di un portafoglio con le simulazioni Monte Carlo è necessario esaminare anche la struttura delle correlazioni tra i diversi fattori di mercato. Dato l'elevato numero di scenari da simulare, i risultati ottenuti potrebbero essere incoerenti in particolare se la simulazione degli scenari avviene in modo indipendente. Le fasi di calcolo sono diverse rispetto al caso univariato. In prima istanza è necessario stimare la matrice di varianze-covarianze dei rendimenti di mercato (Σ) e scomporla in due matrici simmetriche in base alla scomposizione di Cholesky ($\Sigma = AA^T$). Successivamente si genera un vettore di numeri casuali z al quale si moltiplica la matrice A^T per ottenere i divesi scenari di evoluzione dei fattori di mercato, tenendo conto delle correlazioni tra essi. Infine si costruisce la distribuzione empirica di probabilità del valore del portafoglio in relazione a ciascun scenario individuato che viene ''tagliata" in corrispondenza del livello di confidenza scelto per calcolare il VaR.

A fronte di alcuni importanti vantaggi di questo metodo come la possibilità di scegliere la forma funzionale della distribuzione dei rendimenti che più si adatta alla distribuzione effettiva e l'adeguatezza come metodo per calcolare anche particolari categorie di opzioni, come le opzioni esotiche, resta anche in questo caso il problema relativo alla stabilità della matrice di varianze-covarianze. Tuttavia i calcoli richiesti per simulare una elevata quantità di scenari sono particolarmente onersi in termini di tempo, si potebbero impiegare anche diverse ore, e di risosrse

informatiche.

2.4.3 Le prove di stress

Le stime VaR vengono calcolare con lo scopo di individuare la massima perdita che si potrebbe ottenere sotto condizioni ''normali'' di mercato, tipicamente il concetto di normalità, riferito a variazioni ordianrie nei rendimenti dei fattori di mercato, viene tradotto in termini numerici adottando un livello di confidenza del 99%. Tale livello però, quando si ipotizza una distribuzione normale dei rendimenti dei fattori di mercato, non coglie in modo adeguato la portata degli eventi che si trovano sulla distribuzione empirica poiché questa, come verrà in seguito spiegato con maggiore precisione, ha code più spesse rispetto alla distribuzione normale. I sistemi VaR devono perciò essere integrati con delle prove di stress volte a rivalutare il valore del portafoglio in situazioni di mercato estremamente negative, che per quanto improbabili sono considerate possibili.

Come è stato esposto nel Capitolo 1, le prove di stress sono richieste dal Comitato di Basilea come requisito per l'adozione dei modelli interni, fin dalla loro prima introduzione nell'emendamento del 1996[26]. Avvalersi di prove di stress per identificare e gestire situazioni che potrebbero causare perdite straordinare è peraltro suggerito anche dal *Derivatives Policy Group* e dal G-30.

Il compito degli *stress testing* è individuare scenari estremi che non verrebbero colti utilizzando i tradizionali modelli per il computo del VaR. Queste circostanze straordinarie sono state classificate da Berkowitz (2000) in due categorie:

1. simulazioni di *shock* che non sono mai accaduti ma che potrebbero accadere con una probabilità più elevata rispetto a quanto le stime dai valori storici non suggeriscano;

[26] Basilea, 1996

2. riprodurre eventi che riflettono *break* strutturali permanenti simili a quelli già avvenuti o cambiamenti temporanei nelle variabili statistiche di riferimento.[27]

Teoricamente risultati simili potrebbero essere ottenuti applicando il metodo delle simulazioni storiche con un livello di confidenza più elevato oppure avvalendisi dell'*Extreme-Value Theory* come sarà illustrato nel Capitolo 4.

Tipicamente le misure VaR usano un dataset relativamente recente al contrario delle prove di stress che non usano dati storici ma valori estremamente pessimistici, considerati scarsamente probabili. L'importanza delle prove di stress è facilmente comprensibile in relazione alle perdite subite dai mercati, sia recenti che nel passato, e la scarsa prevedibilità di esse in base ai dati storici.

Nel 1995 il *Derivatives Policy Group* ha pubblicato alcuni suggerimenti di natura quantitativa per dare una sorta di guida alle prove di stress. Essi riguardano la generalità dei fattori di mercato e sono in relzione alle variazioni da applicare nelle prove, si tratta di:

- spostamenti paralleli, al rialzo o al ribasso, della curva dei rendimenti di 100 punti base;
- la variazione dell'inclinazione della curva dei rendimenti di $\pm$ 25 punti base;
- variazioni degli indici di borsa, al rialzo o al ribasso, di 10 punti percentuali;
- variazioni dei tassi di cambio di $\pm$ 6 punti percentuali;
- variazioni della volatilità di $\pm$ 20 punti percentuali.

Si tratta comunque di prove unidimensionali, ovvero che i fattori di mercato vengono «stressati» singolarmente e il portafoglio viene rivalutato in corrispondenza

[27] Jorion, 2007.

dei diversi valori assunti da ognuno di essi. In questo modo però non vengono valutate le correlazioni tra i diversi fattori di mercato.

In alternativa è possibile effettuare prove multidimensionali, sempre in base alla stessa logica di far ricorso o agli eventi passati o a giudizi soggettivi simulando congiuntamente notevoli variazioni in più fattori dimercato. A scopo esemplificativo, nel 1992 quando si verificò il crollo degli accordi di cambio del sistema monetario europeo, la repentina svalutazione della lira italiana e della sterlina britannica si è verificata simultaneamente con una diminuzione dei tassi di interesse di entrambe le valute e un parallelo rialzo dei rispettivi mercati obbligazionari.

Nel 2009 il Comitato di Basilea ha emanato un documento con lo scopo di dettare principi alle banche per lo svolgimento delle prove di stress[28]. Le prove di stress dovrebbero fungere da campanello d'allarme per le banche in modo da poter rientrare dalle posizioni di rischio maggiormente esposte ai cambiamenti sfavorevoli del mercato. Purtroppo durante la crisi finanziaria del 2007-2008 ciò non accadde. La pubblicazione è dovuta alla gravità e alla permanenza della crisi finanziaria, la quale ha dimostrato che le prove di stress condotte dalle banche non avevano catturato l'intensità e la gravità della crisi e per questo era necessario rinnovare le pratiche in atto.

Le prove di stress sono quindi state riconosciute come uno strumento volto ad identificare e controllare i rischi, in modo da integrare l'attività di *risk management*, l'attività di gestione degli investimenti e il controllo della liquidità migliorando altresì la comunicazione interna ed esterna dell'istituto. I principi esposti nel documento dispongono di utilizzare tecniche come l'analisi di sensitività o di scenario e di coinvolgere l'intera organizzazione bancaria, dagli esperti di aree economiche all'alta direzione.

L'aspetto fondamentale e di maggiore importanza è considerare le prove di

[28] Basilea, 2009c.

stress non solo come esercizi teorici ma essi devono essere accompagnati da decisioni e azioni concrete. Una volta individuata l'area di vulnerabilità, essa deve essere sottoposta ad un intervento gestionale, ad esempio acquistando protezioni o modificando la composizione di portafoglio, diversificare o ristruttare il *business* o predisporre un eventuale piano per far fronte a particolari situazioni di mercato.

Capitolo 3

Criticità dei modelli VaR

3.1 Introduzione

I modelli VaR fin qui esposti, a partire dalla loro introduzione, sono stati oggetto di diverse critiche avanzate da accademici, esperti del settore ed esponenti degli organi di vigilanza.

Lo scopo di questo capitolo è esaminare i principali limiti nel calcolo del VaR associati sia all'approccio parametrico, sia alle tecniche di simulazione. Tuttavia la validità di questi modelli rimane invariata, ma capire le reali potenzialità di questi schemi di calcolo è molto utilie per averene una piena padronza.

In particolare, partendo da alcune criticità concrete e molto importanti nei confronti di questi modelli è possibile introdurre una nuova misura di rischio, ovvero l'*expected shortfall* capace di generare una valore «coerente», superando un particolare problema legato al VaR.

Non è possibile affermare che tra i modelli esposti (metodo paremetrico, simulazioni storiche e metodo Monte Carlo) ve ne sia uno tra tutti preferibile ma sono i diversi fini che si vogliono perseguire, per i quali la misura VaR viene calcolata, che dettano quale modello sia maggiormente adeguato. Ciò nonostante, il livello di esattezza e di precisione che tali misure incorporano non deve essere preso a priori ma va bilanciato tenendo conto che si tratta pur sempre di una misura di variabilitià, che cerca di cogliere l'andamento futuro delle variabili di

mercato a partire dalla loro evoluzione passata.

A scopo esemplificativo il metodo varianze-covarianze risulta adeguato quando si desidera misure la reddittività corretta per il rischio delle singole unità di *trading* oppure se si desidere imporre alle diverse unità *risk-taking* limiti all'operatività quotidiana. Infatti in questi casi l'ipotesi di normalità assunta nell'utilizzo del metodo parametrico è sensata anche se trascura la presenza di *fat tail*, cioè gli eventi considerati estremi. Tuttavia calcolare l'adeguatezza patrimoniale di una istituzione nel suo complesso e non considerare gli eventi rari e utilizzando una forma funzionale che non rappresenta la distribuzione empirica, porterebbe a risultati non soddisfacenti con una elevata possibilità di sottostimare il rischio.

Gli scenari di *stress* invece, sono uno strumento particolarmente valido per stabilire l'adeguatezza patrimoniale appunto perché si focalizzano nel valutare la situazione dell'istituzione in presenza di eventi «estremi» che evadono dalle misure standard. Infine il metodo Monte Carlo è consigliabile per misurare il rischio di posizoni con *pay-off* non lineare, come le opzioni.

Infine viene introdotto il concetto di copula, necessario per modellizzare le relazioni di dipendenza non lineare tra fattori di rischio che la semplice correlazione non è in grado di catturare.

Va precisato che un'istituzione finanziaria, prima di acquistare un sofisticato *software* per computere tutti i calcoli, deve predisporre di un adeguato *data warehouse* con il quale il sistema informatico deve essere in grado di dialogare.

3.2 Ostacoli operativi dei metodi tradizionali

I modelli VaR fin qui esposti trascurano gli eventi eccezionali, infatti l'utilizzo di un certo multiplo della deviazione standard, in base al quale si determina il livello di confidenza data l'ipotesi di normalità dei rendimenti (metodo parametrico) o un determinato percentile della distribuzione empirica di probabilità delle va-

riazioni del valore di mercato di un portafoglio (tecniche di simulazione) non sono in grado di cogliere gli eventi estremi.

Nell'approccio varianze-covarianze si ipotizza che i fattori di mercato sono caratterizzati da una distribuzione normale. La realtà però non lo conferma.

La distribuzione dei rendimenti dei fattori di mercato è *leptocurtica*, ovvero presenta delle code più spesse (*fat tails*) rispetto alla distribuzione normale. Ciò implica che la probabilità che si verifichino variazioni di prezzo lontane dal valore medio è molto più elevata rispetto a quella implicita in una distribuzione normale.

Inoltre i rendimenti delle attività finanziarie non sono distribuiti in modo simmetrico, anzi sono caratterizzati da *negative skewness*. Ciò significa che la simmetria è spostata verso sinistra, quindi sono maggiori le osservazioni di valore inferiore rispetto alla media.

Invece, per quanto riguarda i modelli di simulazione, generare un numero molto elevato di scenari per stimare in modo accurato la distribuzione empirica delle variazioni dei rendimenti dei fattori di mercato porta a calcolare misure di VaR su variazioni che raramente possono essere considerate valori estremi. Ad esempio, se con il metodo Monte Carlo si calcolano 10.000 simulazioni e isolando il percentile associato al livello di confidenza del 99%, si otterrebbe la stima del VaR in base alla 100-esima variazioni più sfavorevole del fattore di mercato. É molto raro che tale variazione possa essere considerata un valore estremo.

Tutto ciò per affermare che le perdite elevate si verificano con una probabilità maggiore rispetto a quanto viene calcolato ipotizzando una distribuzione normale o ''tagliando" la distribuzione emprica simulata in base ai molteplici scenari generati.

Ricordando alcune crisi del mercato appartenenti al passato, in particolare concentrandosi sulle ingenti perdite registrate, è possibile dimostare che questi modelli di calcolo possono realemente non prevedere variazioni negative assai

importanti. Ad esempio l'enorme *deficit* registrato dall'*hedge fund* LTCM nel 1998, che fu pari a 1.71 trillioni di dollari, non era stato nemmeno contemplato dal sistema di *risk management* da loro utilizzato. Relativamente a tale accadimento, vi è una affermazione di Jorion (1999) molto interessante:

> *Assuming a normal distribution, such an event would occur once every 800 trillion years, or 40,000 times the age of the universe. Surely the model was wrong.*[1]

Spesso ipotizzare una distribuzione normale dei rendimenti dei fattori di mercato in calcoli come il VaR, o anche lo Sharpe ratio o nell'ottimizzazione di portafoglio, potrebbe portare a conclusione sbagliate, soprattutto per il *risk management*. Si evince quindi che l'analisi del rischio non può essere affidata solo all'analisi quantitativa.

Sempre in relazione alle crisi del mercato è verosimile attendersi anche che i *trader* delle diverse istituzioni che si avvalgono dei modelli VaR, riceveranno tutti il medesimo segnale operativo in corrisponenza di eventuali cadute del mercato e dei relativi aumenti di volatilità. La caduta del mercato potrebbe così mutare in un crollo se tutti cercheranno di chiudere o ridurre le proprie esposizioni, rendendo la liquidabilità contemporanea di tutte le posizioni molto difficile data la mancanza di una controparte.

Talvolta non si commette un errore ipotizzando una distribuzione normale dei rendimenti dei fattori di mercato, poiché la normale è una buona approssimazione del rendimento *medio* di una attività finanziaria. Nella gestione corrente del rischio di un istituzione finanziaria si è interessati a valutare le posizioni in base alle ''condizoni normali" di mercato, come ad esempio nel determinare il *pricing* delle operazioni.

[1] Embrechts, 2004.

Al contrario, se viene posto il quesito di sapere quale è la perdita che un portafoglio potrebbe subire con probabilità P, la risposta non è governata dalla perdita media bensì dalla perdita *estrema*.

Un altro problema riconducibile a entrambe le modalità di calcolo è relativo all'ipotesi implicita di stabilità della distribuzione dei rendimenti dei fattori di mercato. Ipotizzando una distribuzione normale dei rendimenti (metodo parametrico) si sbaglia perché i rendimenti vengono considerati realizzazioni di distribuzioni indipendenti e identicamante distribuite e caratterizzati da media e varianza costanti nel tempo. Se ci si avvale delle tecniche di simulazioni non è necessario assumere alcuna forma particolare di distribuzione dei rendimenti, ma implicitamente si ipotizza che la distribuzione futura dei rendimenti coincidarà con la distribuzione passata. Questo equivale ad affermare che i rendimenti sono caratterizzati da processi i.i.d. e con parametri costanti.

Nella realtà si riscontra invece che i rendimenti non sono realizzazioni di processi i.i.d. ma presentano autocorrelazione e la volatilità è stocastica.

Individuare soluzioni nuove e alternative è perciò opportuno.

3.3 Le proprietà di una coerente misura di rischio

Una misura di rischio per essere considerata «coerente» deve rispettare quattro famosi assiomi che sono stati pubblicati nella rivista *Mathematical Finance* nel 1999.[2] Per arrivare a questi risultati è stato svolto uno studio concentrandosi sul valore futuro che avrebbero potuto assumere diversi portafogli detenuti in modo da valutare se le perdite loro associate fossero accettabili o meno.

L'autorità cui compete la decisione di assumere o meno una posizione, anche se non è deputata alla gestione diretta di questa, come ad esempio le autorità di controllo nelle compagnie assicurative o una società che supervisiona i rischi assunti dalle società da questa controllate, ha la necessità di valutare in modo

[2] Artzner, Delbaen, Eber, Heath, 1999.

preciso i rischi. Come è noto non è possibile conoscere nel momento in cui si effettua la valutazione del rishio, ad esempio al tempo $t = 0$, il valore della posizione nell'istante $t = T$ ovvero quando verrà liquidata. Di solito, si assume che sia disponibile sul mercato uno strumento privo di rischio con un tasso di rendimento r e che produca, per ogni importo n investito in $t = 0$, un ammontare certo al tempo T.

I seguenti assiomi vanno interpretati nell'ottica di valutazione del requisito patrimoniale associato alla posizione di rischio per la sua copertura.

Una misura di rischio p che assegna un numero pari a $p(X)$ ad ogni posizione con valore futuro netto X, per essere ritenuta coerente deve soddisfare le seguenti proprietà:

1. $p(X + Y) \leq p(X) + p(Y)$ Subadditività;
2. $p(\lambda X) = \lambda p(X)$, con $\lambda > 0$ Positiva omogeneità;
3. $p(X) \geq p(Y)$, se $X \leq Y$ Monotonia;
4. $p(X + rn) = p(X) - n$ Condizione *risk-free*.

Per ciascuna di queste caratteristiche è possibile dare una ragionevole interpretazione. La subaddività tra due posizioni rischiose X e Y, indica che il rischio associato all'assunzione congiunta dei due è minore di quanto non si registrerebbe assumendole separatamente. La positiva omogeneità indica che la dimensione della esposizione influenza in modo diretto il rischio, in particolare quando si considera il valore a scadenza è molto importante saper valutare in modo conforme la dimensione della posizione in relazione alla liquidità di questa nel mercato. Insieme, questi due assiomi implicano la convessità della misura di rischio p. Per quanto riguarda la monotonia, assioma pressoché ovvio, se il valore a scadenza di X è minore di Y, è logico attendersi che il requisito patrimoniale richiesto per la sua copertura è maggiore di quello richiesto per la posizione su Y.

La quarta caratteristica, infine, denota che se viene investita una quantità di denaro n a un tasso r *risk free*, il requisito patrimoniale richiesto, da una autorità di vigilanza o dall'*investment management*, deve essere ridotto di un importo pari a n.

3.4 I limiti del VaR

La ricerca di nuove misure per valutare il rischio è nata anche dal fatto che il VaR presenta due limiti tra loro strettamente connessi.

Una prima carenza può essere illustrata ricordando la definizione del VaR. Il VaR è una misura probabilistica che indica la probabilità che si verifichi effettivamente una perdita di valore superiore ad un certo importo. Se si indica con c il livello di confidenza e con L la perdita effettiva si ha:

$$Pr(L > VaR) = 1 - c. \tag{3.1}$$

Questa misura si limita ad indicare la probabilità che si verifichi una perdita superiore allo stesso VaR, ma nell'eventualità che tale avvenimento accada non da alcuna indicazione sulla dimensione che la perdita potrebbe raggiungere.

L'organo cui compete il controllo e la gestione del rischio potrebbe trovarsi davanti ad una situazione in cui deve valutare due diverse posizioni, entrambe con il medesimo VaR (con lo stesso livello di confidenza) ma che presentano un profilo di rischio diverso relativo al livello di perdita potenzaiale. In semplicità la misura del VaR consente di formulare la seguente affermazione «siamo certi all'$X\%$ che non perderemo più di V euro nei prossimi N giorni», ma non consente di sapere quanto male potrebbero andare le cose se effettivamente dovesse essere registrata una perdita superiore rispetto al VaR.

