



Università  
Ca' Foscari  
Venezia  
Facoltà  
di Economia

# Corso di Laurea in Sviluppo Economico e dell'Impresa

Prova finale di Laurea

## Stimatori campionari non distorti della frontiera efficiente

### **Relatore**

Prof. Claudio Pizzi

### **Laureando**

Francesco Michieli  
Matricola 832497

Anno Accademico  
2013-2014

---

# INDICE

---

<b>Indice</b>	<b>i</b>
<b>Elenco delle tabelle</b>	<b>iii</b>
<b>Elenco delle figure</b>	<b>iv</b>
<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 LA TEORIA CLASSICA DI PORTAFOGLIO</b>	<b>5</b>
1.1 Il modello media-varianza . . . . .	5
1.2 La teoria di diversificazione di portafoglio di Markowitz . . . . .	12
1.2.1 Frontiera efficiente per due titoli rischiosi . . . . .	14
1.2.2 Frontiera efficiente per molti titoli rischiosi . . . . .	20
1.3 La teoria di Tobin: molti titoli rischiosi ed uno risk-free . . . . .	23
<b>2 I LIMITI DELLA TEORIA CLASSICA DI PORTAFOGLIO</b>	<b>27</b>
2.1 Ipotesi sui mercati . . . . .	27
2.2 Ipotesi sul comportamento razionale dell'investitore . . . . .	32
<b>3 L'APPROCCIO DI BODNAR E BODNAR</b>	<b>37</b>
3.1 I limiti dell'approccio di Bodnar e Bodnar . . . . .	43
<b>4 ANALISI DEI DATI</b>	<b>47</b>
4.1 Verifica dell'ipotesi di normalità dei rendimenti . . . . .	48
4.1.1 Verifica per i rendimenti giornalieri . . . . .	48
4.1.2 Verifica per i rendimenti mensili . . . . .	50
4.2 Analisi della frontiera efficiente campionaria . . . . .	54
4.2.1 Analisi della frontiera efficiente campionaria al variare della correlazione tra i titoli . . . . .	54
4.2.2 Analisi della frontiera efficiente campionaria al crescere del numero dei titoli e della lunghezza delle serie storiche . . . . .	57
4.3 Analisi della frontiera efficiente proposta da Bodnar e Bodnar . . . . .	60
4.3.1 Verifica delle ipotesi alla base del modello . . . . .	61
4.3.2 Comportamento anomalo: varianza negativa . . . . .	62
4.3.3 Comportamento asintotico . . . . .	69
4.3.4 Intervalli di confidenza per la frontiera efficiente . . . . .	73

---

<b>Conclusioni</b>	<b>76</b>
--------------------	-----------

<b>Bibliografia</b>	<b>79</b>
---------------------	-----------

---

## ELENCO DELLE TABELLE

---

1.1	Matrice della varianza di un portafoglio formato da N titoli . . . . .	21
4.1	Test di normalità di Shapiro-Wilk per i rendimenti giornalieri . . . . .	49
4.2	Test di normalità di Shapiro-Wilk per i rendimenti mensili . . . . .	50
4.3	Test di normalità di D'Agostino per i rendimenti mensili . . . . .	51
4.4	Test di normalità di D'Agostino per i rendimenti mensili del titolo Unicredit depurati dall'effetto del raggruppamento azionario . . . . .	54
4.5	Valore limite di $s$ per i due portafogli . . . . .	62
4.6	T-test sulle medie . . . . .	64
4.7	F-test sulle varianze . . . . .	65
4.8	Parametri per il portafoglio formato da Fiat, Eni, Unicredit . . . . .	69
4.9	Parametri per il portafoglio formato da 7 titoli . . . . .	69

---

## ELENCO DELLE FIGURE

---

1.1	Due titoli non dominati nel sistema $(\sigma, \mu)$ . . . . .	7
1.2	Due titoli non dominati e titolo privo di rischio . . . . .	8
1.3	Capital Allocation Line . . . . .	9
1.4	Portafogli ammissibili con $\rho_{A,B} = +1$ . . . . .	17
1.5	Portafogli ammissibili con $\rho_{A,B} = -1$ . . . . .	18
1.6	Frontiera efficiente al variare del coefficiente $\rho$ . . . . .	19
1.7	Frontiera efficiente per molti titoli rischiosi . . . . .	20
1.8	Rischio di mercato e rischio diversificabile . . . . .	23
1.9	Capital Market Line . . . . .	24
3.1	Frontiera efficiente campionaria e di Siegel e Woodgate al variare del numero dei titoli e della lunghezza delle serie storiche[13] . . . . .	39
3.2	Frontiera efficiente campionaria e non distorta[14] . . . . .	42
3.3	Comportamento anomalo della frontiera proposta da Bodnar e Bodnar . . . . .	45
4.1	Confronto tra funzione di densità della normale e dei rendimenti giornalieri . . . . .	49
4.2	Confronto tra funzione di densità della normale e dei rendimenti mensili . . . . .	52
4.3	Confronto tra funzione di densità della normale e dei rendimenti mensili di Unicredit depurati dall'effetto del raggruppamento azionario . . . . .	53
4.4	Box-plot dei rendimenti giornalieri dal 03/01/2012 . . . . .	55
4.5	Box-plot dei rendimenti giornalieri dal 10/01/12 . . . . .	56
4.6	Confronto tra frontiere efficienti al variare delle matrici di correlazione . . . . .	57
4.7	Frontiera efficiente campionaria al variare del numero dei titoli e della lunghezza delle serie storiche . . . . .	58
4.8	Frontiera efficiente campionaria per portafoglio con 3 titoli (verde) e con 7 titoli (nero) . . . . .	59
4.9	Frontiera efficiente campionaria stimata sul biennio 2012-2013 (nero) e sul periodo 2006-2013 (rosso) . . . . .	60
4.10	Confronto tra $s$ campionario ed $s$ limite al variare della lunghezza delle serie storiche per il portafoglio Fiat-Eni-Unicredit . . . . .	63
4.11	Sensibilità della frontiera efficiente di Bodnar e Bodnar . . . . .	64
4.12	Confronto tra $s$ campionario ed $s$ limite al variare della lunghezza delle serie storiche per il portafoglio Fiat-Eni-Unicredit: prime 120 osservazioni del 2006 . . . . .	66

---

4.13	Confronto tra $s$ campionario ed $s$ limite al variare della lunghezza delle serie storiche per il portafoglio composto da sette titoli . . . . .	67
4.14	Confronto tra $s$ campionario ed $s$ limite al variare della lunghezza delle serie storiche per rendimenti mensili . . . . .	68
4.15	Comportamento asintotico della frontiera efficiente non distorta . . . .	70
4.16	Comportamento asintotico della frontiera efficiente non distorta . . . .	71
4.17	Comportamento erratico della frontiera efficiente non distorta rispetto alla frontiera campionaria stimata sul maggior numero di osservazioni	72
4.18	Intervallo di confidenza per il portafoglio formato da tre titoli . . . . .	73
4.19	Intervallo di confidenza per il portafoglio formato da sette titoli (rendimenti mensili) . . . . .	74



---

## INTRODUZIONE

---

La finanza può essere definita come la scienza che studia le condizioni di allocazione dei capitali allo scopo di massimizzare l'utilità dell'agente economico che dispone di tali capitali. Per capire quindi le leggi che regolano questa scienza ed i meccanismi alla base del funzionamento dei mercati dei capitali bisogna partire da una serie di ipotesi sul comportamento degli investitori e sugli elementi che influenzano l'utilità delle persone nei loro processi di investimento.

La teoria finanziaria classica è concorde nell'attribuire alle due variabili di rischio e rendimento un peso preponderante nel determinare l'utilità che un determinato investimento apporta all'investitore. Se nel definire il rendimento come variazione percentuale del valore dell'attività nel periodo di riferimento non ci sono altre particolari considerazioni da aggiungere, è specificando il concetto di rischio che bisogna approfondire alcuni aspetti. Il rischio è definito come un evento con probabilità maggiore di zero al quale è possibile associare uno o più effetti di cui almeno uno negativo. I rischi si dividono in rischi puri, i quali generano solo effetti negativi (si pensi all'incendio di un capannone industriale) ed in rischi economici, che possono avere sia effetti negativi che positivi. In ottica finanziaria il rischio va inteso in questa seconda accezione, cioè nella probabilità che il rendimento dell'attività detenuta si discosti (negativamente, ma anche positivamente) dal suo valore medio.

Definiti i due principali elementi che impattano sull'utilità dell'investitore, la teoria finanziaria classica ha sviluppato una serie di ipotesi sul comportamento degli agenti economici nelle loro scelte di allocazione dei capitali. In particolare

gli investitori sono considerati:

- utilitaristi. L'utilitarismo è una teoria filosofica sviluppatasi nel XVIII secolo che sostiene che gli individui compiano le loro scelte in un'ottica di massimizzazione dell'utilità e che questa sia misurabile oggettivamente (come la lunghezza in metri di un muro o la temperatura in gradi di una stanza).

- razionali. L'investitore opera le sue scelte con un processo logico che si articola in una serie di passaggi: conosce tutte le alternative possibili di scelta ed i pay-off che ne derivano con le relative probabilità che le varie alternative si verifichino, le confronta e sceglie quella con il maggiore pay-off atteso.

- avversi al rischio. Gli investitori preferiscono non sopportare rischi inutilmente e perciò vogliono essere ricompensati per sostenere un rischio: tra due attività finanziarie, a parità di rendimento atteso sceglieranno quella con minore rischio, oppure a parità di rischio quella con rendimento maggiore.

- impazienti. A parità di flusso positivo di cassa, viene preferito quello attuale a quello futuro: infatti il flusso attuale può essere reinvestito e dare un ulteriore rendimento oppure usato per il consumo (se l'investitore è una persona fisica) o distribuito ai soci (se l'investitore è una società).

Oltre alle ipotesi relative al comportamento degli investitori, ve ne sono poi altre inerenti il funzionamento dei mercati dei capitali, che sono supposti essere efficienti. Gli studi sull'efficienza dei mercati dei capitali sono stati sviluppati dall'economista Eugene Fama[1], il quale sostiene:

*"in un mercato finanziario efficiente i prezzi dei titoli riflettono pienamente in ogni istante tutte le informazioni disponibili."*

Fama definisce tre condizioni affinché un mercato sia efficiente : assenza di costi di transazione per il trasferimento dei titoli, tutte le informazioni sono disponibili gratuitamente a tutti gli agenti di mercato, tutti concordano sulle implicazioni delle informazioni nel determinare i prezzi dei titoli. Queste condizioni

sono molto restrittive e raramente si verificano nei mercati dei capitali, ma Fama sostiene che fortunatamente esse sono sufficienti ma non necessarie per l'efficienza dei mercati: ad esempio, per quanto riguarda l'accesso alle informazioni, il mercato può essere efficiente anche se un numero sufficientemente elevato di investitori ha accesso alle informazioni. Tuttavia quando l'evidenza empirica delle condizioni di mercato testimonia una sostanziale divergenza rispetto alle tre condizioni di Fama, l'efficienza del mercato diminuisce notevolmente.

È lo stesso Fama a definire il concetto di mercato efficiente come "*an extreme null hypothesis*"[1] ed a non aspettarsi che esso sia verificato letteralmente: per tal ragione categorizza l'efficienza di mercato in tre forme: debole, semi-forte e forte.

Nell'efficienza in forma debole i prezzi dei titoli riflettono le informazioni contenute nelle serie storiche dei prezzi, in quella in forma semi-forte i prezzi riflettono oltre alle informazioni delle serie storiche anche quelle rese pubbliche periodicamente (ad esempio, i risultati di esercizio desumibili dai bilanci o le delibere di distribuzione di utili) ed, infine, in quella in forma forte i prezzi incorporano anche le informazioni privilegiate, a cui determinati gruppi di operatori possono avere accesso.

Da questa tripartizione derivano poi le possibilità di realizzare investimenti che sistematicamente ottengano risultati migliori rispetto a quelli realizzati dal mercato: se il mercato è efficiente in forma debole, non incorporando i prezzi dei titoli altre informazioni se non quelle contenute nelle serie storiche, è possibile attuare strategie di trading con rendimento atteso superiore a quello di mercato impiegando le informazioni di pubblico dominio. Se il mercato invece è efficiente in forma semi-forte per ottenere un rendimento atteso superiore a quello di mercato bisogna necessariamente usufruire di informazioni privilegiate. Infine se il mercato è efficiente in forma forte non è in alcun modo possibile sfruttare alcun tipo di informazione per ottenere un risultato migliore di quello di mercato. In altri termini, ad ogni livello di efficienza non è possibile battere il mercato

basandosi solo sulle informazioni incorporate nei prezzi dei titoli.

Da quanto appena spiegato si ricava che l'efficienza in forma forte implica quella in forma semi-forte, e quest'ultima a sua volta implica quella in forma debole.

Fama ritiene che i mercati dei capitali da lui analizzati possano essere considerati efficienti in forma semi-forte (e quindi anche debole), ma che l'efficienza in forma forte, come peraltro già sottolineato, vada intesa più come un benchmark cui confrontare le evidenze empiriche dei mercati che come una condizione che realmente possa verificarsi.

Appare evidente che sia le ipotesi sul comportamento degli agenti economici nelle scelte di investimento, che quelle sul funzionamento dei mercati sono piuttosto restrittive e non sempre risultano essere coerenti con la realtà dei fatti (si pensi ad esempio all'idea di razionalità proposta). Tuttavia tali ipotesi, certamente non valide per tutti gli individui e per tutti i mercati, descrivono una situazione ideale cui si dovrebbe tendere ed hanno il notevole pregio di consentire di iniziare a formalizzare una teoria completa e coerente. Nel prosieguo, dopo aver descritto le principali teorie finanziarie che su queste ipotesi si basano, si evidenzieranno i limiti che ne derivano.

# Capitolo 1

---

## LA TEORIA CLASSICA DI PORTAFOGLIO

---

### 1.1 Il modello media-varianza

Si è osservato come l'utilità degli investitori possa essere analizzata in termini di rischio e rendimento e descritta da una funzione positiva per la variabile rendimento e negativa per quella rischio. L'investitore infatti, supposto avverso al rischio, è portato a massimizzare la propria utilità cercando idealmente un titolo con rendimento massimo e rischio nullo ed è perciò costretto a gestire il trade-off tra rischio e rendimento. Quindi nelle decisioni di investimento gli agenti economici sono influenzati solo dal rendimento atteso e dal rischio: scrive a questo riguardo Einaudi[2]:

*"Ogni titolo è fungibile con ogni altro titolo analogo. Ogni cartella da 1000 lire nominale del redimibile italiano 3.5% è fungibile con ogni altra cartella del medesimo ammontare e tipo. Naturalmente nessun investitore si innamora della Fiat quale Fiat o dell'Italiana Gas perché tali. Ognuno, fatti i suoi conti, se ha convenienza è disposto senza stringimenti di cuore a cambiare un titolo con un altro"*

Il modello media-varianza è un primo passo per capire la teoria finanziaria classica di allocazione dei capitali. In questo modello il rendimento di un titolo

lo è descritto da una variabile casuale con distribuzione normale ed l'investitore sceglie il titolo con la migliore combinazione di rischio-rendimento. La distribuzione normale dei rendimenti presenta il vantaggio di dipendere solo dalla media e dalla varianza. Questa ipotesi sebbene possa sembrare eccessivamente restrittiva è stata giustificata da alcuni studiosi, tra cui già Bachelier[3] all'inizio del secolo scorso, e può essere ritenuta valida in questa prima fase di analisi.

Il prezzo futuro di un determinato titolo è ovviamente sconosciuto al tempo attuale, perciò nella descrizione della distribuzione del rendimento si procede analizzando serie storiche di dati.

Il rendimento atteso è definito come la media aritmetica dei rendimenti, che sono la variazione percentuale del prezzo del titolo nel periodo di riferimento:

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t} \quad (1.1)$$

In alternativa ai rendimenti relativi, molto spesso si fa uso di quelli logaritmici:

$$r = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} \quad (1.2)$$

Come misura del rischio si usa lo scarto quadratico medio dei rendimenti, che viene preferito alla varianza (nonostante il nome del modello) perché esso è espresso nella stessa unità di misura del valore atteso del rendimento.

Il criterio operativo di scelta dei titoli su cui investire deriva quindi dai due indicatori di rischio e rendimento: a parità di rendimento atteso scegliere il titolo con minore scarto quadratico medio, oppure, similmente, a parità di scarto quadratico medio scegliere il titolo con rendimento atteso maggiore.

Questa situazione in cui un titolo è sempre preferito ad un altro è detta condizione di dominanza: un titolo domina un altro quando è caratterizzato da minore scarto quadratico medio e maggiore rendimento. Nello spazio cartesiano in cui il rendimento atteso è nell'asse delle ordinate e lo scarto quadratico medio su quello delle ascisse il titolo dominante si trova in alto a sinistra rispetto

a quello dominato. Sulla scorta di quanto precedentemente sottolineato rispetto alla massimizzazione della funzione di utilità, in presenza di un titolo dominante l'investitore razionale investirà sempre su di esso.

Tuttavia, nella maggioranza dei casi la condizione di dominanza non è comune, proprio perché, per l'avversione al rischio degli investitori, questi ultimi saranno disposti ad investire in titoli più rischiosi solo se essi hanno un rendimento maggiore. Ci si trova cioè in condizioni di questo tipo:

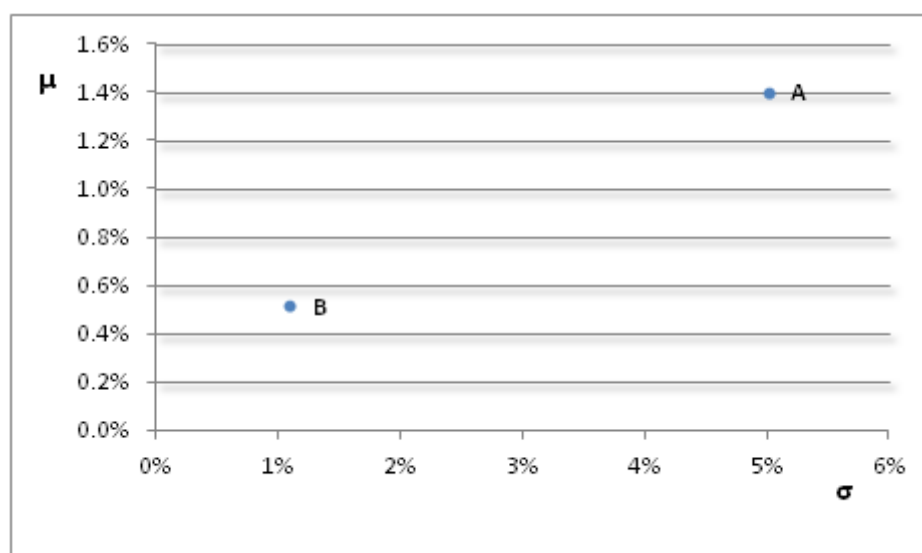


Figura 1.1: Due titoli non dominati nel sistema ( $\sigma, \mu$ )

Dall'immagine 1.1 emerge che nessuno dei due titoli domina l'altro: il titolo A ha maggior rischio ma anche maggior rendimento, mentre il titolo B ha minor rischio e minor rendimento. In questo caso la scelta del titolo su cui investire è fatta dal singolo investitore sulla base della personale avversione al rischio senza che si possa identificare una scelta ottima: gli investitori più avversi al rischio sceglieranno il titolo B, mentre quelli meno avversi il titolo A.

Nei mercati finanziari è possibile investire anche in titoli risk-free, tipicamente emessi da Stati con un rating molto buono, che danno un rendimento (di solito molto basso) con rischio pari a zero. In un sistema cartesiano  $(\sigma, \mu)$  tali titoli si trovano sull'asse delle ordinate in corrispondenza del valore del loro rendimento.

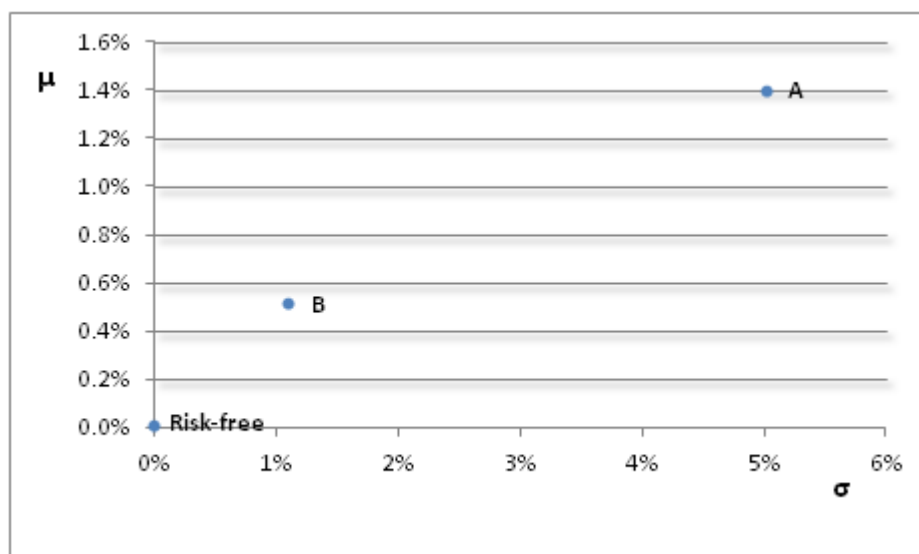


Figura 1.2: Due titoli non dominati e titolo privo di rischio

La possibilità di investire su un titolo privo di rischio ha delle conseguenze interessanti. In primo luogo ciò permette di dare un valore (o meglio, un prezzo) al rischio: l'indice di Sharpe misura questo prezzo.

$$\text{Indice di Sharpe} = \frac{\mu_x - \mu_{rf}}{\sigma_x} \quad (1.3)$$

dove  $\mu_x$  indica il rendimento medio dell'investimento rischioso,  $\mu_{rf}$  quello del titolo risk-free e  $\sigma_x$  la deviazione standard dei rendimenti del titolo rischioso.

Il numeratore dell'indice rappresenta il premio per il rischio che l'investitore ottiene per investire nel titolo rischioso X piuttosto che nel titolo risk-free, mentre il denominatore esprime la quantità di rischio del titolo rischioso X. L'indice

di Sharpe cioè definisce l'extrarendimento per unità di rischio sopportata. Esso è quindi un indicatore sintetico della performance del titolo: un titolo con un valore alto dell'indice fornisce un rendimento elevato in proporzione al rischio sopportato.

L'Indice di Sharpe rappresenta inoltre la pendenza della retta che congiunge il titolo rischioso al titolo privo di rischio. Questa caratteristica è utile come criterio di scelta tra due titoli in cui nessuno dei due domina l'altro: cioè è possibile unire (appunto in un portafoglio) un titolo rischioso ed uno privo di rischio per ottenere una performance in termini di rischio-rendimento migliore rispetto a quella che si otterrebbe investendo solamente nel titolo rischioso.

Questo aspetto si può cogliere dal grafico 1.2 : il titolo B ha un indice di Sharpe più alto rispetto al titolo A, cioè il titolo B remunera l'unità di rischio ad un prezzo maggiore rispetto al titolo A. Investire nel titolo A risulterebbe quindi subottimale, perché si finirebbe per sopportare un rischio maggiore per un prezzo relativo inferiore.

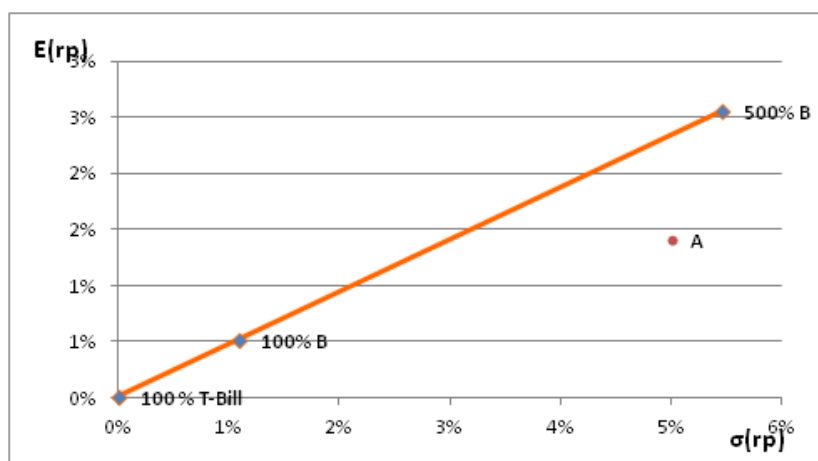


Figura 1.3: Capital Allocation Line

È infatti possibile, indebitandosi al tasso risk-free, acquistare il titolo con Indice di Sharpe maggiore (in questo caso B) oltre la propria ricchezza ed ottenere così un risultato migliore rispetto a quello che si avrebbe investendo nel titolo con Indice di Sharpe minore. Dal grafico 1.3 si può notare come il titolo A sia dominato dai portafogli composti indebitandosi sul titolo risk-free ed acquistando il titolo B. La retta che congiunge il titolo privo di rischio con quello rischioso è detta Capital Allocation Line (CAL).

Aver introdotto il titolo risk-free permette quindi di avere un criterio di scelta univoco tra due titoli anche nel caso molto frequente in cui nessuno dei due domini l'altro.

In secondo luogo il titolo risk-free rappresenta il costo opportunità di impiego del denaro: se il rendimento del risk-free è basso anche investitori avversi al rischio, pur di ottenere un buon rendimento, investiranno nei titoli rischiosi, se esso invece è molto alto, tipicamente gli investitori sceglieranno di detenere una considerevole fetta della loro ricchezza in titoli privi di rischio e solo se il rendimento dei titoli rischiosi è elevato in proporzione al loro rischio vi investiranno.

A questo punto è possibile descrivere il comportamento di scelta del singolo investitore: tra tutti i titoli presenti, investirà in combinazioni di titolo privo di rischio con quel titolo con l'Indice di Sharpe maggiore, cioè quel titolo che remunera maggiormente il rischio sopportato; le esatte quote di investimento non sono tutte uguali tra gli investitori, ma dipendono dalle personali avversioni al rischio.

La funzione di utilità degli investitori può essere scritta come:

$$U = \mu - r * \sigma^2 \quad (1.4)$$

dove  $\mu$  indica il rendimento atteso del portafoglio,  $\sigma^2$  la varianza dei rendimenti e  $r$  il grado di avversione al rischio del singolo investitore. Questa formalizzazione

è coerente con quanto prima esposto sulle ipotesi sul comportamento degli investitori: l'utilità cresce al crescere del rendimento atteso e diminuisce al crescere della varianza. Essa decresce anche al crescere dell'avversione al rischio, cioè, a parità di tutte le altre condizioni, tra due investitori che prendono posizione sullo stesso titolo quello con maggiore avversione al rischio avrà un'utilità minore.

Dalla funzione di utilità si ricavano le curve di indifferenza:

$$\mu = r * \sigma^2 + U \quad (1.5)$$

Queste hanno sia la derivata prima che la seconda maggiori di zero, per cui sono crescenti e sono convesse, cioè al crescere del rischio l'utilità non varia solo se il rendimento aumenta ( $\mu' > 0$ ), ma questo deve aumentare più che proporzionalmente ( $\mu'' > 0$ ).