Un secondo limite del VaR è che non rispetta una delle proprietà essenziali di una misura coerente di rischio. Talvolta può accadere che venga violata la subadditività, ovvero che il rischio di un portafoglio Z composto da due posizioni

X e Y risulta pari o inferiore alla somma dei rischi delle singole posizioni. La relazione per ottenere una misura coerente è:

$$VaR(Z) = VaR(X + Y) \leq VaR(X) + VaR(Y). \tag{3.2}$$

Questa proprietà deriva dai benefici che ogni portafoglio può trarre, in misura più o meno elevata, dalla diversificazione connessa al fatto che la correlazione tra i fattori di mercato rilevanti è imperfetta.

Questa proprietà riguarda sia i portafogli composti da diverse singole posizioni sia quelli formati da esposizioni legate all'evoluzione di molteplici fattori di mercato. Quindi ad esempio, il VaR di un titolo obbligazionario in valuta estera non può essere semplicemente calcolato sommando il VaR relativo al rischio di cambio e il VaR relativo al rischio di tasso di interesse.

Nell'eventualità che i rendimenti dei fattori di mercato presentino una distribuzione normale, la proprietà (3.2) non viene violata, tuttavia quando si abbandona l'ipotesi di distribuzione normale multivariata dei rendimenti dei fattori di mercato, si potrebbe violare la condzione in esame e ottenere la seguente disuguaglianza:

$$VaR(X + Y) \geq VaR(X) + VaR(Y). \tag{3.3}$$

In particolare, questo si verifica quando la distribuzione congiunta dei rendimenti dei fattori di mercato presenta code molto spesse e si allontana dalla forma della normale multivariata.

La violazione della proprietà di subadditività non assume valore solo dal punto di vista teorico. Nella realtà, accade spesso che una banca quando combina tra loro più portafogli, ad esempio portafoglio titoli del mercazio azionario e portafoglio titoli a reddito fisso, il VaR totale è superiore di quanto non risulterebbe dalla somma tra i due singoli valori a rischio.

3.5 L'Expected shortfall

Esiste tuttavia una misura in grado di superare i due problemi appena descritti in relazione alla mancata considerazione delle perdite eccedenti il VaR e il non rispetto della prorietà di subadditività.

Si tratta dell'*expected shortfall* (ES), che spesso viene indicata anche con il nome di o *average shortfall* (AS). Il calcolo dell'ES, sempre associato un certo livello di confidenza c e ad un orizzonte temporale T, produce «il valore atteso delle perdite che il portafoglio potrebbe subire nell'$(1-c)$ peggiore dei casi nel corso dell'orizzonte temporale T»[3]. Questa misura descrive perciò il valore atteso delle perdite eccedenti il VaR.

Per rendere l'esposizione più chiara è utile ricordare la definizione di VaR che è stata data in precedenza, ovvero in termini di differenza tra il profitto atteso del portafoglio e la perdita corrispondente al livello di confidenza c, analiticamente:

$$VaR = E(P) - L_c$$

dove:

$$Pr(P < L_c) = 1 - c.$$

Una seconda possibilità è tuttavia esprimere il VaR in termini di valore di mercato e quindi esso risulta pari alla differenza tra il valore di mercato del portafoglio e il valore di mercato corrispondente al livello di confidenza desiderato:

$$VaR = E(VM) - VM_c$$

nella quale:

$$Pr(VM < VM_c) = 1 - c.$$

Adesso è possibile formulare la definizione di *expected shortfall* come la differenza tra il profitto atteso e il valore atteso della perdita superiore al VaR, analiticamen-

[3]Sironi, 2005.

te:

$$ES_c = E(P) - E(L/L > L_c) \tag{3.4}$$

Anche l'ES può essere formulato in termini di valore di mercato, e si definisce perciò come differenza tra il valore atteso del valore di mercato del portafoglio e il valore di mercato corrispondente al livello di confidenza desiderato:

$$ES_c = E(VM) - E(VM/VM > VM_c) \tag{3.5}$$

Tuttavia una misura di rischio si distingue anche per i pesi che assegna ai quantili della distribuzione delle perdite. In particolare, il VaR assegna il totale dei peso al q-esimo quantile e zero altrove, mentre l'ES fa sì che venga corrisposto un peso distribuito in modo uguale a tutti i quantili superiori al q-esimo e un peso nullo ai quantili inferiori. La misura così formulata è definita anche *spectral risk measure*, in relazione al fatto che i pesi assegnati al q quantile della distribuzione delle perdite sono una funzione non-decrescente di q. L'ES soddisfa questa condizione e una misura di rischio spettrale è sempre coerente.

Alcuni autori hanno cercato di formulare una soluzione in modo che anche il VaR possa essere considerato una misura spettrale di rischio. La proposta ideata è un sistema di ponderazioni per assegnare i pesi ai quantili in modo crescente rispetto all'aumentare dei quantili. La ponderazione avviene dando un peso pari a $e^{-(-1-q)/\gamma}$, con γ costante, al ciascun quantile q[4].

Sebbene l'ES rispetti tutte le proprietà per garantire la coerenza della misura rimane il fatto che tuttora è il VaR la misura di rischio maggiormente utilizzata sia dal *risk management* che dalle autorità di vigilanza. Ciò è imputabile da un lato data la facilità di comprensione e la valutazione immediata che deriva dal calcolo del VaR ed inoltre l'attività di *back-testing* non risulta molto agevolata da una misura come l'ES.

[4]Hull, 2010.

3.6 Valutazione della dipendenza tra variabili

In generale la misura di dipendenza maggiormente utilizzata sia nei sistemi di *risk managment* sia nei problemi di *capital allocation* è la correlazione. Essa a volte però non è misura affidabile.

L'utilizzo della correlazione non presenta alcun problema in presenza di fattori di rischio caratterizzati da una distribuzione normale e che mantengono l'ipotesi di normalità anche per quanto riguarda la loro distribuzione congiunta. Tuttavia i rendimenti dei fattori di mercato non sono quasi mai normali e perciò l'uso della correlzione per misurare la dipendenza tra i diversi fattori porta ad alcuni problemi. Inoltre la correlazione lineare non cattura le relazioni di dipendenza non lineare che esistono tra numerosi fattori di rischio disponibili sul mercato.

Pertanto affidarsi alla correlazione per misurare le variazioni di un portafoglio significa non poter disporre di una misura valida per valutare la dipendenza tra i diversi fattori di rischio e di conseguenza computare una misura VaR poco realistica e non completamente affidabile.

Vale la pena elencare quali sono i principali problemi che si incontrano qualora ci si affidi al calcolo della correlazione per valutare la dipendenza:

- la correlazione è semplicemente una misura scalare di dipendenza e non può rivelare tutto ciò che è di interesse per valutare la struttura di dipendenza tra rischi;

- il valore del fattore di correlazione dipende dalla distribuzione marginale di ciascun rischio e tutti i valori compresi tra -1 e 1 non possono essere giudicati attendibili;

- fattori perfettamente positivamente correlati non necessariamente hanno una correlazione pari a 1 e viceversa fattori perfettamente negativamente

correlati non necessariamente hanno una correlazione pari a -1;

- un indice di correlazione pari a 0 non implica indipendenza tra fattori di rischio;
- la correlazione cambia se si effetuano delle trasformazioni sulle variabili, ad esempio dati due generci fattori di rischio X e Y, si ha che il $log(X)$ e il $log(Y)$ non hanno la stessa correlazione che c'è tra X e Y;
- la correlazione è definita solo quando la varianza dei fattori di rischio è finita ma non è una misura di dipendenza appropriata qualora si considerino fattori di rischio con code spesse la cui varianza sembra essere infinita.[5]

In queste ''trappole" sono in molti a cadere. Esiste però una calcolo alternativo per capire e modellizzare la dipendenza, in particolare la dipendenza non-lineare, tra i fattori di rischio: si tratta delle *copulas*.

Il concetto di copula è estremamente importante e il suo utilizzo porta a numerosi vantaggi. In particolare, l'approccio delle copula consente di individuare la struttura di dipendenza tra fattori di rischio. Ogni funzione di distribuzione congiunta per un vettore casuale di rischi contiene implicitamente inormazioni sia sul comportamento marginale del singolo fattore di rischio, sia una descrizione della struttura di dipendenza tra i distinti fattori e quest'ultimo può essere isolato avvalendosi delle copula.

Una copula d-dimensionale è una funzione di ripartizione definita in $[0,1]^d$ a partire da d distribuzioni marginali uniformi, cioè i d fattori di rischio considerati. Essa viene indicata con la notazione $C(u) = C(u_1, ..., c_d)$. Una copula deve avere le seguenti caratteristiche:

1. $C(u_1, ..., c_d)$ è crescente per ogni componente u_i;

[5] Embrechts, 2004

2. $C(1, ..., 1, u_i, 1, ..., 1) = u_i$ per ogni $i \in \{1, ..., d\}$, $u_i \in [0, 1]$;

3. per ogni $(a_i, ..., a_d)$, $(b_i, ..., b_d) \in [0, 1]^d$ con $a_i \leq b_i$ abbiamo che:

$$\sum_{i_1=1}^{2} \cdots \sum_{i_d=1}^{2} (-1)_1^i + ... + i_d C(u_{1i_1}, ..., u_{di_d}) \geq 0, \tag{3.6}$$

dove $u_{j1} = a_j$ e $u_{j2} = b_j$ per ogni $j \in \{1, ..., d\}$.

Queste proprietà caratterizzano le copula, la prima è richiesta a tutte le funzioni di ripartizione multivariate e la seconda è un requisito necessario per una distribuzione marginale uniforme. Infine, la terza proprietà assicura la non-negatività della funzione C.

Un importante teorema per lo studio delle copula è il *teorema di Sklar (1959)* che dimostra che tutte le distribuzioni multivariate contengono copule e che le copule possono essere impiegate con le distribuzioni univariate per formare distribuzioni multivariate.

Data la funzione di ripartizione congiunta F, con margini $F_1, ..., F_d$. Allora esiste una copula $C : [0, 1]^d \to [0, 1]$ tale che, per ogni $x_1, ..., x_d$ di $\mathbb{R} = [-\infty, +\infty]$,

$$F(x_1, ..., x_d) = C(F_1(x_1), ..., F_d(x_d)) \tag{3.7}$$

se i margini sono continui, allora C è unica; altrimenti C è unicamente determinata con dominio $RanF_1 \times RanF_2 \times ... \times RanF_d$, dove $RanF_i = F_i(\mathbb{R})$. Se C è una copula e $F_1, ..., F_d$ sono funzioni di ripartizione univariate, allora la funzione F definita in (3.7) è una funzione di ripartizione congiunta con estremi $F_1, ..., F_d$.

Questo risultato dimostra che una distribuzione congiunta può essere costruita a partire dalle marginali usando una copula. Per una dimostrazione completa si veda McNeil, Frey e Embrechts (2005).

Il seguente risultato si ottiene grazie alla (3.7). Data la funzione di ripartizione congiunta F, con margini continui $F_1, ..., F_d$ e copula C, che soddisfa la (3.7).

Allora, per qualsiasi $u = (u_1, ..., u_n)$ appartenenti a $[0, 1]^d$:

$$C(u_1, ..., u_n) = F\left(F_1^{-1}(u_1), ..., F_d^{-1}(u_d)\right), \tag{3.8}$$

dove F_i^{-1} è l'inversa generalizzata di F_i.

Una prorpietà molto importante delle copula per le distribuzioni multivariate è rappresentata dall'invarianza rispetto a trasformazioni crescenti delle marginali.

3.6.1 Alcuni esempi di copula

Nel definire il modello di valutazione è importante scegliere la copula da utilizzare per considerare i rischi nel loro complesso. Si seguito vengono presentati due esempi provenienti da due classi di copula che spesso vengono utilizzate per valutare la dipendenza tra le variabili finanziarie.

Gauss Copula Questo tipo di copula fa parte della classe delle copule ellittiche, e si tratta di un gruppo che consente di sfruttare le proprietà delle distribuzioni normali multivariate. Inoltre, consentono di modellizzare eventi estremi multivariati e sviluppare forme di dipendenza non-normale.

La copula di Gauss è la copula associata alla distribuzione normale multivariata. Infatti il vettore $X = (X_1, ..., X_n)$ è normale multivariato se:

1. i margini univariati $F_1, ..., F_n$ sono normali;

2. la struttura di dipendenza tra margini è descritta da un unica funzione copula C tale che:

$$C_R^{Ga}(u_1, ..., u_d) = \Phi_R\left(\phi^{-1}(u_1, ..., \phi^{-1}(u_d)\right), \tag{3.9}$$

   dove Φ_R è la funzione di ripartizione normale standard con matrice di correlazione lineare R e ϕ^{-1} è l'inversa della funzione di ripartizione normale standard univariata.

La normale multivariata è spesso usata nelle applicazioni di *risk management* per simulare la distribuzione di n fattori di rischio relativi al valore del *trading book*.

Se $d = 2$ l'espressione (3.9) può essere riscritta nel modo seguente:

$$C_R^{Ga}(u,v) = \int_{-\infty}^{\phi^{1(u)}} \int_{-\infty}^{\phi^{1(v)}} \frac{1}{2\pi(1-R_{12}^2)^{1/2}} exp\left\{-\frac{s^2-2R_{12}}{s}t + t^2 2(1-R_{12}^2)\right\} dsdt, \tag{3.10}$$

dove R_{12} è semplicemente il coefficiente di correlazione lineare tra le due variabili casuali.

Gumbel copula La copula di Gumbel fa parte della famiglia delle copula di Archimede, che presentano il vantaggio dal punto di vista applicativo di contenere pochi parametri per rappresentare la struttura di dipendenza, anche se per campioni di grandi dimensioni non si adatta molto bene ai dati.

Il caso di copula bivariata è così rappresentato:

$$C_\theta^{Gu}(u_1,u_2) = exp\{-((-ln\ u_1)^\theta + (-ln\ u_2)^\theta)^{1/\theta},\ \ 1 \leq \theta < \infty \tag{3.11}$$

Se $\theta = 1$ si ottiene il caso speciale di cupula indipendente, e il limite di C_θ^{Gu} di $\theta \to \infty$ è rappresentato dalla copula comonotona bidimensionale.

Capitolo 4

La teoria dei valori estremi

4.1 Introduzione

Una delle più grandi sfide per il *risk management* è l'implementazione di modelli per la previsione di eventi gravi e che permettano di ottenere una misura accurata delle possibili conseguenze. Questo si estende per tutte le categorie di rischio, ma in particolare per i rischi di mercato dove quotidianamente è necessario calcolare il VaR del *trading book* soggetto agli avversi cambiamenti del mercato.

Durante quest'ultimo decennio molti studiosi si sono dedicati all'applicazione della teoria dei valori estremi alla finanza, elaborando nuovi strumenti di misurazione che possono essere estesi a tutte le categorie di rischio. Per quanto riguarda i rischi di mercato, lo studio si è concentrato sulla distribuzione dei rendimenti delle variabili di mercato in base alla convinzione che l'interesse di un *risk manager* si deve concentrare proprio sui valori contenuti nelle code di queste ultime, in modo da poter estrapolare informazioni circa i valori estremi.

Limitarsi a criticare la validità delle misure prodotte dai metodi standard e proporre un metodo alternativo in grado di restituire stime migliori è molto diverso. È questo l'obiettivo che diversi studiosi, tra i quali Longin, Embrechts, Danielsson, de Vries e McNeil, hanno realizzato focalizzandosi sullo studio delle code dei rendimenti delle variabili finanziarie. Il procedimento è analogo ai metodi già visti, ovvero che l'andamento futuro delle variabili casuali dei fattori di

rischio non è conoscibile a priori ma grazie allo studio dei valori passati, è possibile estrapolare informazioni sulla struttura funzionale della variabile casuale generatrice dei dati.

Gli stessi autori affermano che nuovi sviluppi della teoria stocastica dei valori estremi sono necessari e loro realizzazione è possibile anche grazie, e soprattutto, al *feedback* proveniente dalle unità di *risk management* delle istuzioni che si avvalgono dell'EVT. Il progresso delle tecniche di misurazione e controllo dei rischi è molto importante e tutti gli organismi che si avvalgono di queste misure dovrebbero dare il loro contributo.

4.2 La crescente attenzione alle condizioni non ordinarie

Per risalire alle origini dell'*Extreme value theory* è necessario andare molto indietro nel tempo, infatti i primi studi furono condotti tra il 1920 e il 1940 da Fisher, Tippett e Gnedenko e solo nel 1958 fu pubblicato da Gumbel il primo libro che argomentava sulle statistiche derivanti dai valori estremi. All'epoca questi studi erano una novità perché le tradizionali statistiche si concentravano solo sullo studio dei valori medi delle distribuzioni, mentre la teoria dei valori estremi si focalizza sugli elementi più elevati (o più piccoli) del campione e studia la legge probabilistica che governa questi valori.

Va precisato che le opportunità di utilizzo di questa teoria non si limitano alla finanza e alle scienze attuariali, ma il loro impiego è stato inizialmente proposto in campi come la metereologia per la previsione di condizioni climatiche estreme o nell'ingegneria industriale applicando l'EVT alle tecniche di controllo della qualità.

Solo dagli anni '60-'70 alcuni studiosi hanno iniziato a notare che l'andamento delle variabili finanziarie non è caratterizzato da una distribuzione normale

ma per loro non era chiaro come utilizzare queste informazioni all'interno della teoria economica[1].

Il momento in cui è nata l'esigenza di studiare nuove tecniche per la gesione dei rischi di mercato, che successivamente sono state allargate anche alle categorie di rischio di credito e di rischio operativo, è riconducibile all'interazione tra diversi elementi. Primo tra tutti l'incremento della regolamentazione a partire dagli anni '90, del quale è stato scritto nel Capitolo 1, accompagnato anche dalla contestuale diffusione delle tecniche VaR, dapprima largamente accettate e successivamente oggetto di numerose critiche, ed infine la contrattazione di numerosi nuovi prodotti come ad esempio i *cat bond*[2], o i *risk swaps* o altri derivati scritti su eventi rari.

Negli ultimi quindici anni si è assistito a una notevole diffusione in termini di pubblicazioni e di libri di testo relativi all'EVT accompagnate anche dallo sviluppo di validi *software* per le applicazioni alla finanza, come ad esempio *Xtremes* e l'applicazione *Evis* per il software S-Plus[3].

L'intuizione racchiusa nell'*extreme value theory* è la seguente: per cogliere i valori estremi e valutare il rischio non serve descrivere l'intera distribuzione ma basta riuscire ad esplicitare solo la forma delle code della distribuzione di densità della variabile casuale in esame. Nelle applicazioni finanziarie la soluzione analitica conseguita permette di calcolare, dopo aver scelto il livello di confidenza desiderato, il VaR o l'ES di una posizione in modo più accurato rispetto agli approcci precedentemente esaminati. In particolare, l'EVT è estremamente utile

[1] Embrechts, 2001.