La decisione di investimento si risolve quindi nell'eguagliare la pendenza della CAL, cioè l'Indice di Sharpe, con la pendenza delle curve di indifferenza:

$$\frac{\mu_x - r_f}{\sigma_x} = \frac{\delta\mu}{\delta\sigma} \quad (1.6)$$

cioè per la funzione di utilità sopra definita (1.5):

$$\frac{\mu_x - r_f}{\sigma_x} = r * \sigma \quad (1.7)$$

Ma il rischio  $\sigma$  del portafoglio composto da un titolo rischioso ed uno privo di rischio altro non è che il rischio del titolo rischioso moltiplicato per la sua quota nel portafoglio, quindi:

$$\frac{\mu_x - r_f}{\sigma_x} = r * \sigma_x * X \quad (1.8)$$

dove  $X$  è la quota di ricchezza investita nel titolo rischioso. Risolvendo per  $X$  si ottiene quindi la quota di ricchezza da investire nel titolo rischioso per massimizzare l'utilità:

$$X = \frac{\mu_x - r_f}{\sigma_x^2 * r} \quad (1.9)$$

Ciò che differenzia le scelte dei diversi investitori è quindi solamente il grado di avversione al rischio  $r$ : un valore elevato di questo indicatore determina curve di indifferenza molto ripide e quindi queste incontreranno la CAL in basso, determinando un portafoglio composto in prevalenza dal titolo non rischioso, mentre investitori meno avversi al rischio hanno curve più piatte, con una conseguente quota maggiore di titolo rischioso fino anche alla possibilità di sfruttare l'indebitamento per acquistare il titolo rischioso oltre la propria ricchezza.

## 1.2 La teoria di diversificazione di portafoglio di Markowitz

Ad un primo livello di analisi esemplificativo, si è appena evidenziato come comporre tra loro due titoli (di cui uno rischioso e l'altro privo di rischio) conduca a risultati migliorativi rispetto all'investire in un unico titolo rischioso. In verità il portafoglio composto da soli due titoli di cui uno non rischioso rappresenta un caso specifico di una più generale (ed interessante) teoria finanziaria: la teoria di diversificazione di portafoglio di Markowitz.

Anche per chi non è esperto di finanza, l'idea di non investire tutta la propria ricchezza su un'unica attività appare ragionevole e spontanea ed è proprio la realtà dei fatti a dimostrare come ciò non avvenga quasi mai: gli investitori tipicamente dividono la propria ricchezza su un gran numero di prodotti finanziari, andando così a comporre dei portafogli di titoli.

Prima di andare a capire i meccanismi che regolano questi processi di differenziazione ed ad esporre la teoria di Markowitz, che gli valse, assieme a Sharpe e Miller, il Premio Nobel per l'economia nel 1990, bisogna citare un esempio degli effetti provocati da una diversificazione insufficiente[4].

"Lehman Brothers era una banca d'affari americana, la quarta più grande del mondo ed è stata al centro dello scandalo finanziario dei

mutui subprime. Il suo fallimento, avvenuto il 15 settembre 2008, non ha colpito solo i 26.000 dipendenti, ma anche investitori del calibro dei grandi fondi pensione; alcuni di essi, infatti hanno investito pesantemente, in un'ottica speculativa, in Lehman Brothers prima che la società fallisse. La strategia dei fondi era scommettere pesanti somme di denaro sui titoli Lehman Brothers e cercare di guadagnare milioni sulle minime variazioni di prezzo. Uno dei fondi più colpiti è stato il fondo Norwegian Government Pension Fund Global, che alla fine del 2007, aveva una esposizione finanziaria su Lehman Brothers (in titoli e obbligazioni) del valore di 840 milioni di dollari, ulteriormente incrementati nelle ultime fasi del collasso di Lehman Brothers. Al 30 giugno 2008, la Norges Bank, la Banca Centrale norvegese che, oltre ad occuparsi della politica monetaria, gestisce il fondo, riportava che le performance del portafoglio equity del fondo pensione avevano registrato una perdita del 12,67% nel primo trimestre cui è seguito un -1,6% del secondo trimestre. Il titolo azionario di Lehman Brothers non era giudicato rischioso dal mercato prima del default, infatti ha continuato a mantenere il rating "A" fino al giorno del suo fallimento, mentre alcuni prodotti di Lehman, come i derivati e i fondi, erano valutati addirittura con la tripla A, al pari dei Bund tedeschi. Ma nonostante ciò un'eccessiva ricerca speculativa del rendimento a scapito del mantenimento di un profilo di rischio adeguato, una volta che Lehman Brothers è fallita, ha causato ingenti perdite. Altri fondi che hanno tenuto una condotta più accorta, come il fondo pensione Cometa, hanno limitato fino quasi ad azzerare le perdite dovute al crack Lehman Brothers. Citando il comunicato stampa di Cometa del 16 settembre 2008, giorno successivo al default:

*“Il Consiglio di Amministrazione, riunitosi ieri a Milano, nell’esaminare la composizione del portafoglio del Fondo, costituito da oltre mille titoli differenti, ha valutato positivamente l’effetto della differenziazione dell’investimento che ha consentito di mantenere inalterata la validità delle posizioni previdenziali complementari raggiunte a fronte di una minima (0,10%) presenza di obbligazioni Lehman Brothers.”*

Da questo semplice esempio pratico emerge come un’adeguata politica di differenziazione di portafoglio sia un ottimo metodo di copertura del rischio e andrebbe pertanto implementata da tutti gli investitori, ma in special modo dagli investitori istituzionali (quali appunto i fondi pensione sono), che a fronte di perdite ingenti potrebbero vedere compromessa la loro capacità di portare a termine la loro funzione sociale.

### 1.2.1 Frontiera efficiente per due titoli rischiosi

Il modello della frontiera efficiente di Markowitz dimostra come la combinazione di più titoli rischiosi permetta di ridurre il rischio ed accrescere il rendimento.

La teoria ha alla base diverse ipotesi, oltre a quelle sul comportamento razionale dell’investitore e sull’efficienza dei mercati, come l’assenza di imposte ed assenza di costi di transazione, l’uniperiodalità dell’orizzonte d’investimento, la divisibilità delle attività finanziarie, la distribuzione normale dei rendimenti dei titoli e l’assenza di monopoli nei mercati dei capitali.

Se la distribuzione dei rendimenti di un titolo è una variabile casuale, la distribuzione di un portafoglio di due titoli A e B è pari alla somma delle due variabili casuali. Il rendimento atteso del portafoglio è quindi pari alla media dei rendimenti dei singoli titoli pesata per la quota del titolo nel portafoglio:

$$\mu_P = X_A * \mu_A + X_B * \mu_B \quad (1.10)$$

La varianza del portafoglio, essendo questo una somma di variabili casuali, non è invece la media pesata delle varianze dei titoli, ma è pari a:

$$\sigma_P^2 = X_A^2 * \sigma_A^2 + 2X_A X_B \sigma_{A,B} + X_B^2 * \sigma_B^2 \quad (1.11)$$

dove  $\sigma_{A,B}$  è la covarianza tra i rendimenti dei due titoli. Questa caratteristica propria della varianza della somma di due variabili casuali è alla base della teoria di portafoglio di Markowitz: per effetto della diversificazione, il rischio (indicato dallo scarto quadratico medio) di un portafoglio è minore della media pesata dei rischi dei titoli. Per semplificare la dimostrazione si introduce il coefficiente di correlazione lineare di Pearson:

$$\rho_{A,B} = \frac{\sigma_{A,B}}{\sigma_A \sigma_B} \quad (1.12)$$

Il coefficiente di correlazione lineare di Pearson è infatti un indice standardizzato che, a differenza della covarianza che non ha un valore minimo e massimo, varia tra -1 (massima correlazione negativa) e +1 (massima correlazione positiva); lo 0 rappresenta la mancanza di correlazione. Sostituendo il coefficiente di Pearson alla covarianza nella formula della varianza del portafoglio si ottiene:

$$\sigma_P^2 = X_A^2 * \sigma_A^2 + 2X_A X_B * \rho_{A,B} * \sigma_A \sigma_B + X_B^2 * \sigma_B^2 \quad (1.13)$$

Dalla formula è evidente una relazione positiva tra il coefficiente di correlazione lineare di Pearson e la varianza del portafoglio. Provando a sostituire il valore massimo che il coefficiente può assumere (+1) nella formula precedente si ottiene:

$$\sigma_P^2 = X_A^2 * \sigma_A^2 + 2X_A X_B * 1 * \sigma_A \sigma_B + X_B^2 * \sigma_B^2 \quad (1.14)$$

che è un prodotto notevole, raccogliendo quindi:

$$\sigma_P^2 = (X_A * \sigma_A + X_B * \sigma_B)^2 \quad (1.15)$$

semplificando:

$$\sigma_P = (X_A * \sigma_A + X_B * \sigma_B) \text{ per } \rho_{A,B} = +1 \quad (1.16)$$

cioè lo scarto quadratico medio del portafoglio è pari alla media degli scarti quadratici medi dei titoli pesata per la quota dei titoli nel portafoglio.

Ma se questo risultato lineare si ottiene per il valore massimo del coefficiente di correlazione lineare, ciò vuol dire che per tutti gli altri valori di  $\rho_{A,B} < +1$  lo scarto quadratico medio del portafoglio è minore della media pesata degli scarti quadratici medi dei titoli:

$$\sigma_P < (X_A * \sigma_A + X_B * \sigma_B) \quad \forall \rho_{A,B} < +1 \quad (1.17)$$

Questo effetto è proprio il vantaggio della diversificazione di portafoglio, è tanto più forte quanto minore è la correlazione tra i due titoli e raggiunge il massimo quando il coefficiente di Pearson ha valore minimo in  $\rho_{A,B} = -1$ . Questo indicatore ha quindi un'importanza preponderante nel determinare il rischio del portafoglio.

Si è dimostrato che nel caso limite in cui  $\rho_{A,B} = +1$  sia il rendimento che lo scarto quadratico medio del portafoglio sono la media pesata dei relativi valori dei titoli: in questo unico caso il vantaggio della diversificazione è nullo.

Dalla figura 1.4 si può notare che la performance che si ottiene è molto simile a quella analizzata nel basilare portafoglio formato solo dal titolo rischioso e da quello risk-free (figura 1.3), anche se le ragioni sono diverse: infatti nel caso del titolo non rischioso, avendo rendimento certo, il suo scarto quadratico medio è nullo e quindi anche la sua covarianza con il titolo rischioso. La formula della varianza del portafoglio è quindi:

$$\sigma_P^2 = X_B^2 * \sigma_B^2 \quad (1.18)$$

pari a:

$$\sigma_P = X_B * \sigma_B \quad (1.19)$$

Giustificando così quanto precedentemente affermato sulla proporzionalità del rischio del portafoglio solamente al rischio del titolo rischioso.

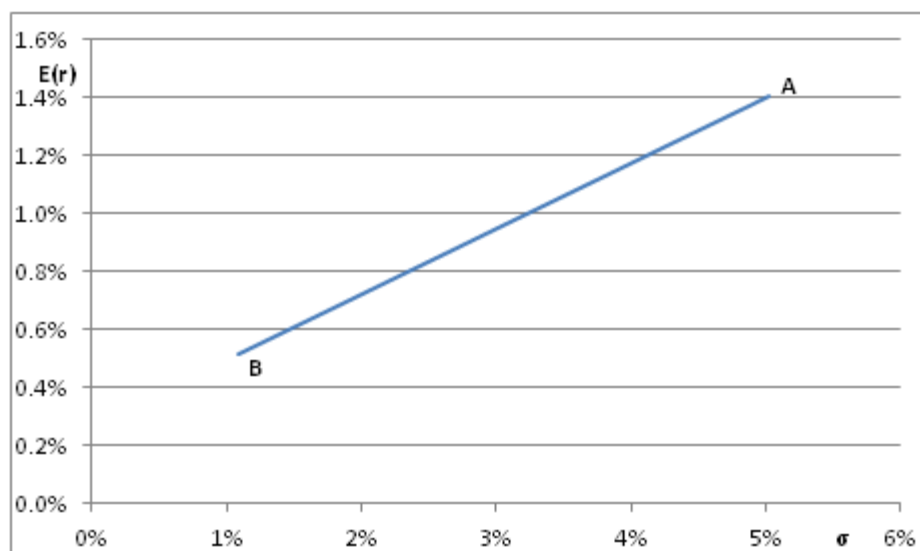


Figura 1.4: Portafogli ammissibili con  $\rho_{A,B} = +1$

Nell'altro caso limite in cui il coefficiente di Pearson assume valore minimo è invece possibile sfruttare appieno il vantaggio della diversificazione ed addirittura costruire un portafoglio con rendimento atteso maggiore rispetto al titolo che rende meno e contemporaneamente anche con scarto quadratico medio nullo, ottenendo la curva in figura 1.5.

Il portafoglio con minore varianza, che in questo caso specifico ha proprio varianza nulla, è detto portafoglio di minima varianza (MV): dal grafico appare evidente che solo la parte della curva che è crescente da MV ad A rappresenta soluzioni di investimento efficienti, mentre la parte da B a MV è dominata e risulta quindi una scelta non razionale perché "salendo" da B a MV si ottiene il vantaggio di diminuire il rischio ed aumentare il rendimento.

La parte di curva che congiunge il portafoglio di minima varianza MV con il titolo a maggiore rendimento è detta frontiera dei portafogli efficienti.