[2] *Catastrophe Bond*, obbligazioni-catastrofe legate alle catastrofi naturali. Si tratta di emissioni obbligazionarie a cura di assicurazioni che desiderano trasferire il rischio di perdite derivanti da eventi molto dannosi. I *cat bond* corrispondono al sottoscrittore elevati rendimenti ma se si verifica l'evento dannoso i pagamenti vengono decurtati in modo proporzionale alle pardite o il capitale versato dagli investitori non verrà in tutto o in parte ripagato. Ad esempio, una compagnia assicurativa giapponese che vuole proteggersi dal dover pagare danni a causa di una scossa di terremoto potrebbe trasferire il rischio agli investitori attraverso il *cat bond*. (Fonte: `http://www.ilsole24ore.com`).

[3] Entrambi software sono a pagamento, per la parte empirica di questa tesi (Capitolo 5) è stato usato il software ''R'' con il pacchetto *evir* messo a punto da McNeil.

e restitiusce risultati più precisi dei metodi standard quando il livello di confidenza scelto per il calcolo è molto elevato. Infatti quando il livello di confidenza è del 95% o del 97% il metodo varianze-covarianze e le tecniche di simulazione restituiscono risultati abbastanza vicini alla realtà, ma se si opta per un livello di confidenza del 99%, o del 99,5% o del 99,9% l'uso dell'EVT diventa necessario.

In generale, ci sono due diversi approcci per quantificare il valore degli eventi estremi. Quelli meno recenti sono chiamati *block maxima group*, e per i motivi che verranno in seguito spiegati richiedono l'uso di campioni di dati particolarmente ampi. Il gruppo più recente invece è costiuito dai modelli *peaks-over-threshold* che si basano sulla considerazione dei soli valori del campione che ecccedono una *elevata soglia* precedentemente quantificata. Questi ultimi sono i più utilizzati dal punto di vista applicativo data la loro maggiore efficienza e il vantaggio di non richiedere campioni di dati molto estesi.

4.3 Teoria generale per il metodo Block-maxima

In questa sezione verranno illustrate le basi teoriche sulle quali è fondato il metodo *block-maxima* e successivamente verrà spiegato come questo metodo può essere impiegato per il calcolo del VaR e per effettuare prove di *stress-testing*.

La variabile oggetto di analisi è costituita da una serie di osservazioni X_i, supposte i.i.d., che rappresentano un campione di perdite finanziarie. Possono essere perdite relative ai rendimenti di un investimento in un singolo titolo oppure registrate da un indice azionario o da un portafoglio di investimenti. Si tratta in ogni caso di un metodo che può essere impiegato per una ampia varietà di valutazioni, non solo per i rischi di mercato. Ad esempio per le perdite operative, per le perdite relative a un portafoglio di crediti in intervalli di tempo fissi o per le perdite associate ai contratti di assicurazione.

Le basi matematiche che fanno da fondamenta alla scienza classica dell'*Extreme value theory* sono costituite dalla classe di leggi del limite dei valori estremi deri-

vate euristicamente da Fisher e Tippett (1928) e successivamente riviste sotto una più rigorosa prospettiva da Gnedenko (1943).

Si supponga di disporre di una serie di variabili casuali $X_1, X_2, ..., X_n$ i.i.d. alle quali è associata una comune funzione di ripartizione $F(x) = Pr\,(X \leq x)$. L'analisi parte dallo studio del comportamento di:

$$M_n = max\,\{X_1, X_2, ..., X_n\}$$

dove con M_n si indica il massimo di un processo composto da n variabili casuali e X_i rappresenta il valore di un processo misurato durante un determinato periodo temporale. Ad esmpio, se n è il numero di osservazioni annuali, M_n rappresenta valore massimo realizzati durante l'anno considerato. Tuttavia risultati analoghi si possono ottenere con i minimi operando la trasformazione:

$$min\,\{X_1, ..., X_n\} = -max\,\{-X_1, ..., -X_n\}\,.$$

Data l'ipotesi di vv.cc. i.i.d., la distribuzione di M_n per tutti i valori di n è:

$$\begin{aligned} P(M_n \leq x) &= P(X_1 \leq x, ..., X_n \leq x) = \\ &= P(X_1 \leq x)...P(X_n \leq x) = \\ &= F^n(x). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Purtroppo la funzione di ripartizione F è sconosciuta, quindi si rende necessario individuare una famiglia di modelli che possa essere stimata usando solo i valori estremi.

Osservando il comportamento di $F^n(x)$ per $n \to \infty$, sono state individuate le distribuzioni limite per M_n applicando lo stesso approccio che si usa nel teorema del limite centrale[4]. Se esistono sequenze di costanti d_n e c_n[5], con $c_n > 0$ per ogni

[4]Assumendo che le osservazioni $X_1, X_2, ..., X_n$ siano i.i.d. con varianza finita e indicando con $S_n = X_1 + ... + X_n$ la somma delle n osservazioni, la verisione standard del teorema del limite centrale indica che per appropriate somme normalizzate la quantità $(S_n - d_n)/c_n$ converge in distribuzione alla normale standard se n tende ad infinito. L'appropriata normalizzazione utilizza sequenze di costanti di normalizzazione (d_n) e (c_n) così definite: $d_n = nE(X_1)$ e $c_n = \sqrt{var(X_1)}$. L'unica possibile distribuzione limite non-degenere per rappresentare l'EVT è costituita dalla famiglia GEV.

[5]La scelta appropriata di queste successioni determina la scala e la posizione di M_n all'aumentare di n.

n tali che:

$$lim_{n\to\infty}P((M_n - d_n)/c_n \leq x) = lim_{n\to\infty}F^n(c_n x + d_n) = H(x) \tag{4.2}$$

per ogni distribuzione $H(x)$ non degenere, allora $H(\cdot)$ appartiene a una delle seguenti funzioni di ripartizione:

Fréchet $\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ exp\{-x^{-\alpha}\}, & x > 0 \end{cases} \quad con\ \alpha > 0,$

Weibull $\Psi_x = \begin{cases} exp\left\{-\left\{-x^{\alpha}\right\}\right\}, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \quad con\ \alpha > 0,$

Gumbel $\Lambda(x) = exp\left\{-e^{-x}\right\}, x \in \mathbb{R}$

Questo è il risultato del teorema formulato da Fisher-Tippett. Le distribuzioni Φ_α, Ψ_x e $\Lambda(x)$ sono dette *standard extreme value distribution*[6]. Si tratta di tre distribuzioni che presentano un andamento che cambia in base alla coda della funzione F.

Tuttavia risulta difficile operare con tre distribuzioni distinte, esse perciò sono state riparametrizzate in una funzione con un solo parametro. Questa versione è definita *Generalized extreme value* (GEV) e la sua funzione di ripartizione è:

$$H_\xi(x) = \begin{cases} exp(-(1+\xi x)^{-1/\xi}), & \xi \neq 0, \\ exp(-e^{-x}), & \xi = 0, \end{cases} \tag{4.3}$$

dove $1 + \xi x > 0$.

La distribuzione è detta *generalizzata* perché è una forma parametrica che sintetizza le tre distribuzioni standard con le quali mantiene la seguente relazione:

$\xi = \alpha^{-1} > 0$ Fréchet

$\xi = \alpha^{-1} < 0$ Weibull

$\xi = 0$ Gumbel.

[6]Rachev, 2003.

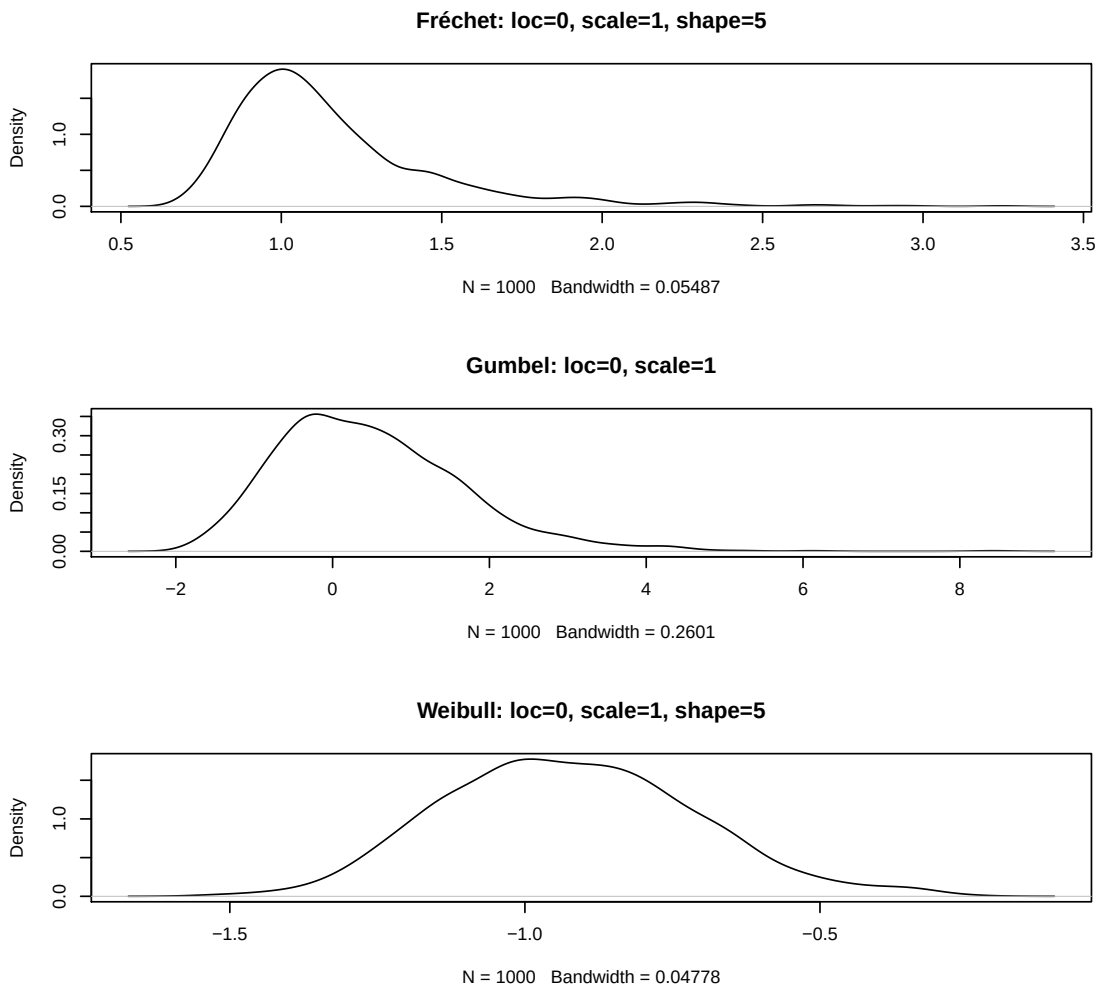

Figura 4.1: Densità di probabilità per le distribuzioni GEV standard

Il parametro ξ indica la forma (*shape parameter*) della distribuzione GEV e H_ξ definisce il tipo di distribuzione. Facendo inferenza su ξ si ottiene che sono gli stessi dati che individuano il proprio tipo di coda, senza alcun bisogno di giudicare in via soggettiva quale sia tra le tre distribuzioni la famiglia di valori estremi da utilizzare. Definendo:

$$H_{\xi,\mu,\sigma}(x) = H_\xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \tag{4.4}$$

è possibile ottenere una distribuzione GEV a tre parametri, dove con $\mu \in \mathbb{R}$ si indica il parametro di locazione e con $\sigma > 0$ si indica il parametro di scala [7].

[7] McNeil, Frey, Embrechts, 2005.

Il ruolo della distribuzione GEV nello studio dei valori massimi è formalizzato dalla definizione di massimo dominio di attrazione MDA. Se esiste il limite calcolato in base alla (4.2) per funzioni di ripartizione H non-degeneri, allora F appartiene al massimo dominio di attrazione di H e si indica con $F \in MDA(H)$. Le condizioni su F che implicano la convergenza di M_n alla distribuzione GEV si riferiscono alla natura delle successioni di c_n e d_n e definiscono il *massimo dominio di attrazione di H* MDA(H). Il teorema di Fisher-Tippett, Gnedenko afferma che se $F \in MDA(H)$ per funzioni di ripartizione H non-degeneri, allora H è una funzione di ripartizione di tipo GEV.

Le distribuzioni che assumono maggiore interesse in campo finanziario, ovvero quelle che presentano code pesanti (*heavy-tailed distribution*) si trovano nel dominio di attrazione della distribuzione di Fréchet $F \in MDA(H_\xi)$, per $\xi > 0$. Esse si caratterizzando in base ad un importante teorema formulato da Gnedenko, ovvero che la funzione di ripartizione $F \in MDA(H_\xi)$ per $\xi > 0$ se e solo se $\bar{F} = 1 - F(x) = x^{-1/\xi} L(x)$ per ogni funzione L lentamente variabile[8]. Queste distribuzioni sono ad esempio la t-Student o la distribuzione di Pareto. Per ulteriori approfondimenti si veda McNeil, Frey, Embrechts (2005).

4.3.1 La stima dei parametri

Come anticipato questo metodo analizza gli eventi estremi concentrandosi sullo studio dei massimi M_n ottenuti dividendo le osservazioni X_i in blocchi di pari dimensione n.

Supponendo di avere a disposizione dei dati provenienti da una (sconosciuta) distribuzione F, che si ipotizza appartenga al dominio di attrazione di una distribuzione di valori estremi H_ξ. Se il campione di dati è generata da un pro-

[8]Una funzione L è detta lentamente variabile se:

$$lim_{n\to\infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1, \ \forall t > 0.$$

cesso i.i.d. allora la vera distribuzione del massimo a blocchi M_n può essere approssimata, per n abbastanza grande, da una distribuzione GEV a tre parametri $H_{\xi,\mu,\sigma}$.

Per mettere in pratica questa idea si deve adattare la distribuzione GEV $H_{\xi,\mu,\sigma}$ ai dati. Perciò si assume che il campione di dati a disposizione possa essere diviso in m blocchi di pari numerosità n in modo da ottenere ripetute osservazioni, ciascuna rappresentante il massimo di ognuno degli m blocchi. Questa operazione sarebbe più comprensibile quando i dati possono essere raggruppati in modo ''naturale" quindi in termini mensili, semestrali, annuali ed infatti le prime applicazioni di questa teoria furono effettuate nel campo dell'idrologia. Un esempio è rappresentato dalla misura giornaliera del livello di inquinamento nell'acqua, dove le osservazioni giornaliere raccolte venivano raggruppate in blocchi di dimensione annuale per prevedere il superamento di un dato livello di sostanze inquinanti. In modo analogo è possibile trattare anche i dati finanziari. Avendo a disposizione, ad esempio, i dati relativi ai rendimenti giornalieri degli ultimi 10 anni, è possibile suddividere tale campione in 20 blocchi, dove un blocco rappresenta un semestre; quindi $m = 20$ e $n = 126$[9] e calcolare la massima perdita M_n di ciascun blocco j-esimo. Indicando con M_{nj} il j-esimo blocco di dimensione n, i dati da considerare sono quindi $M_{n1}, ..., M_{nm}$.

Nel determinare il numero e l'ampiezza dei blocchi, rispettivamente m e n, è necessario valutare il seguente *trade-off*: un ampio valore di n consente una approssimazione più accurata della distribuzione del blocco di massimi in base alla distribuzione GEV, quindi una stima non distorta, e genera errori minimi nella stima dei parametri, mentre un elevato valore di m rende disponibili più dati relativi al massimo di ciascun blocco per la stima di massima verosimiglianza e porta a una bassa varianza nella stima dei parametri.

Per modellizzare la distribuzione GEV vi sono molteplici alternative, tra le

[9] In un anno ci sono circa 252 giorni di contrattazione, quindi 126 in un semestre.

quali il metodo di massima verosimiglianza. L'ultilizzo del metodo di massima verosimiglianza è subordinato all'assunzione che la dimensione n di ciascun blocco sia relativamente elevata per far sì che le osservazioni M_{nj}, a prescindere dal fatto che i dati siano o no dipendenti, possono essere considerate tra loro indipendenti. Se, ad esempio si considerassero blocchi settimanali, i massimi M_{nj} di ciascuna settimana potrebbero non essere considerati tra loro indipendenti dato che in base alla loro vicinanza nel tempo le cause che hanno determinato la perdita finanziaria possono essere le stesse; ciò avviene in particolare nei periodi caratterizzati da elevata volatilità comunemente definiti fenomeni di *volatility clustering*.

Indicando con $h_{\xi,\mu,\sigma}$ la densità della distribuzione GEV, il logaritmo di massima verosimiglianza può essere così calcolato:

$$l(\xi, \mu, \sigma; M_{n1}, ..., M_{nm}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} ln\ h_{\xi,\mu,\sigma}(M_{ni}) =$$

$$= -mln\sigma - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^{m} ln \left(1 + \xi \frac{M_{ni} - \mu}{\sigma}\right) - \sum_{i=1}^{m} \left(1 + \xi \frac{M_{ni} - \mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi},$$

che deve essere massimizzato considerando anche le seguenti costrizioni sui parametri: $\sigma > 0$ e $1 + \xi(M_{ni} - \mu)/\sigma \ > 0$ per ogni i[10].

4.3.2 Il metodo block-maxima per le prove di stress

Ai fini di *risk management* è possibile applicare il modello GEV per effettuare delle prove di stress. In particolare, questo modello offre due alternative: è possibile, una volta definita la frequenza di eventi straordinari (ad esempio 10 anni), quantificare la portata di una perdita estrema; oppure specificare il valore di una possibile perdita futura (ad esempio un crollo del -20%) della quale si vuole indagare la frequenza di un tale evento negativo.

[10] McNeil, Frey, Embrechts, 2005.

Il primo caso è definito problema di stima di *return level* $r_{n,k}$, ovvero una volta determinato il valore di k, che rappresenta il numero di blocchi, intesi come numero di subperiodi di dimensione n, durante i quali aspettarsi una perdita giornaliera elevata, è possibile quantificare la perdita massima giornaliera che potrebbe essere raggiunta in media una volta ogni k periodi di dimensione n.

Quindi, ad esempio, il valore del *return level* $r_{252,10}$ rappresenta il livello di perdita che verrebbe oltrepassato una volta ogni 10 anni, in base alla considerazione che un anno è formato da circa 252 giorni di contrattazione.

Una volta data la funzione di ripartizione $H(\cdot)$ associata alla distribuzione dei M_{nj} con $\sum_{j=1}^{m}$, il livello di rendimento dei blocchi di dimensione n ogni k periodi è pari a $r_{n,k} = q_{1-1/k}(H)$ ovvero l'$(1 - 1/k)$ quantile di H. Dopo aver calcolato il valore dei parametri del modello GEV, è possibile ottenere la perdita che verrebbe raggiunta una volta ogni k periodi in base alla seguente equazione:

$$\hat{r}_{n,k} = H^{-1}_{\hat{\xi},\hat{\mu},\hat{\sigma}}\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \hat{\mu} + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}}\left(\left(-ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right)^{-\hat{\xi}} - 1\right). \tag{4.5}$$

L'altra possibilità per effettuare prove di stress consiste nel quantificare precedentemente il livello di perdita in relazione al quale si desidera indagare con quale frequenza possa avvenire un evento negativo di tale portata. In questo caso, si dice che si risolve un problema di stima di *return-period*. Di solito il livello di perdita che potrebbe essere usato va quantificato o in relazione ad uno *shock* mai accaduto prima che si ritiene potrebbe succedere o a un evento passato particolarmente dannoso.

Il procedimento è il seguente. Indicando sempre con $H(\cdot)$ la funzione di ripartizione del massimo a blocchi, si ha che la frequenza di un evento estremo $M_n > u$, dove con u si indica un generico livello di perdita determinato a priori, è data da $k_{n,u} = 1/\bar{H}(u)$. Con questo calcolo si ottiene la frequenza $k_{n,u}$ con la quale aspettarsi una perdita pari o superiore al livello precedentemente determinato, ovvero il k numero di subperiodi di dimensione n. Tuttavia è possibile, e ciò ac-

cade frequentemente, che in periodi caratterizzati da elevata volatilità si presenti un susseguirsi di valori estremi, perciò è probabile che si verifichino multiple eccedenze all'interno di uno stesso subperiodo rispetto al livello di perdita u.

4.4 Il metodo Peaks over threshold

Il metodo appena discusso presenta lo svantaggio di richiedere un campione molto elevato di dati, anche se l'analisi viene eseguita solo su una piccola parte di essi, ovvero le perdite massime di ciascun blocco.

Per tale motivo questo approccio è stato sostituito nella pratica dal metodo *Peaks Over Threshold*, che spesso viene brevemente chaimato metodo POT. In base a questa seconda versione della teoria dei valori estremi l'analisi si concentra sulle perdite che eccedono un alto valore soglia, determinato a priori.

Il modello di distribuzione che viene utilizzato, in base ai risultati ottenuti da Gnedenko, è la distribuzione generalizzata di Pareto (GPD) e la sua funzione di ripartizione è:

$$G_{\xi,\beta}(x) = \begin{cases} 1-(1+\xi x/\beta)^{-1/\xi}, & \xi \neq 0, \\ 1-exp(-x/\beta), & \xi = 0, \end{cases} \tag{4.6}$$

dove $\beta > 0$ e $x \geq 0$ quando $\xi \geq 0$ e $0 \leq x \leq -\beta/\xi$ quando $\xi < 0$. Il parametro ξ descrive la forma della coda della distribuzione e dal suo valore dipende se queste sono più o meno pesanti, mentre il parametro β è il parametro di scala. Al pari della distribuzione GEV, la GPD è detta generalizzata perché può racchiudere diversi casi:

$\xi > 0$ distribuzione *heavy-tailed*;

$\xi < 0$ distribuzione *short-tailed*;

$\xi = 0$ distribuzione esponenziale.

Per la maggior parte delle variabili finanziarie il valore di ξ è positivo e in generale varia tra 0.1 e 0.4.[11].

[11] Hull, 2010.

In termini di dominio di attrazione si ha che $G_{\xi,\beta} \in MDA(H_\xi)$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}$. La media della GPD è definita solo se $\xi < 1$ ed è pari a:

$$E(X) = \frac{\beta}{(1-\xi)}. \tag{4.7}$$

Il ruolo della GPD all'interno della teoria dei valori estremi è quello di modello per le distribuzioni in eccesso al di sopra di una elevata soglia. Questo concetto viene spiegato grazie a due definizioni: quella di distribuzione in eccesso dei valori al di sopra di una soglia u e quella di funzione di eccesso medio che saranno in seguito presentate.

Data la variabile casuale X, riferita alla distribuzione delle perdite, con funzione di ripartizione $F(\cdot)$, si ha che la *distribuzione in eccesso* al di sopra della soglia u è data da:

$$F_u = P(X - u \leq x | X > u) = \frac{F(x+u) - F(u)}{1 - F(u)} \tag{4.8}$$

per $0 \leq x < x_F - u$, dove $x_F \leq \infty$ è il limite superiore destro di F.

La *funzione di eccesso medio* per la variabile casuale X con media finita, è data da:

$$e(u) = E(X - u | X > u) \tag{4.9}$$

La funzione di ripartizione F_u descrive la distribuzione delle perdite elevate che si trovano al di sopra del valore u. La funzione di eccesso medio $e(u)$ descrive la media di F_u in funzione di u.

In generale, se la variabile casuale X che rappresenta le perdite ha funzione di ripartizione $G_{\xi,\beta}$ allora in base ai precedenti teoremi la funzione di ripartizione degli eccessi è data da:

$$F_u(x) = G_{\xi,\beta(u)}(x), \tag{4.10}$$

$$\beta_u = \beta + \xi u, \tag{4.11}$$

dove $0 \leq x < \infty$ se $\xi \geq 0$ e $0 \leq -(\beta/\xi) - u$ se $\xi < 0$. La distribuzione in eccesso fa sempre parte della classe GPD e il parametro ξ rimane costante mentre

il parametro di scala β cresce in modo lineare all'aumentare della soglia u. Dalla precedente funzione di ripartizione è possibile calcolare la funzione di eccesso medio, ovvero:

$$e(u) = \frac{\beta(u)}{1-\xi} = \frac{\beta + \xi u}{1-\xi}, \tag{4.12}$$

dove $0 \leq u < \infty$ se $0 \leq \xi < 1$ e $0 \leq u \leq -\beta/\xi$ se $\xi < 0$. Si osservi che la funzione di eccesso medio è lineare rispetto alla soglia u e questa è una delle proprietà che caratterizzando la GPD.

Il calcolo della distribuzione in eccesso appena introdotto dimostra che la GPD presenta la proprietà di stabilità. Infatti, è possibile formalizzare questa proprietà attraverso un risultato matematico che dimostra che la GPD è una naturale distribuzione limite degli eccessi di molte distribuzioni sottostanti in relazione a perdite finanziarie. Questo risultato può essere visto anche come teorema caratterizzante per il dominio di attrazione della distribuzione GEV, indipendentemente dal valore di ξ. Si tratta del teorema di Pickands-Balkema-de Haan secondo il quale è possibile trovare una funzione $\beta(u)$, definita nell'equazione (4.13), positiva e misurabile tale che:

$$\lim_{u \to x_F} \sup_{0 \leq x < x_F - u} |F_u(x) - G_{\xi,\beta(u)}(x)| = 0 \tag{4.13}$$

se e solo se $F \in MDA(H_\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$.

4.4.1 Adattare al modello le perdite in eccesso

Il teorema appena enunciato può essere utile quando si ha a disposizone una serie di dati relativi a perdite finanziare con funzione di ripartizione $F \in MDA(H_\xi)$, così una volta scelta una elevata soglia u è possibile adattare F_u a una distribuzione GPD. A questo scopo è necessario assumere che la funzione di ripartizione F abbia un limite superiore destro pari a x_F e scegliendo una elevata soglia u si ha che $F_u(x) = G_{\xi,\beta}(x)$ per $0 \leq x \leq x_F - u$ per qualsiasi valore di $\xi \in \mathbb{R}$ e $\beta > 0$.

Dato il vettore contenente i dati relativi alle perdite $X_1, X_2, ..., X_n$, si deve calcolare il numero di eccedenze N_u rispetto alla soglia u, e successivamente quantificare i valori $Y_j = X_j - u$ relativi a ciascuna perdita eccedente la soglia. La stima dei parametri del modello GPD che si vuole così ottenere viene effettuata in base ai N_u valori relativi alle perdite in eccesso.

Si procede attraverso il metodo di massima verosimiglianza e indicando con $g_{\xi,\beta}$ la densità del modello GPD, il logaritmo di massima verosimiglianza viene così calcolato:

$$\begin{aligned} lnL(\xi, \beta, Y_1, ..., Y_{N_u}) &= \sum_{j=1}^{N_u} lng_{\xi,\beta}(Y_j) = \\ &= -N_u ln\beta - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{j=1}^{N_u} ln\left(1 + \xi\frac{Y_j}{\beta}\right), \end{aligned}$$

che deve essere massimizzato tenendo conto delle seguenti costrizioni sui parametri: $\beta > 0$ e $1 + \xi Y_j/\beta > 0$ per ogni j. Il risultato è perciò un modello GPD $G_{\hat{\xi},\hat{\beta}}$ per la distribuzione delle perdite in eccesso F_u.

Partendo dal modello appena presentato per la distribuzione in eccesso al di sopra della soglia u, è possibile a questo punto dedurre un modello per la distribuzione in eccesso al di sopra di una qualsiasi soglia $v \geq u$ in base alla funzione $F_v(x) = G_{\xi,\beta,\xi(v-u)}(x)$[12].

Quindi la distribuzione in eccesso rimane sempre un GPD con lo stesso valore del parametro ξ ma con un parametro di scala che cresce linearmente con l'aumento della soglia v. Prevedendo un valore di $\xi < 1$[13], la funzione di eccesso

[12]
$$\begin{aligned} \bar{F}_v(x) &= \frac{\bar{F}(v+x)}{\bar{F}(v)} = \frac{\bar{F}(u+(x+v-u))}{\bar{F}_u}\frac{\bar{F}(u)}{\bar{F}(u+(v-u))} \\ &= \frac{\bar{F}_u(x+v-u)}{\bar{F}_u(v-u)} = \frac{\bar{G}_{\xi,\beta}(x+v-u)}{\bar{G}_{\xi,\beta}(v-u)} \\ &= \bar{G}_{\xi,\beta+\xi(v-u)}(x). \end{aligned}$$

Per una dimostrazione completa si veda McNeil, Frey, Embrechts, 2005.

[13]Perché come precedentemente illustrato in presenza di code spesse $\xi > 0$ e per poter definire la media della GPD e la funzione di eccesso medio e_v deve essere $\xi < 1$, e per le variabili finanziarie in genere $0.1 \leq \xi \leq 0.4$.

medio è data da:

$$e(v) = \frac{\beta + \xi(v-u)}{1-\xi} = \frac{\xi v}{1-\xi} + \frac{\beta - \xi u}{1-\xi}, \tag{4.14}$$

dove $u \leq v \leq \infty$ se $0 \leq \xi < 1$ e $u \leq v \leq u - \beta/\xi$ se $\xi < 0$.

La linearità rispetto a v della funzione di eccesso medio è spesso usata come diagnostica per i dati per dimostrare che il modello GPD è ammissibile per i dati considerati. Questa è anche la base per un semplice metodo grafico per scegliere la soglia u più appropriata. Infatti se si costruisce un grafico dove nell'asse delle ascisse si indica il valore della soglia e sull'asse delle ordinate l'eccesso medio si possono fare delle prime ipotesi se i dati possono supportare un modello GPD e sul valore del parametro ξ.

A scopo esemplificativo viene presentato il grafico relativo alle perdite subite dal titolo BMW tra il 1973 e il 1996. I dati usati sono i rendimenti logaritmici (negativi) giornalieri espressi in termini percentuali.

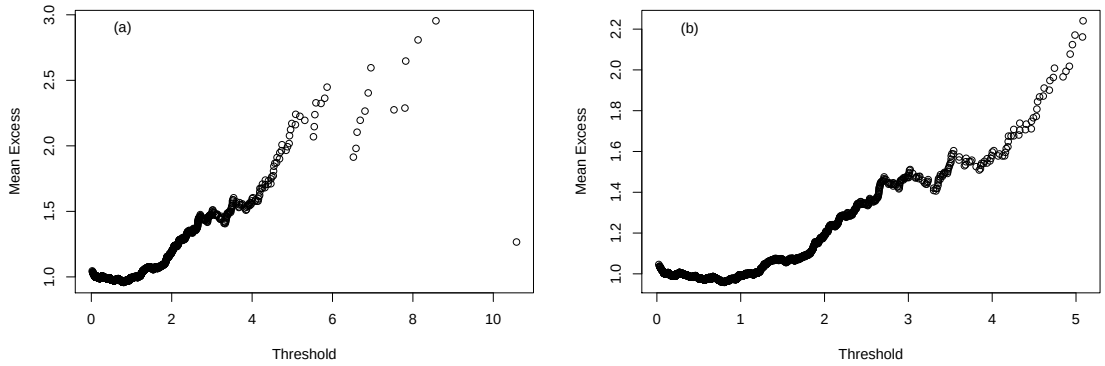

Figura 4.2: Eccesso medio in base al valore della soglia

Se i dati supportano un modello GPD per elevate soglie, allora il grafico delle perdite in eccesso dovrebbe essere linearmente crescente per valori elevati di v. Un trend crescente indica un modello GPD con un parametro di forma ξ positivo, un grafico più o meno orizzontale è associato a un modello GPD con parametro

ξ nullo (o una distribuzione degli eccessi esponenziale) e un trend decrescente indica che il parametro di forma è negativo.

Il livello della soglia viene generalmente scelto in corrispondenza del valore rispetto al quale il grafico illustra un cambio nel suo andamento. In particolare, nella figura 4.1 sono stati inclusi due grafici perchè spesso quando si studiano variabili finanziarie il punto in cui si verifica una variazione non è facile da individuare. Per ottenere un grafico migliore è possibile omettere i dati relativi alle perdite più consistenti in modo da facilitare la valutazione dell'andamento dell'eccesso medio al variare del valore della soglia; infatti la figura 4.1(a) include tutti i valori della variabile di studio, mentre la figura 4.1(b) è stata costruita senza i valori relativi alle 25 perdite più elevate. In questo caso un valore appropriato per la soglia potrebbe essere costituito dalle perdite maggiori del 2%.

4.4.2 Misure il rischio con il metodo POT

Il modello GPD può essere utilizzato per stimare la coda della funzione di ripartizione F dalla quale dipendono i dati relativi alle perdite per poi calcolare le misure di rischio come il VaR o l'ES.

In base all'assunzione che la distribuzione dei valori in eccesso al di sopra della soglia u è riconducibile a un modello GPD. Allora per $x \geq u$ si ha che:

$$\begin{aligned}
\bar{F}(x) &= P(X > u)P(X > x|X > u) \\
&= \bar{F}(u)P(X - u > x - u|X > u) \\
&= \bar{F}_u \bar{F}_u(x - u) \\
&= \bar{F}_u \left(1 + \xi \frac{x - u}{\beta}\right)^{-1/\xi}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

dove $\bar{F}(u) = N_u/n$ per i motivi che saranno di seguito spiegati.

Questa formula può essere invertita per ottenere il valore corrispondente al quantile prescelto della distribuzione sottostante, quindi calcolare il VaR. Indicando con α il livello di confidenza e per valori di $\alpha \geq F(u)$ la stima del VaR è

pari a:

$$VaR_\alpha = q_\alpha F = u + \frac{\beta}{\xi}\left(\left(\frac{1-\alpha}{\bar{F}(u)}\right)^{-\xi}\right). \tag{4.16}$$

Assumendo che $\xi < 1$ la misura dell'*Expected Shortfall* viene così calcolata[14]:

$$ES_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 q_x F dx = \frac{VaR_\alpha}{1-\xi} + \frac{\beta - \xi u}{1-\xi}. \tag{4.17}$$

Tuttavia per effettuare questi calcoli è necessario disporre di una stima di $\bar{F}(u)$ che di solito viene semplicemente approssimata allo stimatore empirico N_u/n dove con N_u si indicano i dati che eccedono la soglia u e con n la quantità di dati che compongono il campione studiato. Facendo questo si assume implicitamente che il campione sia composto da un numero sufficiente di valori che eccedono la soglia u tale da stimare $\bar{F}(u)$ in modo affidabile.

4.5 Modelli multivariati

Finora è stata descritta la teoria dei valori estremi solo per qusnto riguarda il caso univariato, ma lo studio delle perdite estreme è stato esteso anche alle distribuzioni multivariate per descrivere la struttura di dipendenza tra più eventi estremi. L'EVT per il caso multivariato verrà in questa tesi solo brevemente accennata perché comporta calcoli particolarmente complessi e necessita di disporre di un *software* sofisticato.

L'unico modo per valutare in modo congiunto le perdite estreme relative a più fattori, sia con il metodo *block-maxima* sia con il metodo POT, è attraverso lo studio delle copula.

Non esiste una singola famiglia parametrica di copula che contenga tutti i casi multivariati contemplati dalla teoria dei valori estremi, ma alcune copula possono essere considerate come modelli naturali per valutare la dipendenza per gli eventi estremi. Si tratta ad esempio della copula di Gumbel.

[14] McNeil, Frey, Embrechts (2005).

Tuttavia si tratta di metodi particolarmente complessi che non consentono di trattare congiuntamente un elevato numero di variabili. Per una trattazione completa e ulteriori approfondimenti si rimanda a McNeil, Frey, Embrechts (2005).

Capitolo 5

Applicazioni

5.1 Introduzione

Nei precedenti capitoli è stato ampliamente parlato di come dal punto di vista teorico l'utilizzo dell'Extreme Value Theory consenta di cogliere gli eventi estremi e rari e permetta di misurarne le conseguenze con maggiore precisione rispetto ai metodi standard.

L'obiettivo di questo capitolo è valutare le stime prodotte applocando l'EVT. In particolare, per prima cosa si confronteranno i due approcci proposti, il metodo *block-maxima* e il metodo POT, per valutare nel complesso la variabilità delle stime prodotte dai due metodi a seconda della numerosità di dati utilizzati.

Successivamente sarà utilizzato il metodo *block-maxima* per effettuare delle prove di stress in relazione a perdite esteme passate e valutare se un sistema di *risk management* che si avvale degli strumenti proposti dall'EVT avrebbe contemplato tali perdite.

Infine verrà applicato il metodo POT per calcolare il requisito patrimoniale a fronte dei rischi di mercato secondo le recenti disposizioni proposte dal Comitato di Basilea, che come precedentemente spiegato hanno imposto alle banche che si avvalgono dei sistemi interni, di calcolare con decorrenza 1 gennaio 2012 la misura aggiuntiva dello *stressed-VaR*.

5.2 Confronto tra il metodo block-maxima e il modello POT

La teoria dei valori estremi propone due diversi approcci di valutazione, il metodo *block maxima* e il metodo POT e tra i due quest'ultimo è ritenuto il più efficiente. Di seguito vengono elencati i principali problemi che si incontrano qualora si utilizzi il metodo *block-maxima*:

- la scelta dell'ampiezza n dei subperiodi non è definita in modo chiaro;
- la stima dei parametri varia sensibilmente al variare di n;
- considerando solo il massimo di ciascun subperiodo si hanno a disposizione solo m dati, perciò la perdita di informazione è molto elevata;
- il campione di dati da utilizzare deve essere molto ampio, in particolare se si hanno a disposizione i dati degli ultimi 30 anni di contrattazione, fissando $n = 252$ (un anno) la stima dei parametri dipende solo dagli $m = 30$ dati dei massimi di ciascun subperiodo a disposizione.

Il metodo POT non richiede nessuna divisione del campione di dati in subperiodi ma necessita la specificazione di una elevata soglia u. La scelta di u colpisce sia la stima del parametro di forma ξ che quella del parametro di scala β. Tuttavia la letteratura suggerisce di fissare $u = 2,5\%$ o $u = 2,75\%$ anche se è sempre utile valutare la serie dei rendimenti. Infatti se la variabilie di studio è molto volatile potrebbe essere opportuno, ad esempio,fissare $u = 10\%$ e comunque è suggerito di mantenre almeno il 5% del campione di dati come valori eccedenti la soglia. L'uso di questo metodo inoltre non richiede un campione molto elevato di dati.