I due casi in cui il coefficiente di correlazione è pari a -1 o a +1 sono chia-

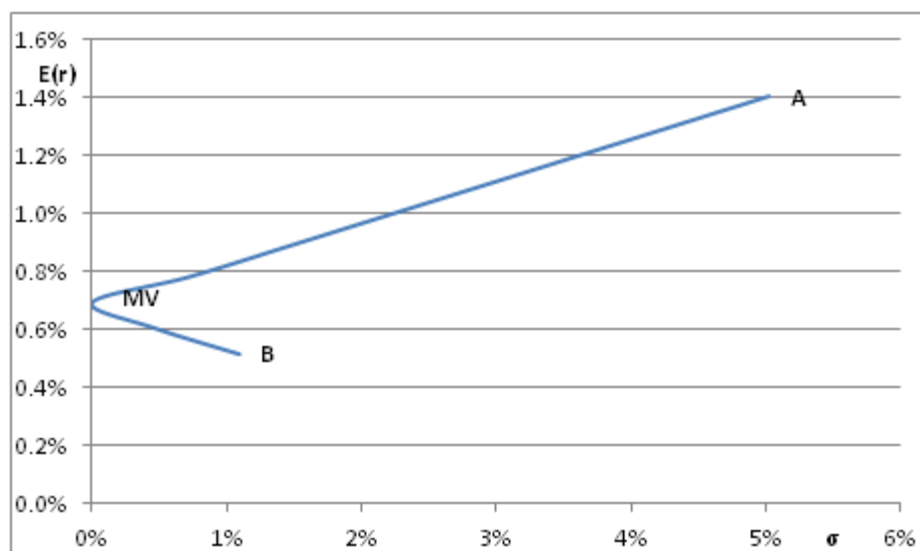


Figura 1.5: Portafogli ammissibili con  $\rho_{A,B} = -1$

ramente delle esemplificazioni teoriche che rappresentano quindi la situazione peggiore e quella migliore; nella realtà ci si trova ad operare con titoli che hanno una correlazione minore di +1 e maggiore di -1. In tutti questi casi, la frontiera efficiente è un'iperbole concava verso destra, la cui concavità aumenta al diminuire del coefficiente di Pearson 1.6.

La frontiera efficiente per due titoli rischiosi è quindi definita dal portafoglio di minima varianza MV fino al titolo con rendimento maggiore. I pesi dei titoli necessari per comporre il portafoglio MV sono ricavabili minimizzando la funzione di varianza del portafoglio e considerando come dati gli scarti quadratici medi dei due titoli ed il coefficiente di correlazione lineare dei loro rendimenti:

$$\min \sigma_P^2 = X_A^2 * \sigma_A^2 + 2X_A X_B * \rho_{A,B} * \sigma_A \sigma_B + X_B^2 * \sigma_B^2 \quad (1.20)$$

Definito  $X_A = X$  e quindi  $X_B = 1 - X$ , si può scrivere la varianza in funzione di X:

$$\sigma_P^2 = X^2 * \sigma_A^2 + 2X(1 - X) * \rho_{A,B} * \sigma_A \sigma_B + (1 - X)^2 * \sigma_B^2 \quad (1.21)$$

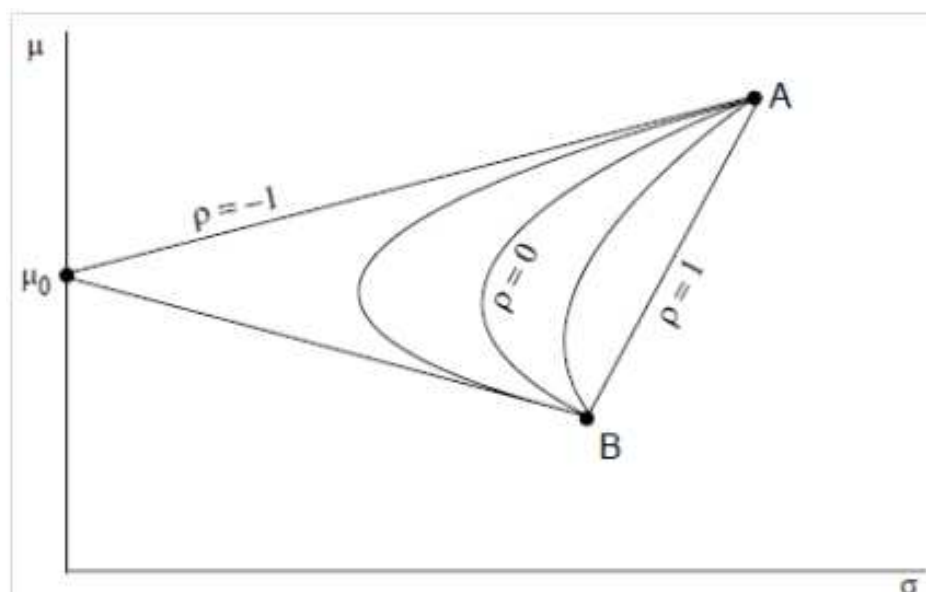


Figura 1.6: Frontiera efficiente al variare del coefficiente  $\rho$

sviluppando e raccogliendo:

$$\sigma_P^2 = X^2 * (\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho_{A,B} * \sigma_A\sigma_B) + 2X(\sigma_B^2 - \rho_{A,B} * \sigma_A\sigma_B) + \sigma_B^2 \quad (1.22)$$

Si noti che la varianza così riscritta è una parabola con asse di simmetria verticale della specie:

$$\sigma_P^2 = aX^2 + 2bX + cost \quad (1.23)$$

con:

$$a = (\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho_{A,B} * \sigma_A\sigma_B) \quad (1.24)$$

$$b = (\sigma_B^2 - \rho_{A,B} * \sigma_A\sigma_B) \quad (1.25)$$

La funzione ha un punto di minimo nel suo vertice  $(\frac{b}{a}; -\frac{\Delta}{4a})$ , quindi il peso del titolo A necessario per ottenere il portafoglio di minima varianza MV è:

$$X^* = \frac{a}{b} = \frac{(\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho_{A,B} * \sigma_A\sigma_B)}{(\sigma_B^2 - \rho_{A,B} * \sigma_A\sigma_B)} \quad (1.26)$$

Sostituendo i valori nella formula della varianza oppure risolvendo per l'ordinata del vertice si ricava il valore della varianza del portafoglio di minima varianza MV.

### 1.2.2 Frontiera efficiente per molti titoli rischiosi

Le considerazioni fin qui esposte possono essere estese all'investimento in un numero di titoli superiore a due. Se i titoli che compongono il portafoglio sono in numero maggiore di due, la frontiera efficiente assume la forma osservabile nel grafico 1.7.

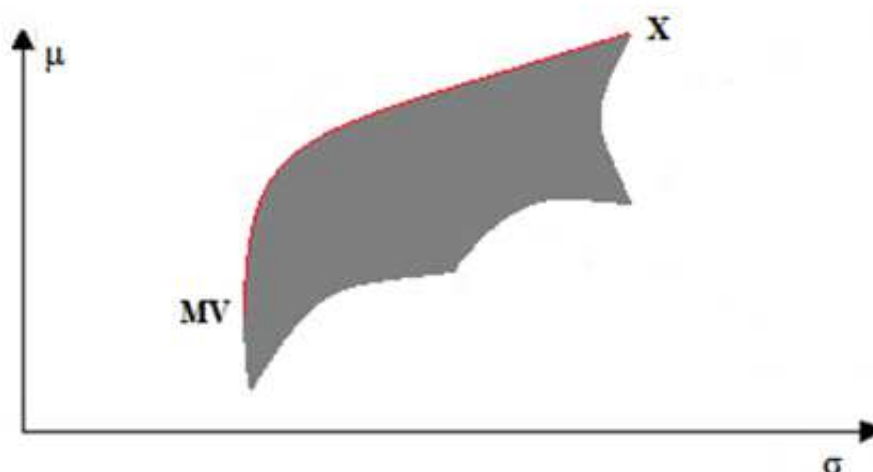


Figura 1.7: Frontiera efficiente per molti titoli rischiosi

La frontiera efficiente è rappresentata dalla curva di colore rosso che sovrasta la regione di spazio colorata in grigio. Quest'ultima rappresenta tutti i portafogli componibili con i titoli rischiosi considerati (compresi i singoli titoli), combinati tra loro con tutti i possibili pesi di ponderazione. La frontiera efficiente delimita l'area di spazio contenente tutti i portafogli: i portafogli che giaccio-

no su di essa rappresentano la migliore combinazione possibile in termine di rischio-rendimento.

Infatti a parità di rendimento atteso minimizzano lo scarto quadratico medio ed, allo stesso modo, a parità di scarto quadratico medio massimizzano il rendimento atteso. Il portafoglio di minima varianza MV è il portafoglio efficiente con minore varianza tra tutti quelli che si possono creare combinando tra loro i titoli rischiosi.

L'investitore razionale quindi investirà solo nei portafogli che compongono la frontiera efficiente: se così non facesse potrebbe aumentare il rendimento a parità di rischio e quindi si troverebbe in una zona dominata; i portafogli che si trovano sulla frontiera efficiente infatti dominano tutta l'area grigia ed (in assenza di titoli privi di rischio) rappresentano le migliori scelte possibili di investimento.

La formalizzazione analitica della teoria per la frontiera efficiente composta da molti titoli rischiosi è meno elementare rispetto a quella per la frontiera composta da soli due titoli rischiosi, e ne costituisce un'estensione. È utile sviluppare una particolare matrice delle covarianze dei rendimenti dei titoli: in questa matrice sia sull'asse orizzontale che su quello verticale solo indicati i titoli da 1 ad N ed all'interno le covarianze tra i titoli moltiplicate per i pesi dei titoli.

<b>Titolo</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>...</b>	<b>N</b>
<b>1</b>	$X_1^2\sigma_1^2$	$X_1X_2\sigma_{1,2}$	$X_1X_3\sigma_{1,3}$		$X_1X_N\sigma_{1,N}$
<b>2</b>	$X_2X_1\sigma_{2,1}$	$X_2^2\sigma_2^2$	$X_2X_3\sigma_{2,3}$		$X_2X_N\sigma_{2,N}$
<b>3</b>	$X_3X_1\sigma_{3,1}$	$X_3X_2\sigma_{3,2}$	$X_3^2\sigma_3^2$		$X_3X_N\sigma_{3,N}$
<b>⋮</b>				<b>⋮</b>	
<b>N</b>	$X_NX_1\sigma_{N,1}$	$X_NX_2\sigma_{N,2}$	$X_NX_3\sigma_{N,3}$		$X_N^2\sigma_N^2$

Tabella 1.1: Matrice della varianza di un portafoglio formato da N titoli

Come si può notare dalla matrice 1.1, nella diagonale ci sono le varianze dei singoli titoli moltiplicate per il peso del titolo al quadrato. La varianza del portafoglio è pari alla somma di tutti i termini contenuti nelle caselle della matrice;

ad esempio, nel caso di due titoli la formula della varianza del portafoglio si riconduce a quella precedentemente presentata (1.11).

Bisogna sottolineare che al crescere del numero di titoli il numero delle varianze cresce proporzionalmente ad essi, mentre il numero delle covarianze cresce molto più rapidamente; ad esempio, se con due titoli le varianze moltiplicate per i pesi sono due ed altrettanti sono le covarianze moltiplicate per i pesi, per quattro titoli le prime raddoppiano mentre le seconde arrivano a dodici. Infatti per  $N$  titoli il numero dei termini della matrice è pari ad  $N^2$ , di cui  $N$  elementi nella diagonale ed  $(N^2 - N)$  elementi fuori dalla diagonale.

Il peso che hanno le singole varianze dei titoli sul totale della varianza di portafoglio è quindi funzione decrescente di  $N$  ed è pari a:

$$\frac{N}{N^2} = \frac{1}{N} \quad (1.27)$$

Già per un numero di titoli modesto quindi la varianza del portafoglio dipende in misura maggiore dalla covarianza tra i titoli che dalle singole varianze. Questo risultato ribadisce quanto precedentemente sottolineato circa l'importanza del coefficiente di correlazione lineare nel determinare i vantaggi della diversificazione di portafoglio.

Quindi aumentando il numero dei titoli detenuti nel portafoglio la parte di rischio determinata dal rischio proprio dei titoli (la loro varianza) tende ad annullarsi, ma rimane il rischio dovuto agli andamenti asincroni dei titoli (le loro covarianze). La prima tipologia di rischio è detta rischio diversificabile e può essere ridotto (fino quasi ad eliminarlo) con un'accurata politica di diversificazione di portafoglio; la seconda tipologia è invece detta rischio di mercato o rischio non diversificabile e non può essere eliminata perché consiste nel rischio dovuto a variazioni delle condizioni di mercato che colpiscono tutti gli emittenti dei titoli (come una crisi economica oppure l'innalzamento dei tassi di interesse).