I due metodi saranno applicati a due diversi campioni provenienti dall'indice S&P 500:

- **Campione 1:** 8260 dati relativi ai rendiementi (negativi) giornalieri dello S&P 500 dal gennaio 1980 a fine settembre 2012;

- **Campione 2:** 900 dati sempre riferito ai rendiementi (negativi) giornalieri dello S&P 500 da marzo 2009 a fine settembre 2012.

Questa scelta è stata effettuata per verificare se le stime prodotte dal metodo POT possono essere considerate robuste anche se si hanno a disposizione pochi dati. Infatti, come già spiegato nel precedente capitolo il metodo *block-maxima* richiede molti dati poiché gli eventi con un contenuto informativo maggiore sono corrispondenti alle crisi che, per loro stessa natura, avvengono raramenete. Utilizzando un campione molto elevato, come in questo caso formato da più di trent'anni di osservazioni, si assume fortemente che il processo che ha generato i dati si sia mantenuto nel tempo. Tuttavia, l'uso di un campione ristretto e composto da dati recenti sarebbe più ragionevole, anche data l'instabilità legata a questo periodo storico.

5.2.1 Alcune analisi preliminari

Prima di applicare l'EVT al campione di dati, sono state effettuate delle classiche analisi preliminari, volte soprattutto a dimostrare la presenza di code spesse, ovvero una distribuzione dei rendimenti leptocurtica e rifiutare l'ipotesi di distribuzione secondo una vv.cc. normale.

Per prima cosa viene illustrato l'andamento dei prezzi delle variabilie oggetto di studio che, come è facile notare, presenta elevata instabilità, soprattutto nell'ultimo decennio.

Successivamente per misurare i cambiamenti intervenuti nel valore dell'indice sono stati calcolati i rendimenti logaritmici, illustrati nella figura 5.2. La massima perdita registrata nel primo campione di dati è in corrispondenza del famoso lunedì nero del 19 ottobre 1987 (-22,89%), mentre nel secondo campione

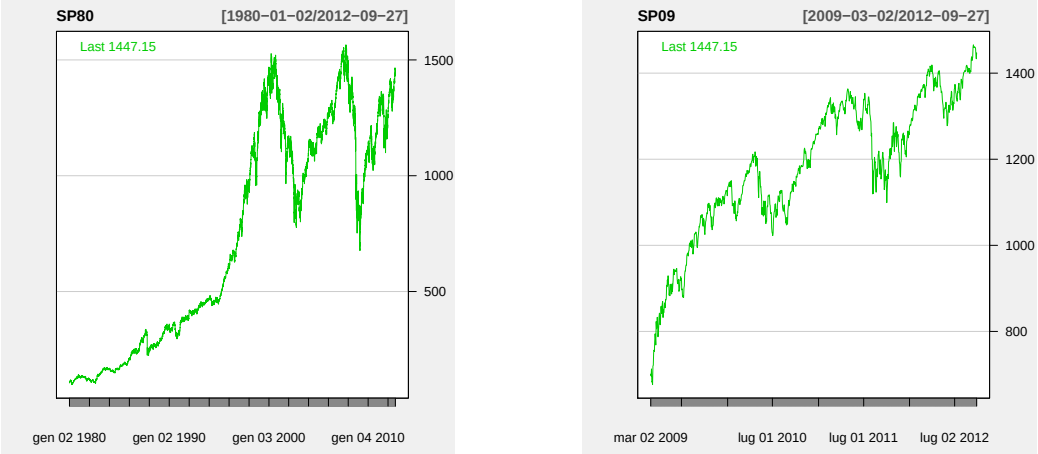

Figura 5.1: Andamento dei prezzi nei due periodi

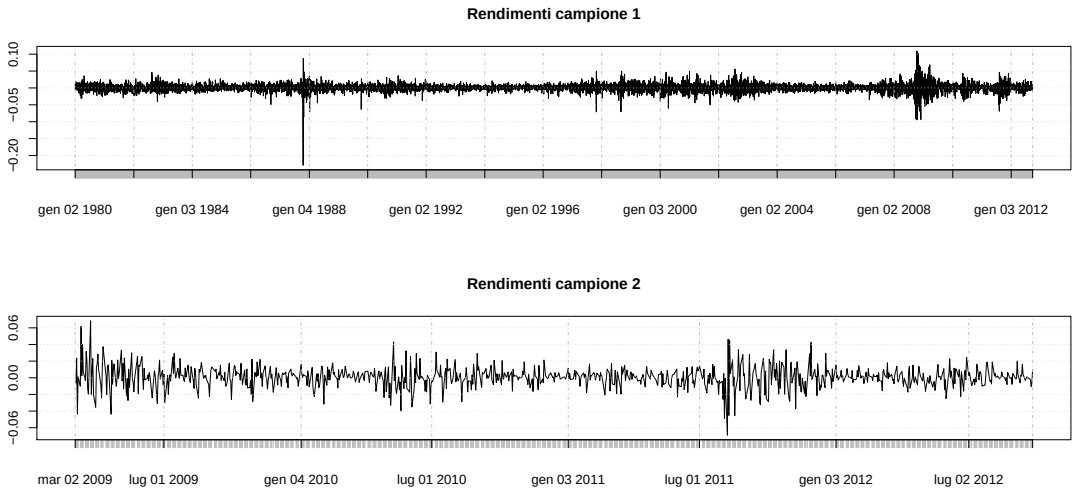

Figura 5.2: Rendimenti dello S&P per i due periodi

il rendimento negativo maggiore (-6,89%) si riscontra in corrispondenza di lunedì 8 agosto 2011, quando all'apertura di Wall Street i mercati reagirono negativamente alla perdita del rating AAA del debito statunitense in base alle valutazioni dell'agenzia Standard&Poor's.

Successivamente sono stati calcolati gli indici di asimmetria e curtosi in base ai quali è possibile fare una prima valutazione sulla forma della distribuzione dei rendimenti per indagare la presenza o meno di *hevy-tail*. L'indice di asimmetria è negativo per entrambe le distribuzioni, ciò sta ad indicare che la distribuzione

	Asimmetria	Curtosi
Campione 1 (8260)	-1,17091	29,42101
Campione 2 (900)	-0,06261749	6,534185
Variabile casuale normale	0	3

Tabella 5.1: Indici di asimmetria e curtosi

è ''spostata" vero sinistra, in quanto il valore modale è maggiore del valore medio; mentre l'indice di curtosi se è più elevato di 3 indica che la distribuzione è leptocurtica, ovvero è più appuntita della normale e ha code pesanti, invece se è minore di 3 indica che la distribuzione è platicurtica ed è più appiattita rispetto alla normale. I dati della tabella 5.1 indicano chiaramente che i rendimenti dello S&P 500 presentano una distribuzione leptocurtica.

Per verificare se i dati sono compatibili con una distribuzione normale è possibile usare anche una rappresentazione grafica, attraverso il *Q-Q plot* (grafico Quantile-Quantile), che confronta i quantili della distribuzuione empirica, riportati sull'asse delle ascisse, con i quantili della distribuzione teorica, in questo caso la distribuzione normale, riportati sull'asse delle ordinate. Quanto più la rappresentazione si discosta dalla bisettrice tanto maggiore è la deviazione della distribuzione empirica dalla distribuzione normale. Anche questo grafico (Figura 5.3) suggerisce che la distribuzione empirica non è assimilabile alla normale, soprattutto per quanto riguarda i valori che risiedono sulla coda della distribuzione, proprio quelli che sono di maggiore interesse per calcolare una misura di rischio quanto più precisa.

Infine è utile usare una procedura formale per dimostrare che il campione di rendimenti non proviene da un processo gaussiano. A questo scopo è stato effettuato il test di Jarque-Bera che si basa sul calcolo delle discrepanze fra i valori osservati di asimmetria e curtosi e quelli della normale. I test effettuati sui campioni di dati sono riportati nella segente tabella.

In entrambi i casi, l'ipotesi nulla di distribuzione normale è rifuitata per-

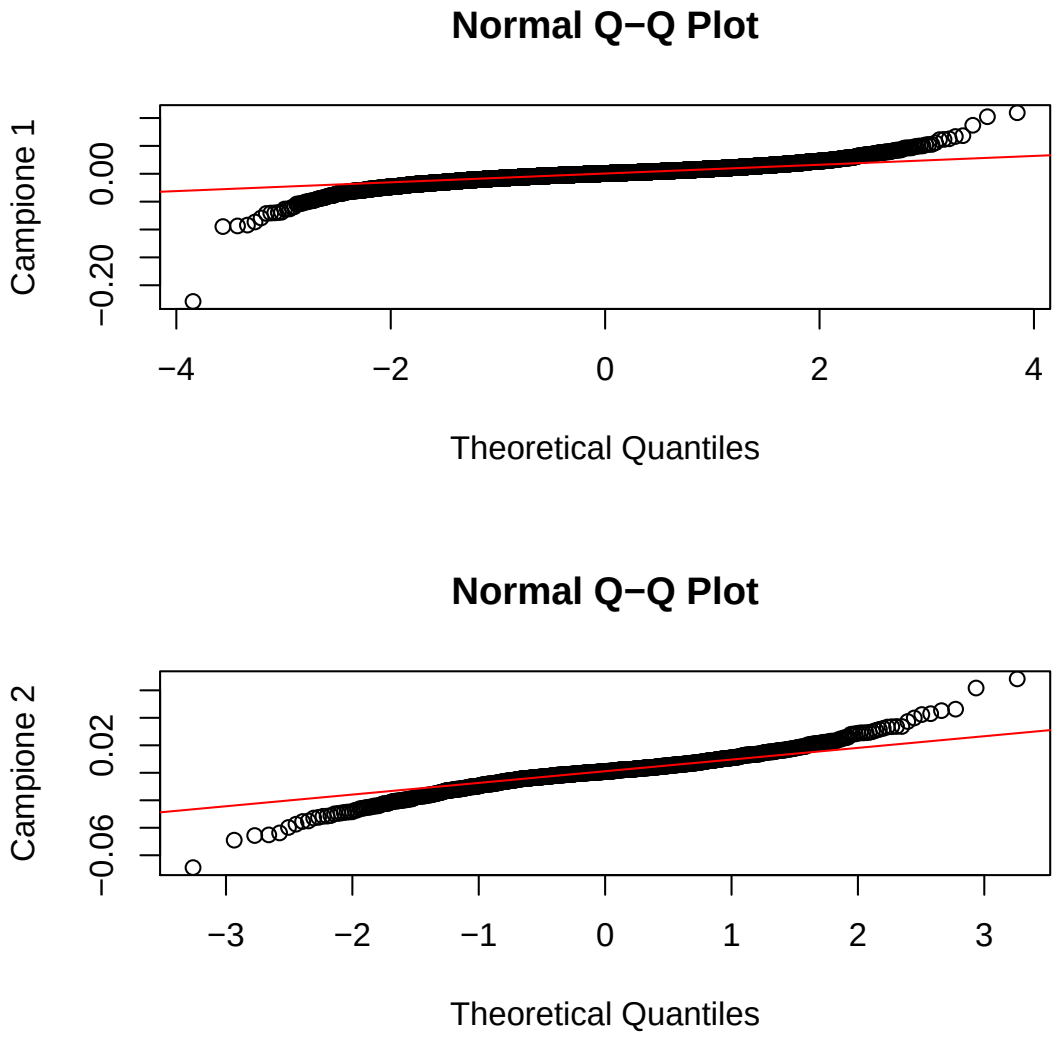

Figura 5.3: Q-Q plot delle serie dei rendimenti

	Campione 1 (8260)	Campione 2 (900)
Jarque Bera	p-value < 2,2e-16	p-value < 2,2e-16

Tabella 5.2: Test di normalità

ché il valore del *p-value* è molto basso, in particolare è inferiore al livello di significatività del 5%, a cui comunemente si fa riferimento.

5.2.2 Applicazione del metodo block-maxima

L'applicazione dell'EVT consente di valutare separatamente le due code della distribuzione dei rendimenti, perciò a questo punto è necessaro operare la seguente trasfomrazione:

$$\{X_1, ..., X_n\} = -\{X_1, ..., X_n\}.$$

in modo che i rendimenti negativi assumano un valore positivo e la serie possa essere considerata come un campione di perdite finanziarie. Va precisato che se come in questo caso si valuta una posizione lunga sull'indice è necessario fare la trasformazione, mentre se si considera una posizione corta si deve valutare la serie dei rendimenti così come risulta dalle differenze logaritmiche.

I parametri dei due campioni sono stati stimati usando il metodo di massima verosimiglianza e le stime riguardano blocchi mensili ($n = 21$), trimestrali ($n = 63$) e semestrali ($n = 126$) e solo per il campione 1 sono stati stimati i parametri anche in base a blocchi annuali $n = 252$. Di seguito vengono proposte delle tabelle contenenti le stime dei parametri della distribuzione dei valori estremi, il valore tra parentesi è in relazione alla deviazione standard.

	m	ξ	σ	μ
n=21	393	0,2360 (0,0388)	0,0070 (0,0002)	0,0133 (0,0003)
n=63	131	0,3722 (0,0842)	0,0076 (0,0005)	0,0185 (0,0007)
n=126	65	0,4434 (0,1340)	0,0093 (0,0011)	0,0219 (0,0013)
n=252	32	0,4593 (0,2163)	0,0139 (0,0026)	0,0276 (0,0029)

Tabella 5.3: Stima dei parametri del campione con 8260 dati

	m	ξ	σ	μ
n=21	42	0,1952 (0,1232)	0,0067 (0,0007)	0,0173 (0,0011)
n=63	14	0,4763 (0,3477)	0,0070 (0,0016)	0,0216 (0,0021)
n=126	7	0,5021 (0,8364)	0,0087 (0,0041)	0,0273 (0,0050)

Tabella 5.4: Stima dei parametri del campione con 900 dati

La prima osservazione riguada il valore di $\xi > 0$ che porta ad affermare che la distribuzione limite è una distribuzione di Fréchet.

Inoltre, in queste due tabelle si vede molto chiaramente sia quanto incidono la scelta di n e m (rispettivamente numero di osservazione in ciascun subperiodo e numero di massimi usati per la stima), sia quanto sia importante avere a disposizioni molti dati. Quando si usa il campione 1 e l'ampiezza di ciascun blocco è mensile ($n = 21$) le stime presentano una bassa deviazione standard, tuttavia si ricorda che per ottenere una distribuzione più vicina alla distribuzione empirica il valore di n dovrebbe essere abbastanza elevato, quindi si potrebbe pensare di ottenere valori molto vicini a valori reali utilizzando $n = 63$ o $n = 126$. Questa affermazione è in relazione al fatto che di solito gli eventi estremi si presentano con bassa frequenza e l'uso di un blocco mensile includerebbe informazioni che non riguardano valori estremi. Come ci si aspettava, le stime dei parametri associate al campione 2 presentano una elevata incertezza.

Di seguito si riportano anche lo *scatter-plot* e il *Q-Q plot* dei residui per quanto riguarda la stima dei parametri per entrambi i campioni con $n = 21$, quindi con subperiodi relativi a un mese di osservazioni. Vengono proposti solo questi due grafici perché i risultati sono analoghi in tutti i casi esaminati.

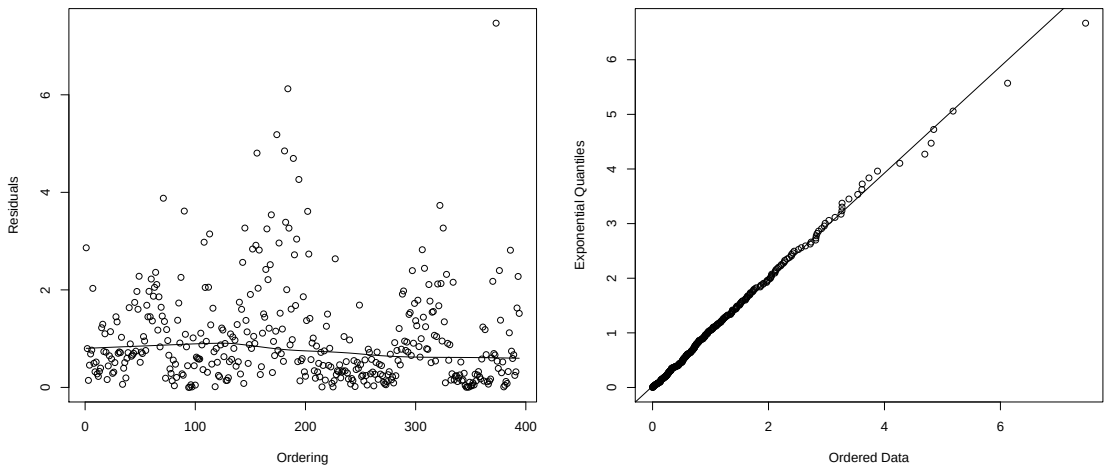

Figura 5.4: Residui, campione 1

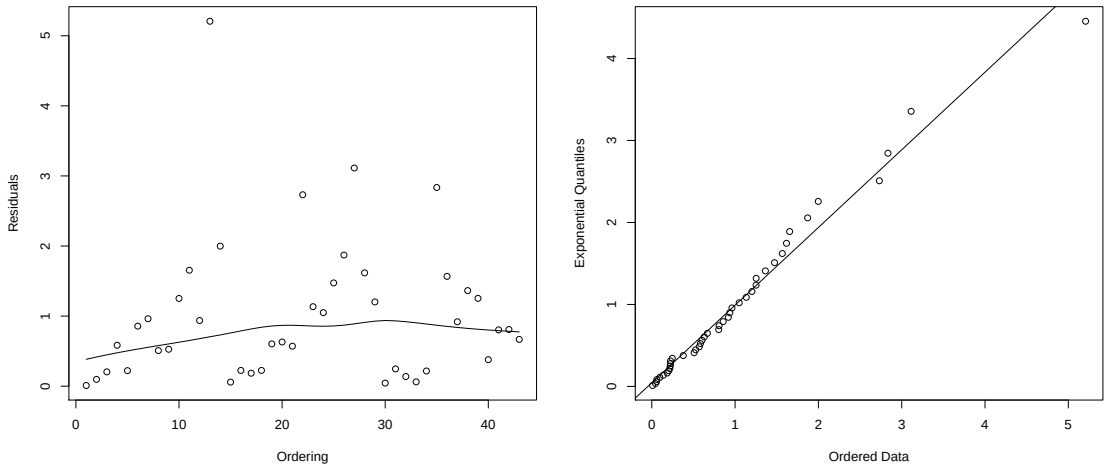

Figura 5.5: Residui, campione 2

Lo *scatter-plot* dimostra che i residui si collocano in modo casuale rispetto al tempo e il *QQ-plot* dimostra che i residui si collocano sulla bisettrice. I residui sono quindi assimilabili a un processo i.i.d. e il modello risulta essere correttamente specificato.

5.2.3 Applicazione del metodo POT

Come precedentemente accennato questo metodo non richiede un campione molto elavato di dati e per verificarlo è stato applicato il metodo POT agli stessi due campioni della precedente prova. In questo caso la variabile che richiede maggiore interesse è la soglia u. Infatti il suo valore deve essere scelto in base alle seguenti indicazioni:

1. il valore suggerito dalla letteratura, ovvero pari a $u = 2,5\%$ o in alternativa pari a $u = 2,75\%$;

2. i dati al di sopra della soglia u dovrebbero essere un numero tale da rappresentare circa il 5% del campione;

3. la volatilità della variabile oggetto di studio, se un titolo presenta alta variabilità potrebbe essere opportuno scegliere una soglia $u = 10\%$;

4. la valutazione del grafico del valore dell'eccesso medio rispetto al variare della soglia;

5. l'avversione al rischio dell'istituzione.

In questo caso dato che lo scopo è valutare due campioni di dati riferiti ad uno stesso titolo ma con numerosità molto difforme è facile intuire che il valore della soglia da utilizzare non sarebbe lo stesso. Si è preferito così applicare a ciascun campione il metodo POT con soglia pari a $u = 2,5\%$ e pari a $u = 2,75\%$, così come indicato dalla letteratura.

Nella tabella 5.5 sono indicati i risultai ottenuti per il campione 1, mentre nella tabella 5.6 i risultati riferiti al campione 2, tra parentesi il valore della deviazione standard.

	N_u	ξ	β
u=2,5%	155	0,3773 (0,1146)	0,0083 (0,0011)
u=2,75%	115	0,3443 (0,1294)	0,0098 (0,0015)

Tabella 5.5: Stima dei parametri del campione 1 (8260 dati)

	N_u	ξ	β
u=2,5%	28	0,0902 (0,2200)	0,0079 (0,0022)
u=2,75%	21	0,1115 (0,2682)	0,0078 (0,0025)

Tabella 5.6: Stima dei parametri del campione 2 (900 dati)

Le stime risultano essere molto sensibili al variare della numerosità campionaria e l'incertezza associata al valore dei parametri del campione 2 è maggiore rispetto al campione 1.

Il confronto tra le due stime può essere agevolato se si introducono i seguenti grafici. Il grafico a sinistra rappresenta la distribuzione degli eccessi, mentre quello a destra la coda della distribuzione empirica.

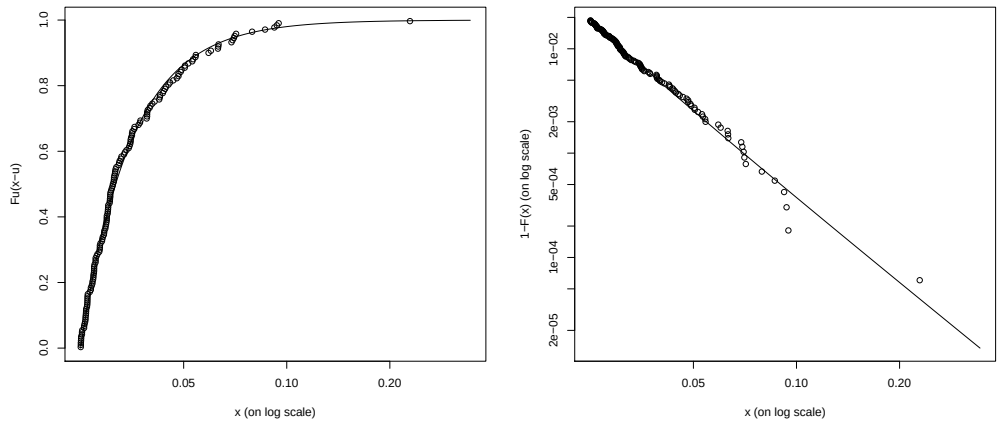

Figura 5.6: Distribuzione empirica degli eccessi, campione 1

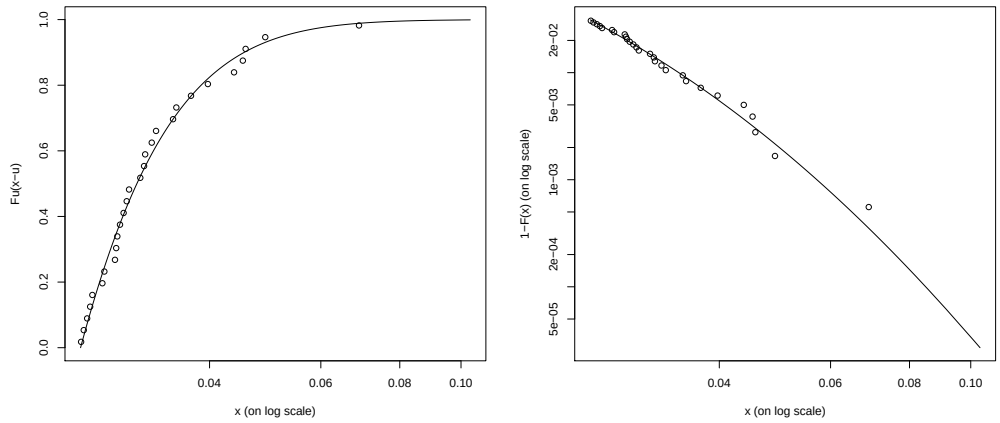

Figura 5.7: Distribuzione empirica degli eccessi, campione 2

In entrambi i casi la distribuzione degli eccessi, ovvero i valori indicati con i puntini, si adattano ad un modello GPD rappresentato dalla linea continua. Risulta chiaro tuttavia che è preferibile avere più dati a disposizione per la stima dei paramentri secondo il metodo di massima verosimiglianza in modo da ottenre valori meno incerti e per far sì che la distribuzione degli eccessi si adatti meglio al modello GPD. Questa affermazione è discutibile, ricordando che se si utilizzano campioni molto estesi di dati si assume implicitamente che il processo si sia mantenuto stabile nel corso del tempo, situazione che l'evidenza empirica

non conferma.

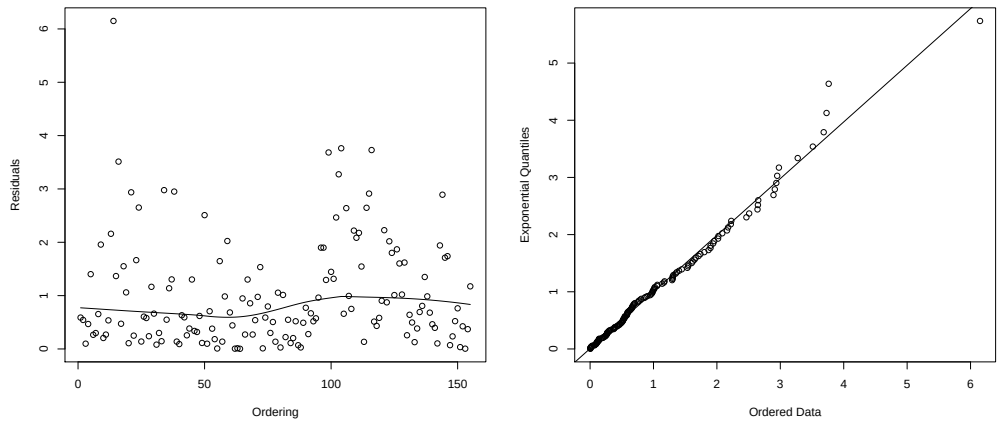

Figura 5.8: Analisi dei residui, campione 1

Vengono proposti anche per il metodo POT lo *scatter-plot* e il *QQ-plot* dei residui e il modello risulta essere correttamente specificato per entrambi i campioni. Sono propsti solo i grafici relativi al modello con $u = 2,5\%$ poiché i risultati sono analoghi per $u = 2,75\%$.

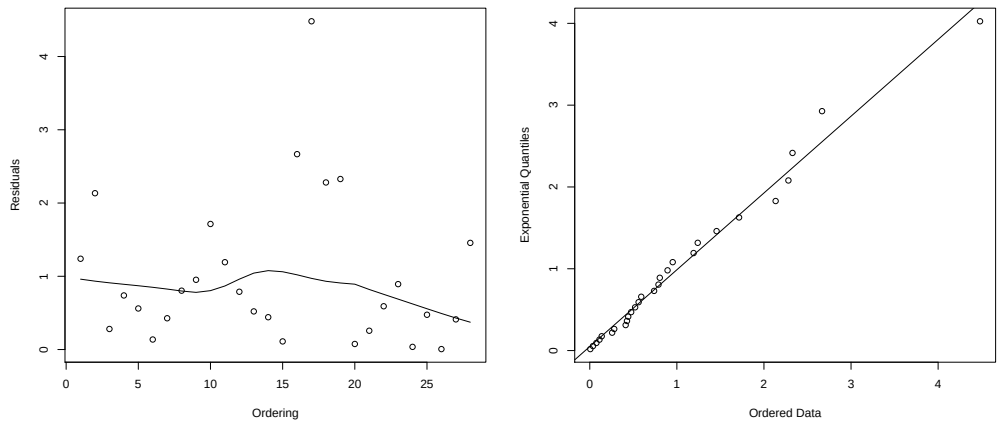

Figura 5.9: Analisi dei residui, campione 2

A questo punto è possibile calolare i VaR e l'ES per entrambi i campioni per consentire un ulteriore confronto. Il livello di confidenza scelto per la stima è del 99% e il calcolo viene effettuato per tutti e due i valori della soglia finora

considerati. Gli intervalli, inferiore e superiore, sono costruiti riparametrizzando il modello GPD in termini di $\phi = g(\xi, \beta, N_{u/n})$ e l'intervallo di confidenza per $\widehat{\phi}$ è costruito secondo il *likelihood ratio test*[1]. Per l'intervallo il livello di confidenza è fissato al 95%.

	Intervallo inferiore	VaR	Intervallo superiore
Campione 1	0,02979980	0,03095377	0,03249685
Campione 2	0,03109458	0,03451221	0,03954762

Tabella 5.7: Stima del VaR, $u = 2,5\%$

	Intervallo inferiore	VaR	Intervallo superiore
Campione 1	0,03048537	0,03096040	0,03195975
Campione 2	0,03148378	0,03446792	0,03920062

Tabella 5.8: Stima del VaR, $u = 2,75\%$

La stima del VaR è pressoché stabile anche cambiando il valore della soglia. Si nota tuttavia che utilizzando un campione ristretto di dati il VaR è più elevato e vi è maggiore incertezza anche in relazione all'ampiezza degli intervalli.

Di seguito vengono proposti calcoli relativi all'ES, sempre riferiti a un livello di confidenza del 99% e per entrambi valori soglia.

	Intervallo inferiore	ES	Intervallo superiore
Campione 1	0,03813319	0,04420463	0,08155542
Campione 2	0,04302281	0,04802700	0,06141725

Tabella 5.9: Stima dell'ES, $u = 2,5\%$

	Intervallo inferiore	ES	Intervallo superiore
Campione 1	0,04317494	0,04784588	0,06016711
Campione 2	0,03840799	0,04416781	0,10343750

Tabella 5.10: Stima dell'ES, $u = 2,75\%$

In questo caso la stima dell'ES cambia all'aumentare del valore della soglia, in particolare aumenta nel caso di un campione molto elevato di dati comportando

[1] McNeil, Frey, Embrechts, 2005.

allo stesso tempo la riduzione dell'intervallo superiore. Invece, nel caso del campione 2 con pochi dati, la stima diventa molto variabile e l'intervallo superiore aumenta notevolmente.

Vediamo ora cosa succede se il livello di confidenza aumenta al 99,9%.

	Intervallo inferiore	VaR	Intervallo superiore
Campione 1	0,05981555	0,06995033	0,09009635
Campione 2	0,04643456	0,05707936	0,10343750

Tabella 5.11: Stima del VaR, $u = 2,5\%$

	Intervallo inferiore	VaR	Intervallo superiore
Campione 1	0,06018492	0,06985567	0,08904426
Campione 2	0,04637229	0,05709256	0,10343750

Tabella 5.12: Stima del VaR, $u = 2,75\%$

Come è logico aspettarsi aumentando il livello di confidenza anche la stima del VaR aumenta. In particolare, si nota che rispetto alle precedenti stime l'intervallo superiore aumenta e la stima del VaR per il campione 2 è minore rispetto alla stima del campione 1 ma presenta un intervallo superiore molto elevato.

Infine vengono elencati i risultati ottenuti calcolando l'ES con un livello di confidenza del 99,9%.

	Intervallo inferiore	ES	Intervallo superiore
Campione 1	0,08100899	0,11065731	0,21973261
Campione 2	0,05237594	0,06901083	0,10343750

Tabella 5.13: Stima dell'ES, $u = 2,5\%$

	Intervallo inferiore	ES	Intervallo superiore
Campione 1	0,08135445	0,10716601	0,21717900
Campione 2	0,05230911	0,06963184	0,10343750

Tabella 5.14: Stima dell'ES, $u = 2,75\%$

La stima dell'ES con un livello di confidenza del 99,9% porta ad affermare quanto queste stime siano sensibili agli eventi estremi che compongno il campione di dati.

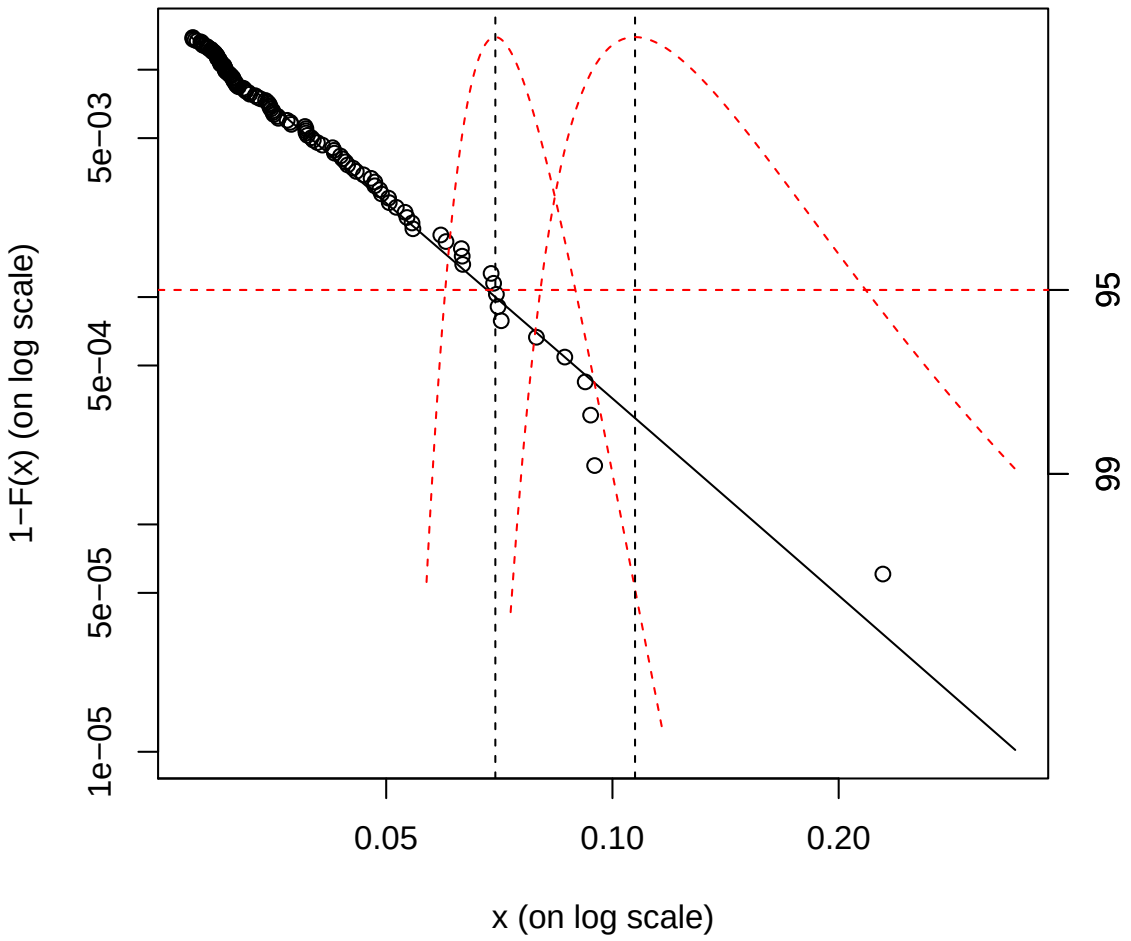

Figura 5.10: VaR e ES per il campione 1 con u=2,75% e livello di confidenza del 99,9%

Le figure di seguito proposte consentono una rappresentazione grafica del metodo di calcolo del VaR e dell'ES appena esposto.

Nella figura 5.10 è rappresentato il campione 1 con una soglia $u = 2,75\%$ e un livello di confidenza del 99.9%. Le rette verticali rappresentano la stima

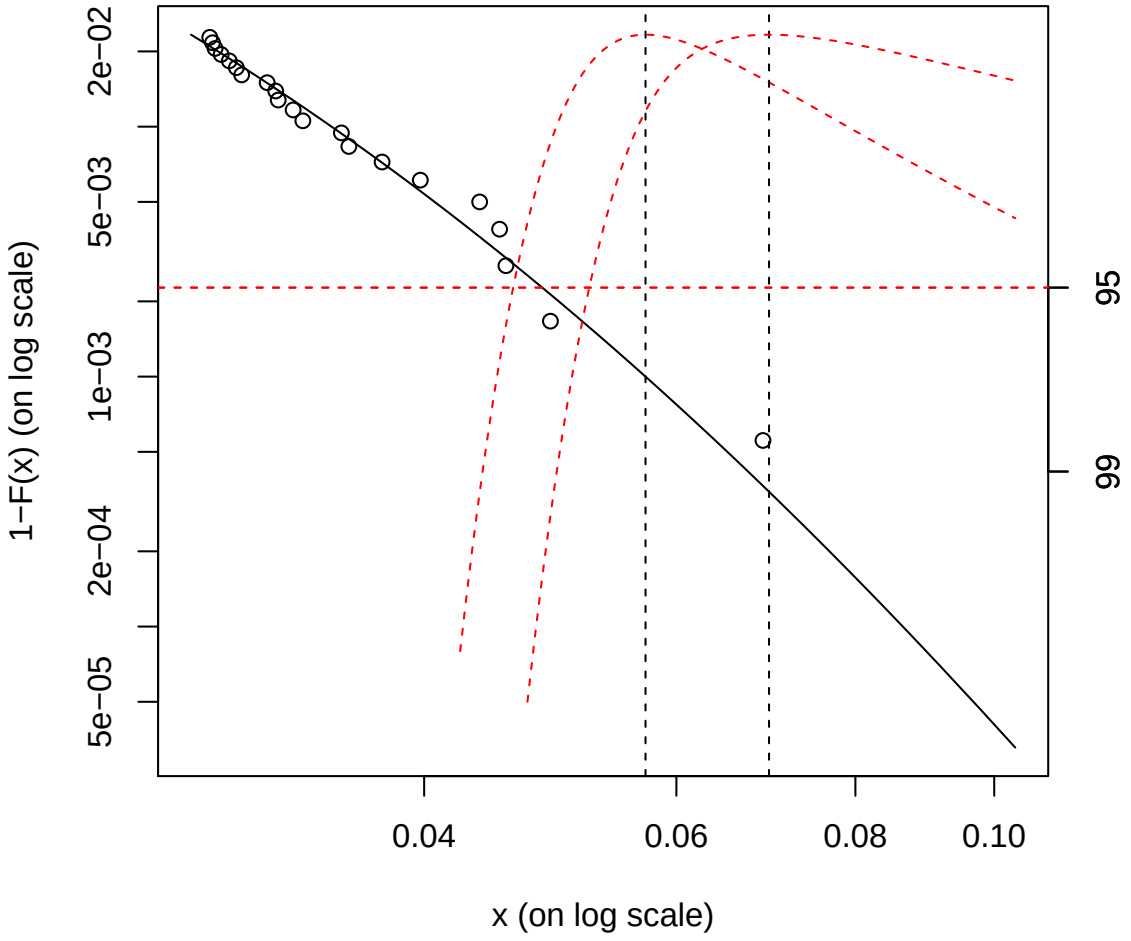

Figura 5.11: VaR e ES per il campione 2 con u=2,75% e livello di confidenza del 99,9%

della misura di rischio, ovvero il VaR (0,06985567) e l'ES (0,10716601), e la retta orizzontale individua l'intervallo di confidenza al 95% delle stime e il valore dell'intervallo corrisponde al punto in cui la curva interseca la retta orizzontale in corrispondenza del livello di confidenza. Inoltre è possibile valutare anche l'intervallo di confidenza al 99% immaginando di tracciare una retta orizzontale in corrispondenza del livello al 99%, posto sulla destra del grafico. I punti del grafico rappresentano le 115 eccedenze al di sopra della soglia che sono stati collocati

secondo la distribuzione empirica.