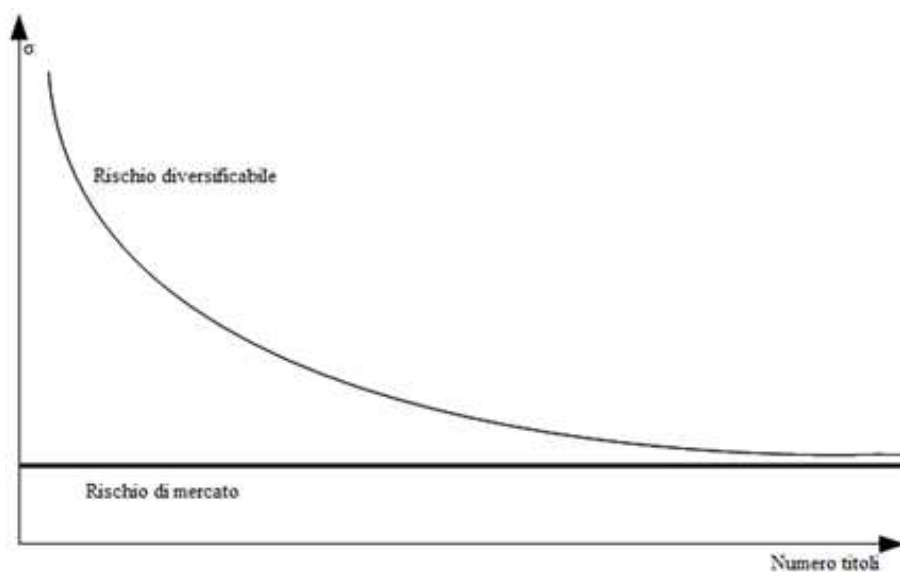


Figura 1.8: Rischio di mercato e rischio diversificabile

### 1.3 La teoria di Tobin: molti titoli rischiosi ed uno risk-free

I risultati degli studi di Markowitz sono stati arricchiti dal Teorema di Separazione di Tobin. Tobin in particolare in un suo articolo del 1958[5] analizza gli effetti dell'aggiunta del titolo privo di rischio alla frontiera efficiente. Unendo ad un particolare portafoglio efficiente A il titolo privo di rischio con peso  $X_0$ , si ottiene un nuovo portafoglio caratterizzato da rendimento:

$$\mu_P = X_0 * r_F + (1 - X_0) * \mu_A \quad (1.28)$$

e da varianza:

$$\sigma_P^2 = (1 - X_0)^2 * \sigma_A^2 \quad (1.29)$$

da cui:

$$\sigma_P = (1 - X_0) * \sigma_A \quad (1.30)$$

e:

$$X_0 = \frac{(\sigma_A - \sigma_P)}{\sigma_A} \quad (1.31)$$

Se si inserisce il valore di  $X_0$  in funzione degli scarti quadratici medi dei portafogli nella formula del rendimento atteso del portafoglio, si ottiene:

$$\mu_P = \frac{(\sigma_A - \sigma_P)}{\sigma_A} * r_F + \frac{\sigma_P}{\sigma_A} * \mu_A = r_F - \frac{\sigma_P}{\sigma_A} * r_F + \frac{\sigma_P}{\sigma_A} * \mu_A \quad (1.32)$$

raccogliendo  $\frac{\sigma_P}{\sigma_A}$  si ha:

$$\mu_P = r_F + \frac{(\mu_A - r_F)}{\sigma_A} * \sigma_P \quad (1.33)$$

che rappresenta la nuova frontiera efficiente in presenza di un titolo non rischioso, anche detta Capital Market Line (CML).

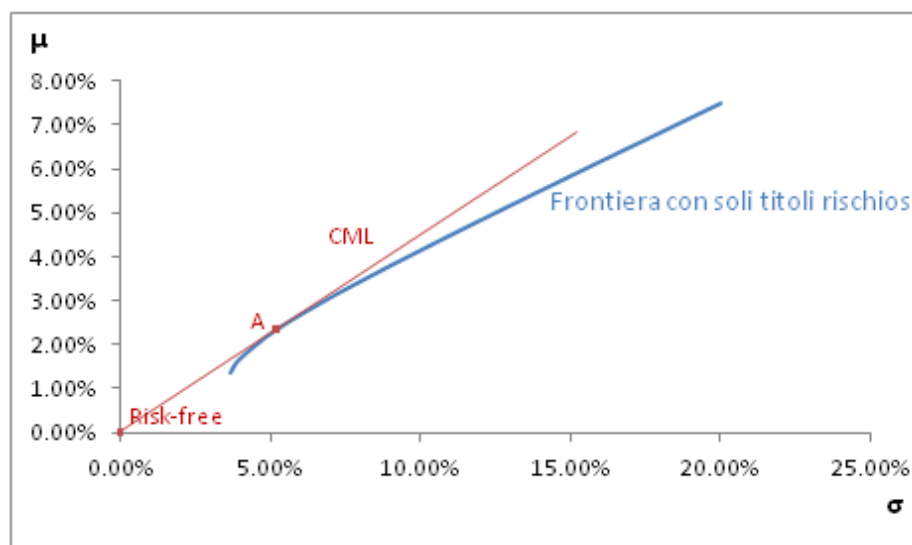


Figura 1.9: Capital Market Line

Si può notare che la CML è identica alla CAL in un contesto di pluralità di titoli rischiosi: entrambe hanno come coefficiente angolare l'Indice di Sharpe e come intercetta il rendimento del titolo privo di rischio ed entrambe esprimono il rendimento in funzione del rischio dei titoli.

L'inclinazione della CML è in teoria positiva, perché il rendimento del titolo risk-free è prossimo allo zero, ma in contesti di crisi economica, a causa dei rendimenti molto bassi, quando non addirittura negativi dei titoli azionari rischiosi, potrebbe accadere che una CML stimata su dati campionari possa essere negativa.

Il portafoglio A è detto portafoglio di tangenza: esso è infatti frutto della tangenza tra la CML e la frontiera costituita dai soli titoli rischiosi ed è il miglior portafoglio formato da titoli rischiosi cui unire il titolo privo di rischio.

Per capire quest'ultima affermazione si pensi al coefficiente angolare della CML, l'Indice di Sharpe: si è già detto che esso rappresenta la remunerazione che l'investitore ottiene per ogni unità di rischio. Il portafoglio di tangenza è ottenuto proprio massimizzando la pendenza della CML, data la frontiera dei titoli rischiosi: scegliere un portafoglio posto più in basso significa scegliere volontariamente una remunerazione inferiore per ogni unità di rischio "detenuta" e questa scelta si scontra con l'ipotesi di avversione al rischio. Il portafoglio di tangenza è quindi il portafoglio ottimo a cui unire il titolo privo di rischio.

L'importanza della teoria di Tobin risiede nel "Teorema di Separazione", che appunto separa il comportamento degli agenti in due fasi tra loro concettualmente diverse.

Nella prima l'investitore seguendo il metodo appena proposto definisce il portafoglio di tangenza e la Capital Market Line, che quindi sono frutto di un processo oggettivo e sono i medesimi per tutti gli agenti economici. Nella seconda, invece, ogni investitore si colloca sulla CML massimizzando la propria funzione di utilità, con differenze in base al proprio grado di avversione al rischio "r" espresso dalle sue curve di indifferenza. Ancora una volta, investitori con curve di indifferenza più ripide (più avversi al rischio) investiranno una porzione consistente della propria ricchezza nel titolo risk-free, mentre investitori meno avversi al rischio investiranno di più sul portafoglio di tangenza, potendo

eventualmente anche arrivare ad indebitarsi al tasso risk-free pur di acquistare il portafoglio di tangenza oltre la propria ricchezza.

## Capitolo 2

---

# I LIMITI DELLA TEORIA CLASSICA DI PORTAFOGLIO

---

La teoria finanziaria classica fin qui esposta ha senza dubbio il pregio di tentare di orientare gli investitori nelle loro scelte di allocazione dei capitali nel modo più razionale ed oggettivo possibile, ma risente della forza delle ipotesi su cui si basa. Esse sono infatti presentate come degli assiomi veri, ma andrebbero invece ritenute dei punti di partenza da cui far partire lo sviluppo di una teoria e quindi successivamente analizzati nello specifico per cogliere se risultino coerenti con la realtà empirica. Molto spesso, ad esempio, è difficile definire il comportamento delle persone come assolutamente razionale ed anche le teorie sui mercati come l'assenza di costi di transazione risultano essere eccessivamente ottimistiche.

### 2.1 Ipotesi sui mercati

In primo luogo l'ipotesi di Eugene Fama sull'efficienza dei mercati è messa in crisi da numerosi studi che hanno evidenziato come esistano delle anomalie stagionali che possono permettere di predire rialzi e ribassi dei mercati dei capitali. L'elenco di queste anomalie è molto esteso, ma le principali e più interessanti sono l'effetto gennaio, l'effetto Halloween e l'effetto vacanza.

L'effetto gennaio è stato studiato da Rozeff e Kinney[6], i quali analizzando le serie storiche dei titoli quotati sulla borsa di New York dal gennaio 1904 al

dicembre 1974 notano come i rendimenti abbiano una forte stagionalità. In particolare dividono il periodo di studio di settantuno anni in quattro sottoperiodi: il primo dal 1904 al 1928, il secondo dal 1929 al 1940, il terzo dal 1940 al 1974 ed il quarto composto dalla somma del primo e del terzo. Fatta eccezione per il secondo sottoperiodo (caratterizzato da estrema volatilità a seguito della Grande Depressione), i due studiosi dimostrano che la differenza dei rendimenti tra i mesi è statisticamente rilevante e nello specifico che:

- il mese di gennaio (dal quale prende il nome l'effetto) presenta rendimenti di molto superiori rispetto agli altri mesi;
- i mesi di luglio, novembre e dicembre rendimenti superiori alla media;
- i mesi di febbraio e giugno rendimenti inferiori alla media.

Risultati simili a questo, ma di intensità maggiore, sono emersi da studi sui titoli quotati nella Borsa Australiana, dove i mesi con i maggiori rendimenti sono luglio e gennaio.

Nonostante ciò, comunque, Rozeff e Kinney sostengono che questo effetto di stagionalità non implica necessariamente che i mercati dei capitali siano inefficienti, perché non permette all'investitore di guadagnare rendimenti eccessivamente sproporzionati rispetto al profilo di rischio sostenuto. Questa tesi è sostenuta da tre argomentazioni:

- la grande quantità di prove coerenti con l'efficienza dei mercati;
- la tendenza a rendimenti maggiori a gennaio è controbilanciata da un aumento della volatilità in quel mese;
- gli analisti di mercato hanno consapevolezza di questo effetto di stagionalità e quindi quando compiono i loro investimenti incorporano anche questa informazione.

Tuttavia i due studiosi, nonostante non rigettino l'ipotesi di efficienza dei mercati, sottolineano che i modelli finanziari classici dovrebbero essere modificati per tenere conto di questo effetto di stagionalità.

Bouman e Jacobsen[7] per dimostrare l'effetto Halloween partono dal vecchio detto "Sell in May and go away". Il mese di maggio, infatti, segna l'inizio di un periodo di forti vendite di titoli, così come settembre è un mese caratterizzato da un aumento degli acquisti (tanto che il detto termina alternativamente con "but remember to come back in September" o con "but buy back on St. Leger Day", facendo riferimento al giorno di una classica corsa inglese di cavalli a settembre). Questo effetto stagionale, chiamato così perché bisognerebbe cominciare a comprare titoli il 31 ottobre, giorno di Halloween, è interessante per due motivi: a differenza di altri effetti, può essere individuato sia nei mercati sviluppati che in quelli in via di sviluppo e permane anche dopo che gli agenti ne sono stati informati. Inoltre hanno dimostrato che seguire una strategia di questo tipo si rivela un'ottima scelta perché permette di aumentare il rendimento e contemporaneamente di contenere i rischi. L'effetto è particolarmente forte nei mercati europei e tende a manifestarsi con regolarità nel tempo, tanto che i due studiosi lo identificano nel mercato inglese già a partire dal 1694.

In particolare Bouman e Jacobsen analizzano i dati mensili degli indici di mercato di 37 paesi (19 sviluppati e 18 in via di sviluppo) per un periodo dal gennaio 1970 all'agosto 1998 e scoprono che i rendimenti tra le due metà dell'anno (quella che va da maggio a fine ottobre e quella da novembre ad aprile) sono molto differenti:

- i rendimenti nel periodo maggio-ottobre tendono ad essere molto vicini allo zero in molti paesi e talvolta sono addirittura negativi.
- in Europa i rendimenti del primo periodo non superano mai il 2%, mentre nel secondo periodo superano sempre l'8%.
- un risultato simile si ottiene per i paesi non europei.
- la Nuova Zelanda è l'unico mercato in cui i rendimenti medi sono maggiori da maggio ad ottobre.

Per quanto riguarda le possibili cause di questo effetto, Bouman e Jacobsen

rigettano le spiegazioni legate a distorsioni dei dati, a variazioni del rischio (che invece rimane costante durante l'anno) e del volume delle contrattazioni ed a fattori specifici dei vari settori economici (come ad esempio, gli scompensi di cassa delle aziende agricole), ma notano una forte relazione con la durata ed il timing delle vacanze lavorative e dimostrano come queste due variabili siano negativamente correlate con il livello mensile dei rendimenti. Tuttavia ammettono che questo risultato non è coerente con la distribuzione delle stagioni nei due emisferi: mentre nel semestre maggio-ottobre nell'emisfero boreale la stagione è calda e favorisce le vacanze estive, nello stesso periodo in quello australe è inverno e quindi ci sono meno vacanze ed i rendimenti dovrebbero essere maggiori, ma con l'eccezione della Nuova Zelanda, ciò non si verifica.

Infine Jacobs e Levy[8] dimostrano l'effetto vacanza, scoprendo che nel periodo tra il 1963 ed il 1982 circa il 35% della crescita totale del prezzo dei titoli si è verificato negli otto giorni che precedono i festivi in cui le contrattazioni alla Borsa di New York sono sospese (Capodanno, il President's Day, il Venerdì Santo, il Memorial Day, il Quattro di Luglio, la Festa dei Lavoratori, il Giorno del Ringraziamento e Natale). La media dei rendimenti in questi otto giorni prefestivi è infatti dello 0.365% contro lo 0.026% degli altri giorni. I due studiosi notano poi che nel periodo di fine anno vi è un forte incremento dei rendimenti non solo nei due giorni precedenti Natale e Capodanno, ma in tutta la settimana dal 24 al 31 dicembre. Tuttavia questo incremento del rendimento non è attribuibile ad un incremento del rischio, che anzi è inferiore (infatti la deviazione standard dei rendimenti prefestivi è pari a 0.609, contro lo 0.783 dei giorni non prefestivi). Un'altra caratteristica interessante di questo effetto riguarda i giorni precedenti a feste nelle quali però le contrattazioni di borsa non sono sospese, come il giorno di San Patrizio: nei giorni precedenti queste feste non si verificano rendimenti superiori alla media. L'assenza dell'effetto potrebbe essere dovuta sia alla mancanza dello stop nelle negoziazioni, sia al livello di festività inferiore rispetto a

quello di quando i mercati sono chiusi.

Ci sono poi altre ipotesi alla base della teoria di Markowitz che sembrano essere eccessivamente restrittive. Ad esempio l'assenza di costi di transazione si scontra con l'evidenza e molti studi hanno dimostrato che in presenza di costi di transazione il vantaggio netto della diversificazione in termini di contenimento del rischio ed incremento del rendimento diminuisce velocemente e che la regola di continuare ad aggiungere titoli al portafoglio per diminuire la componente di rischio diversificabile, vada controbilanciata dalla tendenza a contenere i costi di negoziazione dei titoli. Il punto in cui bisogna smettere di aggiungere titoli è quello in cui i costi marginali raggiungono i benefici marginali.

Bisogna capire quindi quale possa essere il numero ottimo di titoli per comporre un portafoglio ben diversificato senza dover sopportare eccessivi costi di transazione. Nei suoi studi Meir Statman confuta la tesi precedente che bastasse una decina di titoli per formare un portafoglio ben diversificato[9]:

*"We show that a well-diversified portfolio of randomly chosen stocks must include at least 30 stocks for a borrowing investor and 40 stocks for a lending investor."*

Egli infatti dimostra che i costi crescono meno velocemente di quanto stimato precedentemente da altri economisti, perciò il punto in cui i benefici marginali della diversificazione eguagliano i costi marginali è maggiore e si ottengono benefici dalla diversificazione anche oltre i dieci titoli.

Nonostante ciò Statman scopre che sul mercato americano il livello di diversificazione è molto basso, con oltre il 50% degli investitori che non possiede più di due titoli e solo il 10% che ne detiene più di 10. Pare quindi che chi investe rinunci a sfruttare le opportunità di contenimento del rischio che il mercato presenta; peraltro ciò non è spiegabile dai costi di transazione perché appunto il numero di

titoli medio si ferma molto prima che essi rendano sconveniente aggiungere un titolo marginale.

## 2.2 Ipotesi sul comportamento razionale dell'investitore

Come già accennato, anche le ipotesi sul comportamento razionale dell'investitore non sono esenti da critiche e molti studi sono stati sviluppati sulle distorsioni dei processi decisionali. L'ipotesi sul comportamento maggiormente osteggiata è quella del processo di scelta razionale improntato alla massimizzazione dell'utilità: è infatti difficile sostenere che le persone conoscano tutte le informazioni e le alternative di scelta, riescano ad ordinarle in base al loro rendimento atteso ed alla probabilità che ognuna di esse si verifichi e scelgano sempre quella che rappresenta il risultato migliore.

Nel 1953, Maurice Allais[10] critica fortemente la teoria dell'utilità attesa, secondo la quale appunto le persone calcolano l'utilità attesa facendo la media delle utilità di ogni possibile alternativa pesata per la probabilità che l'alternativa si verifichi. In uno studio, che prende il nome di Paradosso di Allais, fa scegliere a delle persone tra:

- situazione A: certezza di vincere 100 milioni di franchi
- situazione B: 10% di possibilità di vincere 500 milioni, 89% di possibilità di vincere 100 milioni ed 1% di possibilità di non vincere nulla

e tra:

- situazione C: 11% di possibilità di vincere 100 milioni ed 89% di possibilità di non vincere nulla
- situazione D: 10% di possibilità di vincere 500 milioni e 90% di possibilità di non vincere nulla.

I valori attesi delle 4 scelte sono:

$$A = 100, \quad B = 139, \quad C = 11, \quad D = 50$$

Si aspettava quindi che tra A e B la maggioranza delle persone scegliesse B, e tra C e D, la scelta più comune fosse D. Sorprendentemente invece la maggior parte degli intervistati sceglieva A (con valore atteso inferiore a B) e D. Questo pattern di scelte si dimostra incoerente sia con la teoria dell'utilità attesa, sia al suo interno, infatti se per la prima scelta gli intervistati preferiscono A ritenendo:

$$U(100) > 0.1U(500) + 0.89U(100)$$

questi dovrebbero optare per C nella seconda scelta, perché questa può essere riscritta dalla prima scelta sottraendo da entrambe le parti  $0.89U(100)$ :

$$U(100) - 0.89U(100) > 0.1U(500) + 0.89U(100) - 0.89U(100)$$

semplificando:

$$0.11U(100) > 0.1U(500)$$

In altri termini la prima e la seconda scelta sono uguali e ci si aspetterebbe che un decisore razionale che intende massimizzare l'utilità attesa scelga B e D, o che comunque compia le due scelte coerentemente scegliendo o A e C o B e D.

Gli studi di Allais sono poi stati portati avanti da Kahneman e Tversky, che hanno iniziato un filone di ricerca noto come finanza comportamentale che sviluppa e riconosce le fallacie dei processi di scelta, non più considerabili razionali.

In primo luogo Kahneman e Tversky[11] propongono un modello noto come "Teoria del Prospetto" che dimostra, tramite le risposte di studenti e docenti universitari a quesiti su scelte da compiere, una serie di fenomeni che violano la teoria dell'utilità attesa e tenta di spiegare come realmente le persone si comportino quando devono compiere una decisione in condizioni di incertezza.

Innanzitutto, il modello dimostra come le persone sottostimino i risultati che sono probabili rispetto a quelli che sono certi. Questa tendenza prende il nome di

effetto certezza e spiega parte del paradosso di Allais in cui la maggioranza delle persone preferisce la vincita certa A di 100 a quella probabile B di 139, nonostante nella seconda la possibilità di non vincere nulla sia solo dell'1%.

Inoltre hanno scoperto che l'atteggiamento verso il rischio di ogni individuo varia a seconda che gli effetti del rischio siano positivi oppure negativi. Questo effetto è detto di riflessione ed il nome deriva dal fatto che nell'esperimento svolto i risultati per il rischio nel caso di guadagni o perdite sono tra loro speculari. L'esperimento consiste nel proporre agli intervistati quattro quesiti di scelta sullo schema del seguente:

A: 80% di possibilità di vincere 4000 dollari e 20% di possibilità di non vincere nulla

B: vittoria certa di 3000 dollari

e tra:

C: 80% di possibilità di perdere 4000 dollari e 20% di possibilità di non perdere nulla

D: perdita certa di 3000 dollari

I risultati del test sono interessanti: nella scelta tra A e B, circa l'80% ha preferito B e la restante parte A, mentre tra C e D, il 92% ha scelto C e solo l'8% D. Questo testimonia che le persone sono avverse al rischio quando si tratta di un guadagno (scelgono il guadagno certo di 3000 in B, nonostante il valore atteso della scommessa A fosse 3200), ma assolutamente propense al rischio quando temono una perdita (allo stesso modo il valore atteso della perdita di C è maggiore rispetto a quello di D).

Infine Kahneman e Tversky hanno evidenziato come spesso, per semplificare la scelta tra più alternative complesse, si tenda ad ignorare gli elementi in comune ed a concentrarsi unicamente su quelli che le differenziano. Questo effetto, definito di isolamento, può implicare scelte irrazionali perché due diverse alternative possono essere composte e scomposte in più di un solo modo.

Tutti questi effetti sono chiari esempi di violazione della teoria dell'utilità attesa.

Gli studi di Kahneman e Tversky non si limitano però alla Teoria del Prospetto, ma hanno scoperto altre distorsioni dei processi decisionali, tra le quali la rappresentatività, la disponibilità e l'ancoraggio[12].

La rappresentatività è l'errore che si commette quando si ritiene che un individuo appartenga ad un particolare gruppo e lo si giudica in base alle caratteristiche proprie del gruppo e non in base a quelle proprie dell'individuo. In un esperimento, a due gruppi di persone sono state presentate delle brevi descrizioni della personalità di individui estratti a caso da una popolazione di 100 tra ingegneri ed avvocati. Ad un gruppo è stato detto che gli ingegneri erano 70 e gli avvocati 30, mentre all'altro gruppo sono state fornite le frequenze inverse (30 ingegneri e 70 avvocati). Sotto il profilo statistico, la probabilità che una specifica descrizione della personalità appartenga ad una professione piuttosto che ad un'altra è influenzata dalle proporzioni della professione sul totale, ma i soggetti intervistati nei due gruppi hanno prodotto essenzialmente gli stessi giudizi sulle probabilità.

La disponibilità è l'errore dovuto alla valutazione della probabilità di un evento in base alla facilità con la quale fatti simili possono essere portati alla mente: ad esempio si potrebbe incorrere in questo errore se stimando l'incidenza dell'infarto sugli uomini di mezza età si pensasse ai casi clinici dei propri familiari. L'esistenza di questa distorsione è testimoniata anche da un esperimento nel quale a dei gruppi di persone sono state sottoposte differenti liste di nomi maschili e femminili: in alcune liste i nomi maschili erano maggiormente famosi rispetto a quelli femminili, mentre in altre erano i nomi femminili ad essere più famosi. Per ogni lista i soggetti intervistati hanno ritenuto (sbagliando) che il genere con in maggior numero di personalità note fosse il più numeroso.

Infine l'ancoraggio avviene quando si stima un valore partendo da un valore

iniziale, spesso suggerito dalla formulazione del problema, e lo si corregge per arrivare alla risposta finale; cosicché se la formulazione del problema viene cambiata, cambia notevolmente anche la stima finale. Ad esempio, a due gruppi di persone è stato chiesto di stimare la percentuale di nazioni africane che compongono l'ONU, dopo che un numero da 1 a 100 è stato estratto facendo girare una ruota alla presenza dei gruppi. I valori estratti sono stati 10 per il primo gruppo e 65 per il secondo, mentre il valore mediano delle risposte è stato rispettivamente 25 e 45, dimostrando di essere stato influenzato dal numero estratto casualmente.

La consapevolezza ed una migliore conoscenza di queste distorsioni possono migliorare il processo decisionale in situazioni di incertezza.

## Capitolo 3

---

# L'APPROCCIO DI BODNAR E BODNAR

---

Oltre ad i limiti della teoria finanziaria classica in ordine alle ipotesi sui mercati e sul comportamento degli agenti citati nel precedente capitolo, recentemente sono stati avanzati dubbi di carattere statistico sulla distribuzione degli stimatori campionari della frontiera efficiente. Numerosi studi, infatti, sembrano testimoniare come gli stimatori campionari classici producano una frontiera efficiente eccessivamente ottimistica che sottostima il rischio dei portafogli. I contributi più interessanti a questa discussione vengono da Siegel e Woodgate[13], e successivamente da Olha Bodnar e Taras Bodnar[14].

Siegel e Woodgate partono dal riconoscimento che persino gli operatori di mercato più esperti stimano la frontiera efficiente usando i rendimenti attesi, le varianze e la matrice delle covarianze campionari come se questi fossero i reali parametri della distribuzione dei rendimenti dei titoli e non appunto delle stime campionarie. Quella che ottengono è quindi una frontiera efficiente "naive", cioè ingenua, viziata dal mancato riconoscimento dell'errore di stima derivante dall'uso di dati campionari al posto di quelli della popolazione.

In particolare dimostrano che sia lo stimatore classico del rendimento atteso che quello della varianza sono sistematicamente distorti e che il primo tende a sovrastimare il parametro, mentre il secondo a sottostimarli, risultando quindi

in una frontiera efficiente eccessivamente ottimistica. Un investitore basandosi su questo risultato distorto si illude di poter ottenere un rendimento maggiore ed un rischio minore rispetto a quelli che sono invece disponibili nel mercato e se, a causa di questo errore di stima, viene suggerito che un titolo avrà un rendimento elevato, il portafoglio composto in prevalenza da questo titolo avrà risultati che deluderanno le aspettative.

Siegel e Woodgate propongono quindi degli stimatori alternativi che correggono queste distorsioni. La differenza tra la frontiera efficiente classica e quella à la Siegel e Woodgate è tanto maggiore quanti più sono i titoli  $k$  presenti nel portafoglio e quanto minore è la lunghezza delle serie storiche  $n$ . Questo perchè ci si aspetta che più lunghe siano le serie storiche più gli errori statistici tendano ad annullarsi, mentre più sono i titoli che compongono il portafoglio, maggiori sono le possibili combinazioni che sbagliano ad ottimizzare la frontiera.

Inoltre, i due studiosi provano quanto teorizzato analizzando serie storiche di dati finanziari per rendimenti mensili su 408 mesi dal gennaio 1970 al dicembre 2003 sui mercati di Stati Uniti, Regno Unito, Giappone, Hong Kong, Germania ed Australia. Coerentemente con quanto precedentemente esposto, all'aumentare del numero di paesi aumenta anche la differenza tra frontiera efficiente tradizionale e frontiera efficiente à la Siegel e Woodgate, mentre tale differenza diminuisce all'aumentare della lunghezza delle serie storiche. Questi risultati sono riassunti nel grafico 3.1.

Infine considerano l'impatto economico di questi risultati: si chiedono cioè come varia l'utilità dell'investitore nell'usare la frontiera efficiente da loro proposta rispetto ad usare quella classica. Assumendo una funzione di utilità quadratica del tipo (1.4), verificano che utilizzando la frontiera efficiente stimata con gli stimatori non distorti si ottiene sempre un incremento di utilità. Questo incremento è proporzionale al numero di titoli  $k$ , mentre diminuisce all'aumentare della lunghezza delle serie storiche  $n$  e dell'avversione al rischio  $r$ .