In base al medesimo livello di confidenza del 99,9% e alla stessa soglia $u = 2,75\%$ è stata costruita la figura 5.11 che illustra il VaR (0,05709256) e l'ES (0,06963184) del campione 2.

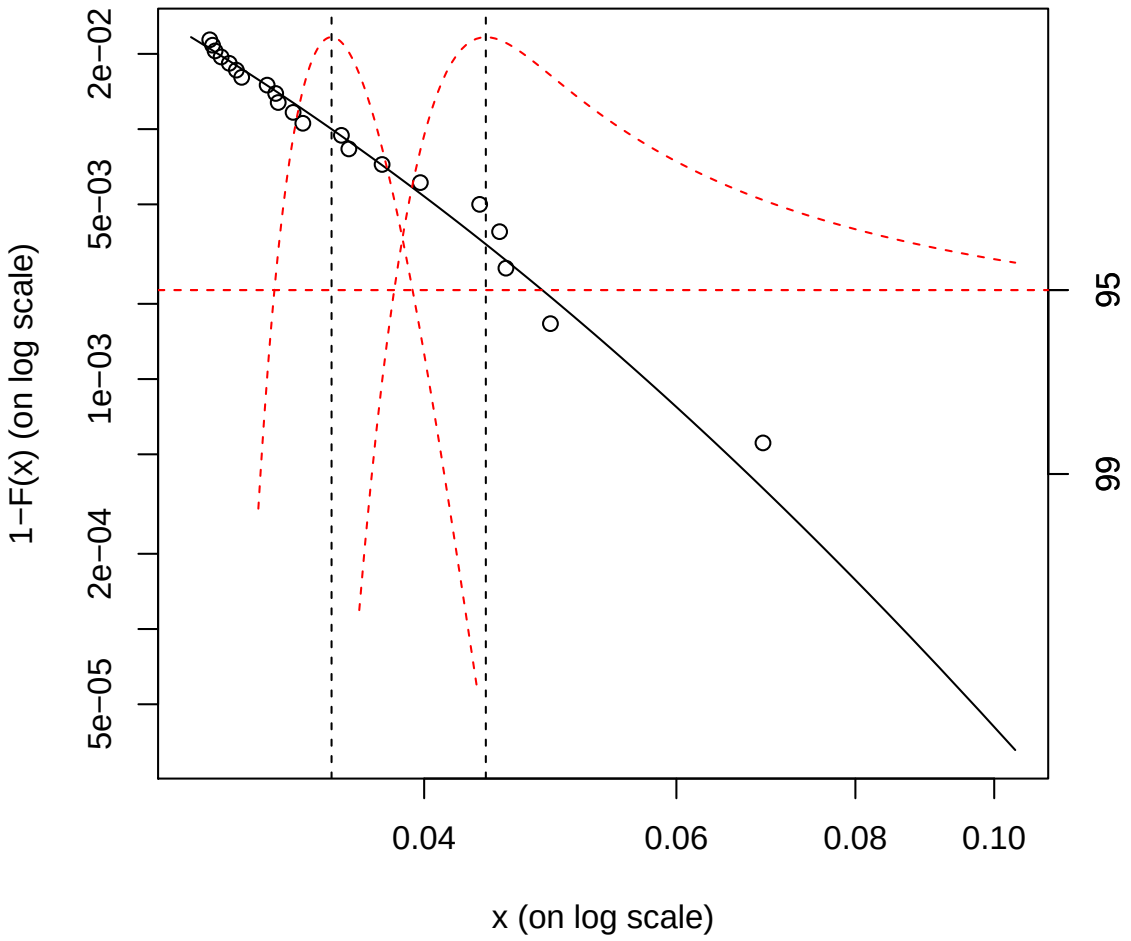

Figura 5.12: VaR e ES per il campione 2 con u=2,75% e livello di confidenza del 99%

La figura 5.12 rappresenta la stima del VaR e dell'ES per il campione 2, utilizzando una soglia $u = 2,75\%$, con un livello di confidenza al 99% rispettivamente pari a 0,03446792 e 0,04416781.

Si ricorda che nel campione 1 è compresa anche la perdita del 22,89% del famoso *black monday* del 1987, mentre nel campione 2 la peridta maggiore è del 6,89% registrata recentemente nel 2011. Potrebbe essere interessante valutare cosa accade togliendo dal campione il valore relativo al crollo del -22,89%. La stima

	Intervallo inferiore	Stima	Intervallo superiore
VaR	0,05710550	0,06463405	0,07924374
ES	0,07109049	0,08800952	0,14204272

Tabella 5.15: Stima delle misure di rischio senza la perdita del 1987, soglia $u = 2,75\%$ e livello di confidenza al 99,9%

del VaR è inferiore e l'intervallo superiore diminiuisce; l'impatto maggiore però si riscontra nei confornti della stima dell'ES, dove sia la stima della misura di rischio sia l'intervallo superiore diminuiscono notevolmente.

5.3 Una semplice prova di stress utilizzando il metodo block-maxima

A questo punto si ritiene interessante valutare se il metodo *block-maxima*, usato in termini di *return level*, possa essere uno strumento utile per determinare il livello di perdita $r_{n,k}$ che potrebbe essere raggiunto ogni k periodi.

Questa prova viene logicamente effettuata ex-post e è stato scelto di considerare ancora una volta il campione di rendimenti negativi dello S&P 500 per vedere se la caduta dell'indice in relazione al fallimento di Lehman Brothers il 15 settembre 2008 poteva essere o meno prevista. L'indice era sceso del -4,82% e si tratta della perdita più elevata dalla riapertura di Wall Street il 17 settembre 2001 dopo l'attacco terroristico al Word Trade Center, che fu pari a -5,04%.

Il campione di dati che viene usato è pari a 7244 osservazioni che partono dal 1980 fino al 12 settembre 2008. Immaginando di essere il *risk manager* di un'istituzione, ci si chiede all'alba del 15 settembre 2008 sarebbe stato o meno possibile aspettarsi tale perdita.

Per applicare il modello GEV è stato scelto di suddividere il campione in blocchi trimestrali e semestrali. Le stime dei parametri vengono di seguito riportate.

	m	ξ	σ	μ
n=63	114	0,3602 (0,0877)	0,0070 (0,0005)	0,0178 (0,0007)
n=126	57	0,4456 (0,1463)	0,0086 (0,0011)	0,0211 (0,0013)

Tabella 5.16: Stima dei parametri del modello GEV

Il parametro $\xi > 0$ indica che la distribuzione limite è una distribuzione di Fréchet.

Adesso è possibile calcolare il livello $r_{n,k}$ di perdita che potrebbe verificarsi in media ogni k periodi. Il calcolo è stato effettuato considerando $k = 28$ e $k = 14$ per quanto riguarda i blocchi trimestrali ($n = 63$), quindi un intervallo rispettivamente pari a 7 e 3,5 anni. In modo analogo per i blocchi semestrali ($n = 126$) sono stati scelti $k = 14$ e $k = 7$ per rappresentare lo stesso intervallo temporale.

Gli intervalli che vengono specificati nella seguente tabella sono stati ottenuti partendo da $\phi = H^{-1}_{\xi,\mu,\sigma}(1-(1/k))$ e riparametrizzando la distribuzione GEV attraverso $\theta = (\phi, \xi, \sigma)'$ anziché $\theta = (\xi, \mu, \sigma)'$. La stima di massima verosimiglianza per ϕ si ottiene in base al'Equazione (4.6) e la stima degli intervalli è stata effettuata in base al *likehood ratio test*, sempre con un livello di confidenza del 95%[2].

n	k	Intervallo inferiore	Return level	Intervallo superiore
63	28	0,05043221	0,06294142	0,08867149
63	14	0,04072993	0,04831747	0,06195077
126	14	0,04908079	0,06371218	0,10197151
126	7	0,03793246	0,04643839	0,06361360

Tabella 5.17: Stima del return level

In base a questi calcoli è possibile affermare che la caduta dell'indice S&P 500 in relazione al fallimento di Lehman Brothers sarebbe stata prevsita grazie all'applicazione dell'EVT. Infatti, il livello di perdita che in media potrebbe verificarsi

[2]McNeil, Frey, Embrechts 2005.

una volta ogni 3,5 è del 4,8%, esattamente pari al -4,82% registrato il 15 settembre 2008.

Si è provato poi a considerare sempre la stima ottenuta con i dati dal 1980 al 2008 per i rendimenti negativi registrati dal 2008 al 2012 dal punto di vista grafico. Le rappresentazioni si riferiscono al modello GEV con $n = 63$, quindi blocchi trimestrali.

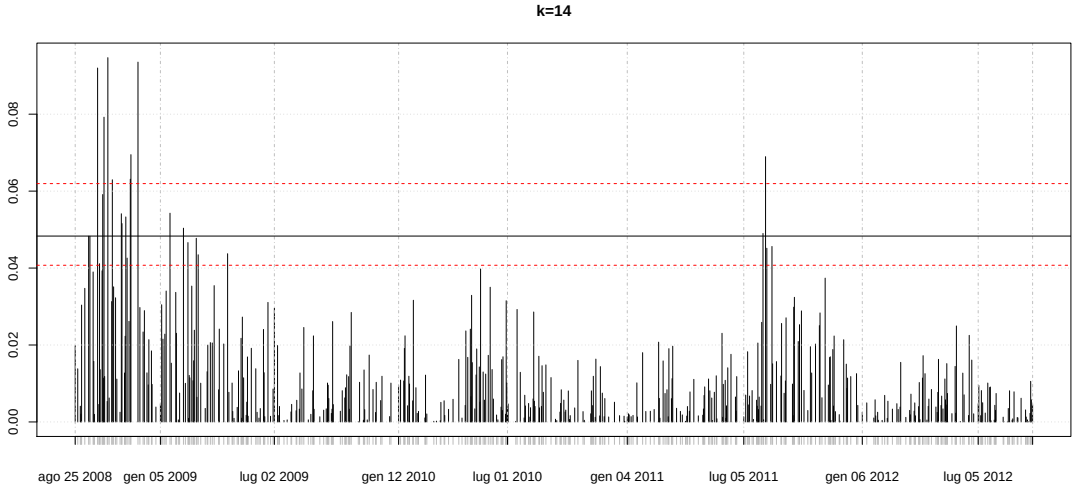

Figura 5.13: Prove di stress per l'indice S&P 500, perdita massima ogni 14 trimestri

La linea nera corrisponde alla stima di $r_{n,k}$ precedentemente calcolata, mentre le linee tratteggiate di colore rosso sono in corrispondenza degli intervalli di confidenza.

Nel grafico 5.13 si vede, come precedentemente affermato, che la perdita del 15 settembre 2008 sarebbe stata prevista utilizzando un orizzonte temporarle di riferimento di 14 trimestri (3,5 anni). Tuttavia le perdite registrate i giorni seguenti vanno ben al di fuori dell'intervallo superiore e se si scorre in avanti nel tempo di un periodo pari a circa 3 anni la perdita del 6,82% dell'8 agosto 2011 non sarebbe stata prevista da questa valutazione.

Il grafico 5.14 considera il calcolo del *return level* con un orizzonte temporale di 28 trimestri (quindi 7 anni) e in questo caso si riesce a prevedere l'interval-

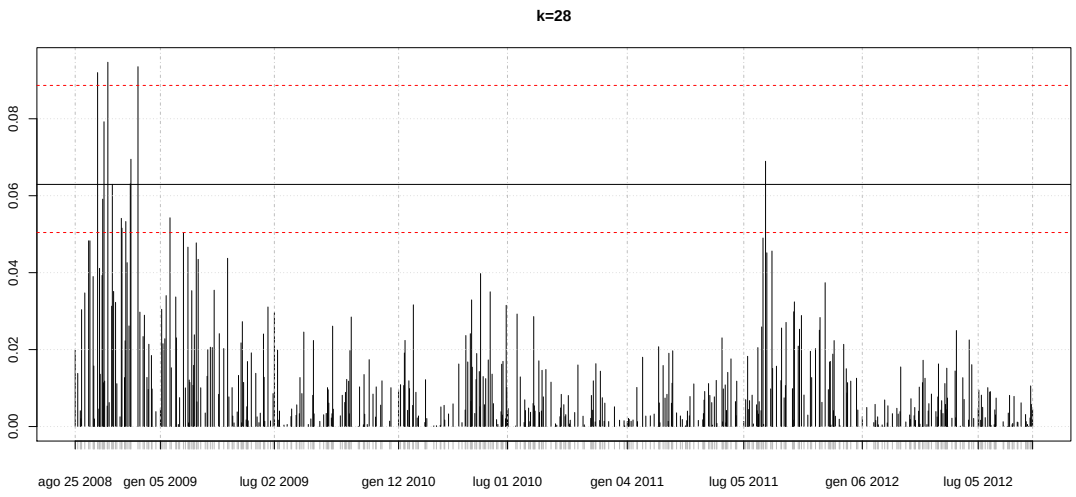

Figura 5.14: Prove di stress per l'indice S&P 500, perdita massima ogni 28 trimestri

lo entro il quale si trovano le perdite relative al periodo avverso del settembre 2008. Solo in tre occasioni l'indice S&P 500 supera l'intervallo superiore. Con riferimento al 2011 poi, la perdita in corrispondenza del declassamento del debito USA rientra nell'intervallo ma la frequenza di perdite così elevate non corrisponde a come la prova è stata costruita. Si deve considerare però che questo genere di prova indica la perdita che in media ogni k periodi potrebbe essere raggiunta e il risultato ottenuto sembra abbastanza realistico.

Queste prove hanno portato ai risultati sperati, e si sono avvicinati alla realtà. Il metodo *block-maxima* impiegato per effettuare prove di stress rappresenta un metodo molto veloce e pratico, soprattutto in relazione alle prove di stress effettuate simulando scenari di evoluzione del mercato che sicuramente richiedono molti più calcoli e molto più tempo.

5.4 Calcolo dello stressed VaR

Dal 1 gennaio 2012 alle banche che si avvalgono dei modelli interni per il calcolo del requisito patrimoniale a fronte dei rischi di mercato è stato imposto di calcolcare la misura aggiuntiva dello *stressed-VaR*, sVaR. Si tratta di una misura di rischio che deve essere calcolata su un intervallo temporale di 12 mesi consecutivi caratterizzati da elevato stress finanziario e tale periodo deve essere sottoposto all'approvazione dell'autorità di vigilanza.

In questa sede, si vuole indagare se il metodo POT possa essere impiegato con risultati soddisfacenti per il calcolo dello sVaR, sebbene l'intervallo temporale di riferimento sia composto da solo un anno di osservazioni. Saranno utilizzati i rendimenti negativi dell'indice FTSE 100 e si procederà con il calcolo del VaR durante un orizzonte temporale di 5 anni, da gennaio 2007 a dicembre 2011, e al calcolo dello sVaR durante un orizzonte temporale di 12 mesi, compreso nel campione di 5 anni impiegato per il calcolo del VaR, che si distingue per elevata turbolenza dei mercati.

Di seguito vengono riportate la serie dei prezzi e dei rendimenti per il campione del FTSE 100 dal 1 gennaio 2007 al 30 dicembre 2011.

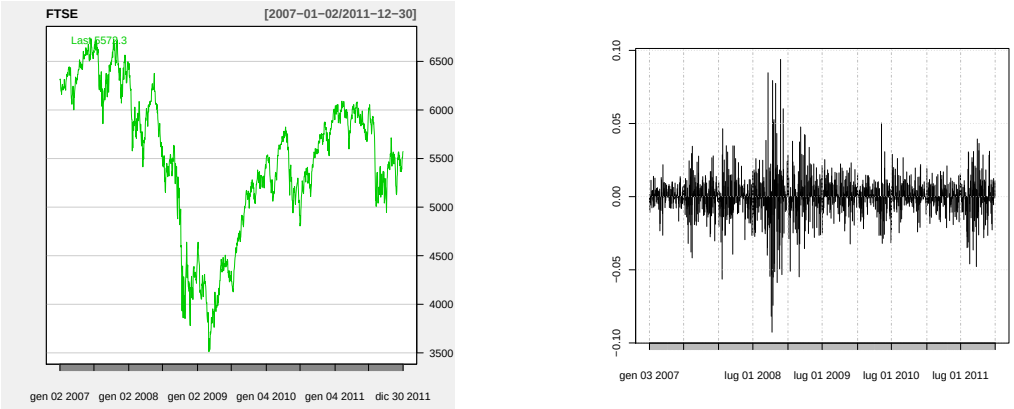

Figura 5.15: Andamento dei prezzi e dei rendimenti del FTSE 100

Per il calcolo dello sVaR è stato selezionatio il periodo che comprende il secondo semestre 2008 e il primo semestre 2009. Di seguito si riportano i relativi

grafici dei prezzi e dei rendimenti. Lo stesso comitato di Basilea indica che la

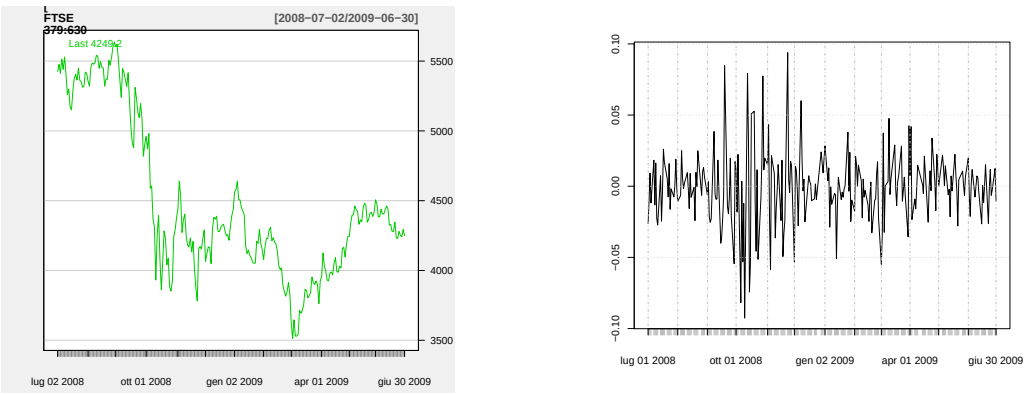

Figura 5.16: Andamento dei prezzi e dei rendimenti del FTSE 100 durante il periodo di stress

selelzione di un campione di 12 mesi proveniente dal periodo 2007/2008 è adeguato e in base all'andamento dei rendimenti è stato scelto il periodo che va dal 1 luglio 2008 al 30 giugno 2009.