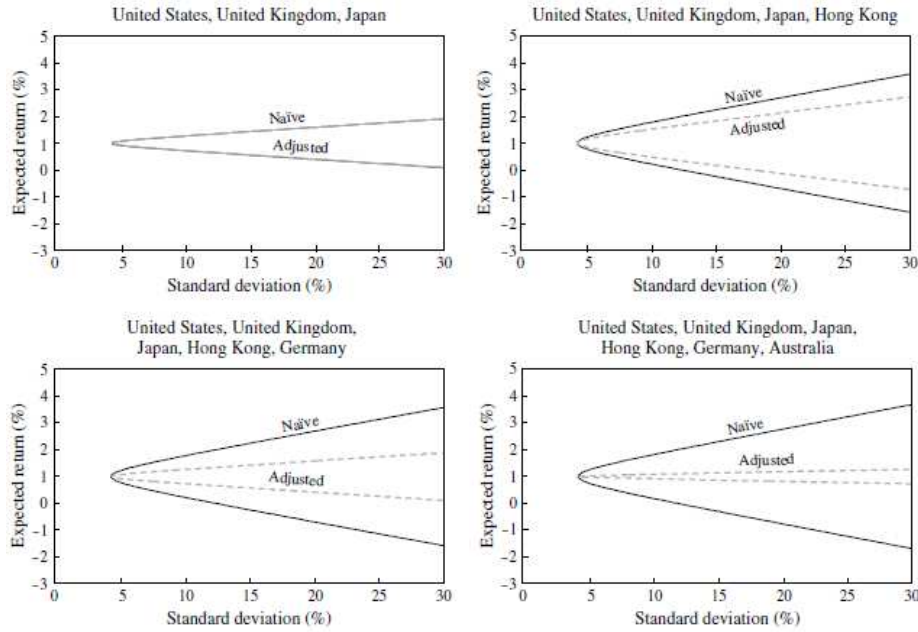


Figura 3.1: Frontiera efficiente campionaria e di Siegel e Woodgate al variare del numero dei titoli e della lunghezza delle serie storiche[13]

È interessante notare come i risultati, essendo stati sviluppati con il metodo di ricampionamento bootstrap, non richiedano assunzioni sulla distribuzione statistica e siano pertanto robusti rispetto al verificarsi o meno dell'ipotesi di distribuzione normale dei rendimenti dei titoli.

Lo studio di Bodnar e Bodnar riprende il contributo di Siegel e Woodgate sulla frontiera campionaria che sottostima il rischio. Essi considerano la frontiera efficiente come la parte superiore della parabola:

$$g_p(R, V) = (R - R_{GMV})^2 - s(V - V_{GMV}), \quad \text{con } g_p(R, V) = 0 \quad (3.1)$$

dove

$$s = \mu' R \mu \quad e \quad R = (\sum)^{-1} - \frac{(\sum)^{-1} 1 1' (\sum)^{-1}}{1' (\sum)^{-1} 1} \quad (3.2)$$

sono rispettivamente la pendenza della frontiera efficiente ed il rendimento atteso dei portafogli,  $\mu$  il vettore dei rendimenti e  $\sum$  la matrice delle covarianze. E:

$$R_{GMV} = \frac{1' (\sum)^{-1} \mu}{1' (\sum)^{-1} 1} \quad e \quad V_{GMV} = \frac{1}{1' (\sum)^{-1} 1} \quad (3.3)$$

sono il rendimento atteso e la varianza del portafoglio di minima varianza  $GMV$ .

Sebbene la definizione della frontiera efficiente della popolazione sia agevole, la sua stima campionaria si rivela essere complicata, infatti sostituendo alla (3.1), i relativi stimatori campionari si ha:

$$g_s(R, V) = (R - \hat{R}_{GMV})^2 - \hat{s}(V - \hat{V}_{GMV}) \quad (3.4)$$

con:

$$\hat{s} = \hat{\mu}' \hat{R} \hat{\mu} \quad \hat{R}_{GMV} = \frac{1'(\hat{\Sigma})^{-1} \hat{\mu}}{1'(\hat{\Sigma})^{-1} 1} \quad \hat{V}_{GMV} = \frac{1}{1'(\hat{\Sigma})^{-1} 1} \quad (3.5)$$

Tuttavia, Bodnar e Bodnar studiando la distribuzione degli stimatori  $\hat{s}$ ,  $\hat{R}_{GMV}$  e  $\hat{V}_{GMV}$ , dimostrano che lo stimatore della frontiera efficiente campionaria è distorto:

$$E(g_s(R, V)) \neq g_p(R, V) \quad (3.6)$$

e, coerentemente con la letteratura precedente, eccessivamente ottimistico: a parità di rischio sovrastima il rendimento atteso, oppure, a parità di rendimento atteso sottostima il rischio.

Propongono, quindi, uno stimatore della frontiera efficiente alternativo, che sotto una serie di ipotesi, si dimostra essere non distorto. In particolare le ipotesi alla base del modello sono:

- i rendimenti dei titoli sono incorrelati tra loro e distribuiti normalmente
- il numero dei titoli  $k > 2$
- la lunghezza delle serie storiche  $n > k$

Lo stimatore della frontiera efficiente non distorto proposto da Bodnar e Bodnar è:

$$g_u(R, V) = (R - \hat{R}_{GMV})^2 - \mathbf{A} * \hat{V}_{GMV} - (\mathbf{B} * \hat{s} - \mathbf{C})(V - \mathbf{D} * \hat{V}_{GMV}) \quad (3.7)$$

dove:

$$A = \frac{(n-2)(n-1)}{n(n-k)(n-k+1)}$$

$$B = \frac{(n - k - 1)}{(n - 1)}$$

$$C = \frac{(k - 1)}{n}$$

$$D = \frac{(n - k - 2)(n - 1)}{(n - k - 1)(n - k)}$$

Si può dimostrare che la frontiera distorta e quella non distorta si intersecano solo in corrispondenza di un portafoglio la cui varianza sia:

$$V^* = \gamma V_{GMV}$$

dove:

$$\gamma = \frac{2ns + (n - k)(k - 1) + n - 2}{kns + (n - k)(k - 1)} \quad (3.8)$$

Quindi solo nel punto  $V^* = \gamma V_{GMV}$ , lo stimatore della frontiera campionaria tradizionale non è distorto, mentre:

- per  $V > \gamma V_{GMV}$ , la frontiera campionaria classica sovrastima la reale frontiera efficiente della popolazione.

- per  $V < \gamma V_{GMV}$ , la frontiera campionaria classica sottostima la reale frontiera efficiente della popolazione.

Ma, al crescere del numero dei titoli  $k$  (e già per valori non eccessivamente elevati), il coefficiente  $\gamma$  tende ad essere minore di 1, quindi il  $V^*$  per il quale le due frontiere si intersecano non esiste, perchè non può esistere un valore di varianza inferiore a quello del portafoglio di minima varianza e, pertanto, si può affermare che la frontiera campionaria classica sovrastima la reale frontiera efficiente della popolazione.

Come si evince dalla figura 3.2, per ogni livello di rendimento atteso, la frontiera efficiente stimata con lo stimatore distorto (tratteggiata) sottostima (anche notevolmente) il livello di rischio sopportato dagli investitori. Questo può implicare problemi notevoli: gli investitori scegliendo un determinato portafoglio sulla frontiera distorta accettano il profilo di rischio dell'investimento, che però

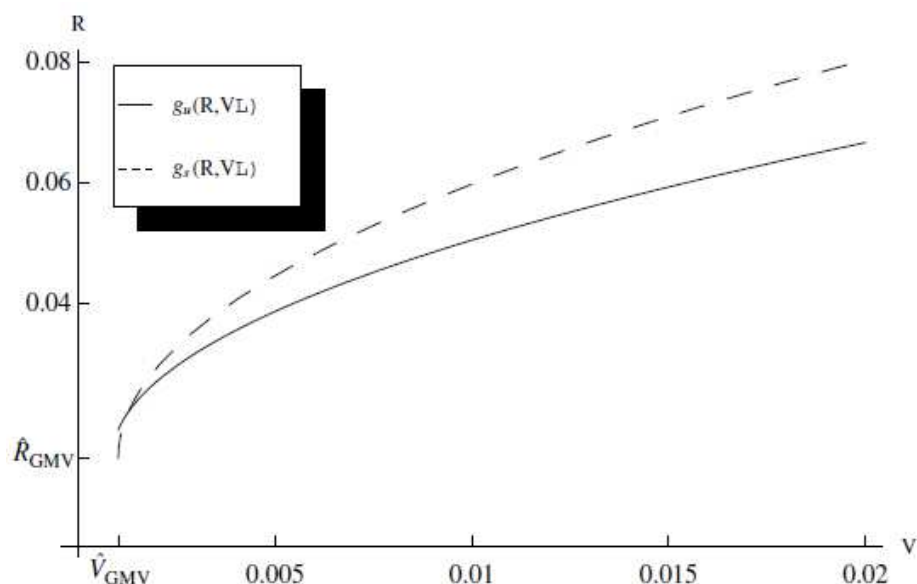


Figura 3.2: Frontiera efficiente campionaria e non distorta[14]

risulta sottostimato, e finiscono quindi per sopportare implicitamente un rischio superiore.

Infine Bodnar e Bodnar presentano un test di verifica di ipotesi sul parametro  $s$ , che è molto importante perchè, come già ampiamente sottolineato, rappresenta il prezzo del rischio, cioè l'incremento di rendimento atteso per ogni unità di rischio sopportato. Le ipotesi del test sono:

$$H_0 : s = 0 \quad H_1 : s > 0$$

L'ipotesi nulla va rifiutata se:

$$TS = \frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} \hat{s} > F_{k-1, n-k+1, \alpha} \quad (3.9)$$

Nel caso in cui si accetti l'ipotesi nulla, la frontiera efficiente diventerebbe una retta parallela all'asse delle ascisse e pertanto l'unico portafoglio realmente efficiente sarebbe quello di minima varianza. Infatti nessuno sarebbe disposto ad

investire in portafogli con il medesimo rendimento di quello a minima varianza, ma con rischio maggiore.

### 3.1 I limiti dell'approccio di Bodnar e Bodnar

L'approccio di Bodnar e Bodnar è senza dubbio molto interessante, ma presenta anche dei limiti.

In primo luogo le ipotesi alla base del modello sembrano essere piuttosto irrealistiche, soprattutto nella misura in cui richiedono che i rendimenti dei titoli siano distribuiti normalmente e tra loro indipendenti, determinando una matrice diagonale delle covarianze del tipo:

<i>Titoli</i>	1	2	3	...	$n$
1	$\sigma_1^2$	0	0	0	0
2	0	$\sigma_2^2$	0	0	0
3	0	0	$\sigma_3^2$	0	0
$\vdots$	0	0	0	$\ddots$	0
$n$	0	0	0	0	$\sigma_n^2$

che mal descrive l'evidenza empirica.

In secondo luogo al crescere del numero di osservazioni, cioè all'aumentare della lunghezza delle serie storiche, la frontiera efficiente non distorta tende ad essere uguale alla frontiera efficiente campionaria classica.

Infatti per:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D = 1$$

la relazione:

$$g_u(R, V) = (R - \hat{R}_{GMV})^2 - \mathbf{A} * \hat{V}_{GMV} - (\mathbf{B} * \hat{s} - \mathbf{C})(V - \mathbf{D} * \hat{V}_{GMV}) \quad (3.10)$$

diventa:

$$g_u(R, V) = (R - \hat{R}_{GMV})^2 - \mathbf{0} * V_{GMV} - (\mathbf{1} * \hat{s} - \mathbf{0})(V - \mathbf{1} * \hat{V}_{GMV}) \quad (3.11)$$

semplificando:

$$g_u(R, V) = (R - \hat{R}_{GMV})^2 - \hat{s}(V - \hat{V}_{GMV}) \quad (3.12)$$

che è proprio la funzione della frontiera efficiente campionaria 3.4.

Quindi, per riassumere:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_u(R, V) = g_s(R, V) \quad (3.13)$$

In terzo luogo un ulteriore elemento di criticità è dovuto al comportamento dimostrato dalla frontiera non distorta in alcuni frangenti. In particolare, per serie storiche giornaliere molto lunghe e quando:

$$\hat{s} < \frac{(n-1)(k-1)}{n(n-k-1)} \quad (3.14)$$

la frontiera assume una posizione speculare all'asse delle ordinate rispetto a quella che dovrebbe avere, determinando quindi rendimenti con varianze negative (la curva rossa nel grafico 3.3).

Ciò è chiaramente impossibile sia sotto il profilo economico-finanziario, non potendo esistere portafogli di titoli con un rischio negativo, sia sotto quello meramente matematico-statistico, essendo la varianza una somma di distanze al quadrato, per questo sempre maggiore od uguale a zero.