Prima di applicare il metodo POT è stato effettuato il test di Jarque Bera per indagare se la distribuzione dei rendimenti è normale e l'ipotesi è rifiutata per entrambi i campioni.

	5 anni	1 anno
Jarque Bera	p-value < 2,2e-16	p-value < 2,2e-16

Tabella 5.18: Test di normalità

Di seguito si procede con la stima dei parametri. Il livello di soglia scelto è uguale per i due campioni. Tuttavia, le stesse autorità[3] hanno specificato che è richiesta consistenza tra VaR e sVaR solo per quanto riguarda il livello di confidenza e l'*holding period* mentre per gli altri valori è previsto che le stesse autorità verifichino se deve sussistere consistenza o meno. In questa applicazione si ipotizza che per quanto riguarda il livello della soglia venga richiesta la consistenza. Il valore della soglia scelto è del $u = 2,4\%$, esso corrisponde al valore oltre il quale si hanno a disposizione il 5% dei dati relativi al campione di 5 anni.

[3]European Banking Authority, 2012.

	N_u	ξ	β
5 anni	72	0,3207 (0,1879)	0,0081 (0,0017)
1 anno	37	0,3028 (0,3463)	0,0113 (0,0042)

Tabella 5.19: Stima dei parametri del FTSE 100

Durante i due periodi il valore stimato del parametro ξ non subisce grandi variazioni anche se l'incertezza legata al suo valore per quanto riguarda il campione con solo un anno di dati è molto elevata e ciò dipende soprattutto dalla scarsità di dati a disposizione rispetto al campione di 5 anni.

L'analisi grafica dei residui non viene riportata ma è stato comunque verificato che il modello è correttamente specificato per entrambi i campioni.

A questo punto si procede con la stima del VaR e dello sVaR con un livello di confidenza pari al 99%.

	Intervallo inferiore	Stima	Intervallo superiore
VaR	0,03822648	0,04306959	0,05067130
sVaR	0,05501708	0,07103918	0,13896833

Tabella 5.20: Stima del VaR e dello sVaR

Di seguito vengono proposte le stime dal punto di vista grafico, nelle quali è stata inclusa anche la stima dell'ES.

Lo sVaR riflette la turbolenza del mercato londinese durante il periodo selezionato, e il suo valori pari a 0,07103918 è molto elevato rispetto al valore del VaR considerando il campione di 5 anni che risulta corrispondente a 0,04306959. Tuttavia la stima dello sVaR è abbastanza incerta e l'intervallo superiore è molto elevato, probabilmente dato il campione di dati molto ristretto.

Le autorità di vigilanza richiedono di calcolare il VaR e lo sVaR ipotizzando un periodo di detenzione pari a 10 giorni e i valori fin qui calcolati si riferiscono ad un *holding period* pari a un giorno. Di solito, con i metodi tradizionali per ottenere la stima del VaR relativo a un orizzonte temporale di dieci giorni si moltiplica il valore giornaliero per $\sqrt{10}$. Questa scelta è coerente quando si as-

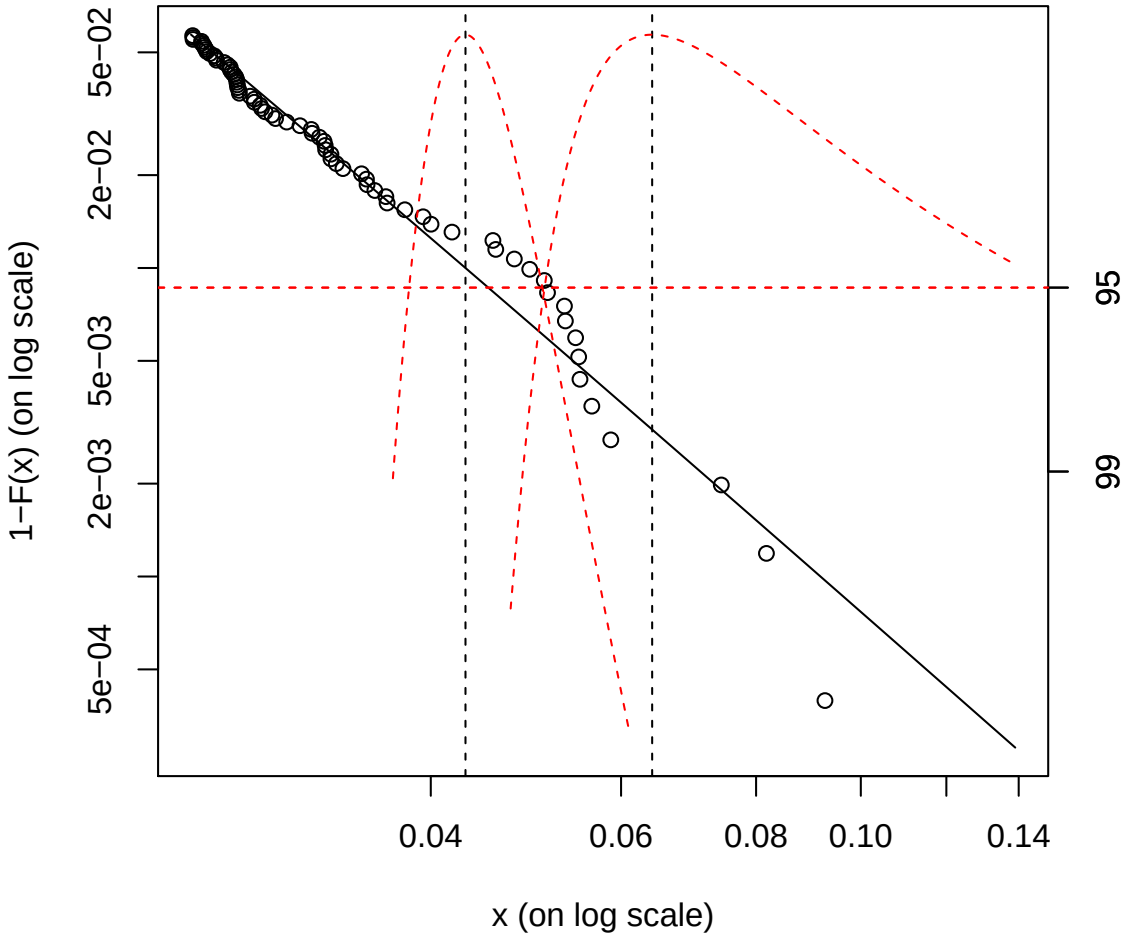

Figura 5.17: Stima del Var

sume che la distribuzione dei rendimenti è assimilabile alla distribuzione della vv.cc. normale. Quando ci si avvale dell'EVT, utilizzare un fattore moltiplicativo scalare in base alla radice quadrata del tempo porterebbe a sottostimare il rischio quando si utilizzano livelli di confidenza molto elevati (99,5% o 99,95%) e a sottostimare il rischio per livelli di confidenza minori (come 95%)[4].

Una possibilità consiste nell'utilizzare come dati i rendimenti a 10 giorni, quindi usando osservazioni di dieci giorni non sovrapposti, ma questa alterna-

[4]Embrechts, 2004.

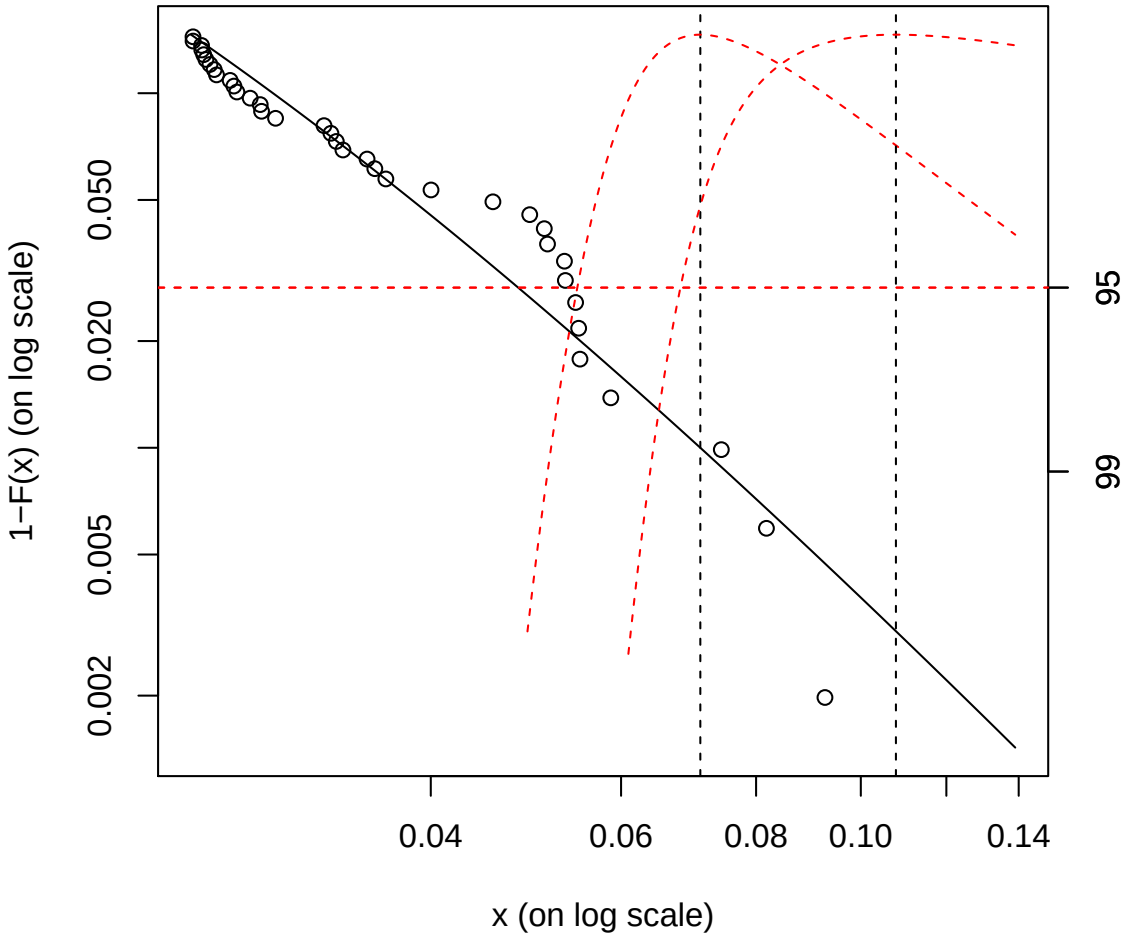

Figura 5.18: Stima dello stressed VaR

tiva è di scarso valore da punto di vista pratico perché si dovrebbero utilizzare valori molto indietro nel tempo e il numero di dati a disposizone risulterebbe carente.

Tuttavia alcuni autori, McNeil e Frey, hanno condotto alcuni esperimenti per indagare quale sia la legge scalare implicita nel calcolo del VaR per orizzonti temporali superiori a un giorno. I risultati che hanno ottenuto dimostrano che la relazione dipende dalla voltatilità corrente del mercato e che un esponente maggiore

dello 0,5 è richiesto in periodi caratterizzati da bassa volatilità[5]. Nella seguente tabella vengono riportati gli esponenti da dare all'orizzonte temporale espresso in giorni, che sono stati calcolati da questi autori, che va imputato anche in relazione anche al livello di confidenza utilizzato per stimare la misura di rischio.

q	**0,95**	**0,99**
Bassa volatilità	0,65	0,65
Volatilità media	0,60	0,59
Alta volatilità	0,48	0,47

Tabella 5.21: Esponenti per il calcolo del VaR a T giorni

[5]Embrechts, 2004.

Commento finale

Nel corso di questo elaborato è stato più volte ribadita l'importanza che riveste lo studio dell'andamento delle variabili finanziarie, in modo da consentire una piena conoscenza dei rischi ad esse connesse. Il costante apprendimento è la chiave per condurre una corretta gestione, aumentare il valore per gli *shareholders* e assolvere alla funzione sociale che tutti gli istituti finanziari rivestono nei confronti della vasta clientela.

Il *Value at Risk* rappresenta una misura del rischio di mercato largamente condivisa data la sua facilità di comprensione e il ruolo che riveste anche grazie alla previsione delle autorità di vigilanza di utilizzarla come base di calcolo per quantificare il patrimonio deputato alla copertura di tali rischi. Tuttavia, ad oggi, un modello VaR che non presenti alcun elemento di criticità non è ancora stato elaborato.

Le tecniche tradizionali presentano il difetto di non essere in grado di cogliere gli eventi estremi, ovvero quei valori negativi che conducono a situazioni particolarmente critiche e con ingenti perdite associate al portafoglio di negoziazione. In particolare, quando ci si avvale del metodo varianze-covarianze assumendo una distribuzione normale dei rendimenti e fissando un certo livello di confidenza, ad esempio del 99%, la stima risutante corrisponde a un livello di confidenza minore di quanto dichiarato poiché vi sono eventi che non vengono nemmeno contemplati. Ciò avviene perché la distribuzione effettiva dei rendimenti dei fattori di mercato non segue la forma della distribuzione normale ma presenta code spesse, quindi una maggiore possibilità di eventi che si trovano ai margini

e per questo non previsti dal metodo varianze-covarianze in quanto non inclusi all'interno della distribuzione normale. Le tecniche di simulazione, pur non assumendo una distribuzione normale non consentono di ottenere risultati fedeli poiché implicitamente ipotizzano che la distribuzione storica sia stabile anche se nella realtà i rendimenti sono processi autocorrelati e con volatilità che presenta evidenti cambiamenti strutturali nel tempo.

L'impiego dell'*Extreme value theory* nello studio dell'andamento delle variabili finanziarie rappresenta una possibile soluzione ai problemi legati ai metodi appena enunciati. Focalizzandosi solo sullo studio dei massimi è possibile esplicitare solo la forma funzionale delle code della distribuzuine, e quindi riuscire a cogliere qui valori che sfuggirebbero dalle tradizionali valutazioni. Questo assume ancora più importanza quando il livello di confidenza scelto è molto elvato, ovvero pari al 99%, o 99,99% o 99,97% quindi con un livello di precisione molto alto.

Questa teoria propone due diversi metodi, il metodo *block-maxima* e il metodo POT i quali, anche se restituiscono stime più accurate, non sono comunque privi di problemi dal punto di vista applicativo. Il primo metodo, infatti, richiede molti dati e non vi è una chiara indicazione sulla scelta del valore di n, ovvero l'ampiezza del blocco M_n secondo il quale suddividere i dati. Come è stato dimostrato, tale scelta influisce notevolmente sulla stima dei parametri. Anche se il metodo POT richiede un campione minore di dati le stime prodotte sono molto sensibili al variare della soglia scelta. Tale scelta viene effettuata in base a delle linee guida ma la sua quantificazione avviene anche in base a valutazioni soggettive, come l'avversione al rischio dell'istituzione.

Infine è sempre utile ricordare che tutti i modelli qui esposti non producono valori da considerare esatti e fedeli a ciò che potrebbe accadere nella realtà ma essi devono essere valutati in base all'esperienza, alla congettura economica e alle importanti informazioni che provengono dal mercato.

Bibliografia

[1] Artzner, Delbaen, Eber, Heath, *Coherent Measures of Risk*, Mathematical Finance, Vol. 9, No. 3 (Luglio 1999), 203-228

[2] Basel Commettee on Banking Supervision (1993), *Il trattamento prudenziale dei rischi di mercato*, Basilea, BIS

[3] Basel Commettee on Banking Supervision (1996), *Emendamento dell'accordo sui requisiti patrimoniali per incorporarvi i rischi di mercato*, Basilea, BIS

[4] Basel Commettee on Banking Supervision (1999a), *Capital Requirements and Bank Behaviour: The Impact of the Basle Accord*, Aprile, Basilea, BIS

[5] Basel Commettee on Banking Supervision (1999b), *A New Capital Adequacy Framework*, Giugno, Basilea, BIS

[6] Basel Commettee on Banking Supervision (2001), *Working Paper on the Regulatory Treatment of Operational Risk*, Basilea, BIS

[7] Basel Commettee on Banking Supervision (2006), *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standard. A Revised Framework*, Giugno, Basilea, BIS

[8] Basel Commettee on Banking Supervision (2009a), *Revision to the Basel II market risk framework*, Luglio, Basilea, BIS

[9] BASEL COMMETTEE ON BANKING SUPERVISION (2009B), *Enhancements to the Basel II framework*, Luglio, Basilea, BIS

[10] BASEL COMMETTEE ON BANKING SUPERVISION (2009C), *Principles for sound stress testing practices and supervision*, Maggio, Basilea, BIS

[11] BASEL COMMETTEE ON BANKING SUPERVISION (2011), *Basilea 3 - Schema di regolamentazione internazionale per il rafforzamento delle banche e dei sistemi bancari*, Dicembre, pubblicazione del 2010 aggiornata a giugno 2011, Basilea, BIS

[12] CAPPIELLO, *Economia e gestione delle imprese assicurativve*, FrancoAngeli, 2008

[13] CAPPUCCIO,ORSI , *Econometria*, Il Mulino, 2005

[14] DIEBOLD, DOHERTY, HERRING, *The Known, the Unknown, and the Unknowable in Financial Risk Management*, Princeton, 2011

[15] EMBRECHTS, *Extremes and Integrated Risk Management*, UBS Warbung, 2004

[16] EUROPEAN BANKING AUTHORITY, *EBA Guidelines on Stressed Value at Risk*, Londra, maggio 2012

[17] GALLO,PACINI, *Metodi quantitativi per i mercati finanziari*, Carocci, 2002

[18] HULL, *Risk Management and Financial Istitution*, Pearson, 2010

[19] HULL, *Opzioni, Futures e altri derivati*, Pearson, 2009

[20] JORION, *Value at Risk. The new benchmark for managing financial risk. Third edition*, McGraw-Hill, 2007

[21] MCNEIL, FREY, EMBRECHTS, *Quantitative Risk Management*, Princeton University Press, 2005

[22] RACHEV, *Handbook of heavy tailed distribution in finance*, Elsevier/North-Holland, 2003

[23] ROMANO, *Applying copula function to risk management*

[24] SIRONI, *Rischio e valore nelle banche. Risk management e capital allocation*, Egea, 2005

[25] TSAY, *Extreme values and theri applications in finance*