Infine, il vantaggio operativo nel lavorare con la frontiera efficiente non distorta al posto di quella campionaria classica sembra essere piuttosto limitata. Infatti, oltre alla frontiera efficiente campionaria, potrebbe essere utile definire anche un intervallo di confidenza all'interno del quale la frontiera efficiente della

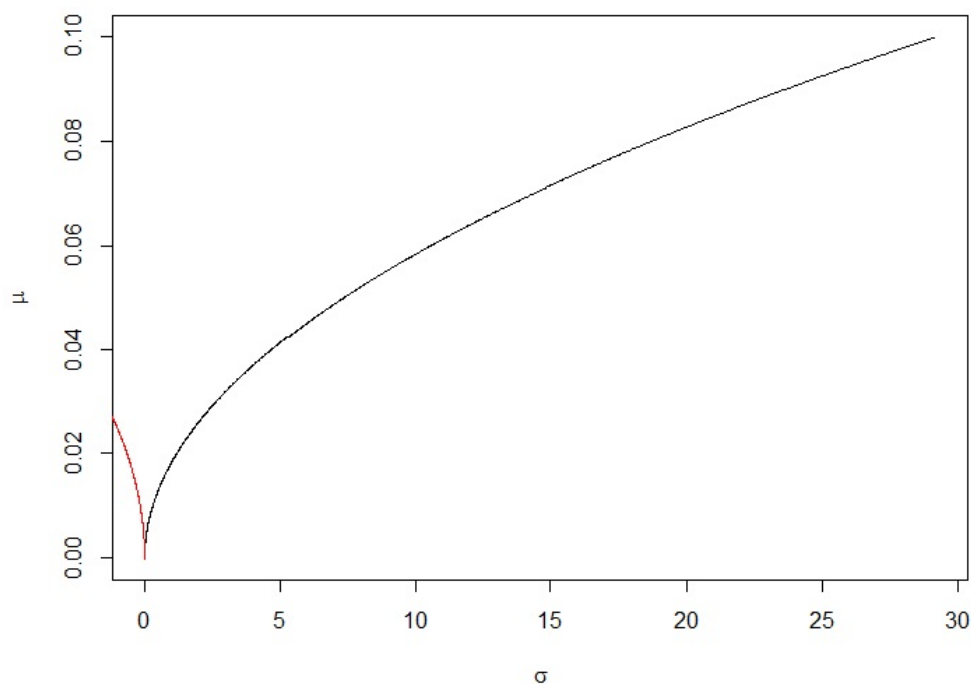


Figura 3.3: Comportamento anomalo della frontiera proposta da Bodnar e Bodnar

popolazione ricade con una probabilità data. Questo tipo di logica è tipico dell'analisi statistica e permette di ottenere un limite superiore ed uno inferiore per un determinato parametro da stimare:

$$Pr(LL < \theta < UL) = 1 - \alpha \quad (3.15)$$

dove, "LL" è il limite inferiore, "UL" quello superiore,  $\theta$  è il parametro da stimare (in questo caso la frontiera efficiente della popolazione) ed  $1 - \alpha$  è detto livello di confidenza, cioè la probabilità che il parametro sia all'interno dell'intervallo.

L'ampiezza dell'intervallo  $UL - LL$  è proporzionale al livello di confidenza, cioè al crescere di quest'ultimo aumenta anche l'ampiezza dell'intervallo: infatti più si vuole essere sicuri che il parametro ricada nell'intervallo, più quest'ultimo deve essere ampio.

Per capire quindi se la frontiera non distorta sia realmente utile dal punto di vista operativo si può ragionare in termini di intervalli di confidenza. Si sviluppa l'intervallo di confidenza per la frontiera efficiente classica ed a seconda della posizione della frontiera non distorta rispetto all'intervallo si da un giudizio:

- se la frontiera non distorta è all'interno dell'intervallo di confidenza, essa è statisticamente uguale a quella distorta (per quel dato livello di confidenza). Quindi utilizzare l'una al posto dell'altra non implica risultati diversi, e pertanto, per semplicità conviene utilizzare quella tradizionale.

- se la frontiera non distorta è fuori dall'intervallo di confidenza, allora le due frontiere sono diverse anche statisticamente ed è preferibile utilizzare quella proposta da Bodnar e Bodnar.

Tuttavia studi recenti hanno dimostrato come generalmente la frontiera di Bodnar e Bodnar sia all'interno dell'intervallo di confidenza per la frontiera efficiente campionaria, quindi il vantaggio operativo nell'usare lo stimatore non distorto pare essere piuttosto limitato.

## Capitolo 4

---

# ANALISI DEI DATI

---

L'analisi dei dati che segue studia il comportamento della frontiera efficiente campionaria classica e di quella non distorta proposta da Bodnar e Bodnar. Verrà inoltre presentata una verifica dell'ipotesi di normalità dei rendimenti, comune ad entrambi i modelli.

Si è scelto di analizzare 9 titoli azionari quotati sul mercato regolamentato italiano: Fiat, Eni, Unicredit, Banca Popolare di Milano, Mediobanca, Luxottica, Mediaset, Tod's e Finmeccanica. Tutti i titoli (eccetto Unicredit, Banca Popolare di Milano e Mediobanca, per i quali la motivazione della scelta sarà spiegata nel prosieguo) appartengono a settori produttivi differenziati e fanno parte dell'indice FTSE MIB, il più significativo di Borsa Italiana che comprende le maggiori 40 società italiane e rappresenta circa l'80% dell'intera capitalizzazione di mercato (dati [borsaitaliana.it](http://borsaitaliana.it))

I dati sono stati analizzati con l'ausilio del software statistico R e le serie storiche sono state ottenute dal sito [yahoo.finance](http://yahoo.finance).

Spesso si è fatto ricorso a test statistici di verifica di ipotesi, per i quali, di volta in volta verrà spiegata l'ipotesi nulla. Si ricorda che un test di verifica di ipotesi permette di accettare o rifiutare un'ipotesi (detta ipotesi nulla) con un determinato livello di significatività: stabilito quest'ultimo, se il valore del p-value è maggiore del livello di significatività stabilito si accetta l'ipotesi nulla,

altrimenti la si rifiuta. Il p-value indica infatti il livello minimo di significatività per il quale si rifiuta l'ipotesi nulla.

Come misura del rendimento si è scelto di calcolare quello logaritmico, come differenza logaritmica tra i prezzi di chiusura dei titoli:

$$r = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} \quad (4.1)$$

Il rendimento logaritmico, infatti, rappresenta un'approssimazione lineare del rendimento semplice calcolato come variazione percentuale del prezzo rispetto al periodo di tempo antecedente.

## 4.1 Verifica dell'ipotesi di normalità dei rendimenti

L'ipotesi di distribuzione normale dei rendimenti delle attività finanziarie è molto dibattuta in letteratura. Un primo importante contributo a questa discussione viene da Louis Bachelier[3], che nel 1900 nella sua tesi di dottorato sostiene che i rendimenti finanziari sono distribuiti normalmente. Sarà Mandelbrot[15] oltre sessant'anni più tardi ad evidenziare come i rendimenti dei titoli non sono perfettamente normali, ma presentano una distribuzione leptocurtica, più appuntita e con code più pesanti: l'uso della distribuzione normale, quindi, sottostima la probabilità di eventi estremi. Tuttavia Fama[16] sostiene che la distribuzione normale è appropriata per descrivere quella dei rendimenti mensili dei titoli.

L'analisi verrà quindi realizzata sia per i rendimenti giornalieri che per quelli mensili.

### 4.1.1 Verifica per i rendimenti giornalieri

Si sono considerati i rendimenti giornalieri dei titoli Fiat, Eni, Unicredit, Luxottica, Mediaset, Tod's e Finmeccanica per il periodo di otto anni dal Primo Gennaio 2006 al 31 Dicembre 2013. Il totale delle osservazioni è pari a 2056.

Per verificare la normalità si è usato il test di Shapiro-Wilk, che ha dato per tutti sette i titoli il medesimo risultato:

**Test di normalità di Shapiro-Wilk**

Titolo	P-value
Fiat	<2.2e-16
Eni	<2.2e-16
Unicredit	<2.2e-16
Luxottica	<2.2e-16
Mediaset	<2.2e-16
Tod's	<2.2e-16
Finmeccanica	<2.2e-16

Tabella 4.1: Test di normalità di Shapiro-Wilk per i rendimenti giornalieri

Per tutti i titoli il p-value assume un valore infinitesimale e, pertanto, si rifiuta l'ipotesi nulla che i rendimenti giornalieri siano distribuiti normalmente.

Alla medesima conclusione si poteva arrivare anche dal punto di vista grafico confrontando la funzione di densità dei rendimenti stimata con il metodo Kernel con quella di una distribuzione normale avente media e deviazione standard pari a quelle dei rendimenti del titolo. Ad esempio per i titoli Unicredit e Tod's:

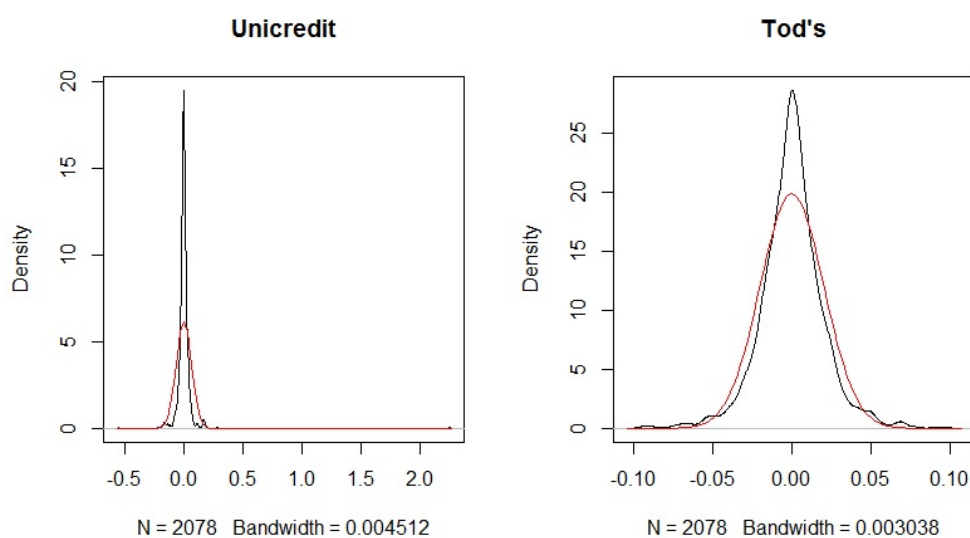


Figura 4.1: Confronto tra funzione di densità della normale e dei rendimenti giornalieri

Dalla figura 4.1 si può cogliere una notevole differenza tra la densità dei rendimenti (in nero) e quella della normale (in rosso) ed in particolare la distribuzione dei rendimenti è più appuntita della normale ed attribuisce maggior peso ad osservazioni estreme, confermando le considerazioni di Mandelbrot [15]. A risultati simili e concordi con il rifiuto dell'ipotesi di normalità si arriva per tutti sette i titoli.

### 4.1.2 Verifica per i rendimenti mensili

Per i rendimenti mensili si sono considerati gli stessi sette titoli, per il medesimo lasso temporale di 8 anni. In questo caso il numero delle osservazioni è di 95. Il risultato rispetto alla verifica per i rendimenti giornalieri cambia notevolmente.

**Test di normalità di Shapiro-Wilk**

<b>Titolo</b>	<b>P-value</b>
Fiat	0.0047
Eni	0.2377
Unicredit	1.962e-15
Luxottica	0.7674
Mediaset	0.0713
Tod's	0.1452
Finmeccanica	7.968e-07

Tabella 4.2: Test di normalità di Shapiro-Wilk per i rendimenti mensili

Tutti i p-value dei test effettuati sui dati mensili crescono rispetto al valore nei test sui dati giornalieri. Assumendo un livello di significatività di 0.05, si possono considerare normali le distribuzioni dei rendimenti di Eni, Luxottica, Mediaset e Tod's. Alle stesse conclusioni si arriva usando test di normalità diversi, come quello di Jarque-Bera.

È poi interessante capire se i rendimenti mensili di Fiat, Unicredit e Finmeccanica risultano essere non normali perchè asimmetrici o per la curtosi. A questo proposito si usa il test di normalità di D'Agostino, che oltre a verificare la normalità, sottopone a verifica di ipotesi anche gli indici di simmetria e di curtosi.

Test di normalità di D'Agostino

Titolo	P-value normalità	P-value simmetria	P-value curtosi
Fiat	0.0047	0.1346	0.0036
Unicredit	<2.2e-16	<2.2e-16	1.45e-13
Finmeccanica	5.72e-09	1.08e-06	0.0002

Tabella 4.3: Test di normalità di D'Agostino per i rendimenti mensili

Sia per Unicredit che per Finmeccanica entrambi i p-value relativi al test sulla simmetria e sulla curtosi sono molto piccoli e permettono di rifiutare l'ipotesi nulla che i valori di simmetria e di curtosi siano pari a quelli della normale: i rendimenti mensili di Unicredit e di Finmeccanica non sono distribuiti normalmente sia per la mancanza di simmetria, sia per la curtosi. Fiat, invece, ha sicuramente una curtosi non normale (p-value  $\ll 0.05$ ) come gli altri due titoli, ma l'ipotesi nulla di simmetria può essere accettata.

Infine la stima puntuale dell'eccesso di curtosi dei tre titoli restituisce valori tutti maggiori di zero (2.04 per Fiat, 3.55 per Finmeccanica ed addirittura 42.59 per Unicredit), di nuovo concordi con la teoria di Mandelbrot [15].

Ancora una volta queste considerazioni possono essere tratte anche osservando i grafici della funzione di densità, in particolare per il titolo Luxottica, quello con il valore di significatività osservato più elevato, e per i titoli non distribuiti normalmente Fiat, Unicredit e Finmeccanica.

Dal grafico 4.2, si può notare che per Luxottica c'è una sostanziale somiglianza tra la funzione di densità della normale con media e deviazione standard pari a quelle della distribuzione dei rendimenti (in verde) e la reale funzione di densità dei rendimenti (in nero): quest'ultima è piuttosto simmetrica e la leptocurtosi trascurabile.

Lo stesso non si può dire per Fiat, Unicredit e Finmeccanica: soprattutto per gli ultimi due titoli c'è una discordanza assoluta tra la funzione di densità della normale (in rosso) e quella di densità dei rendimenti (in nero). Per quanto riguarda Fiat, emerge una distribuzione piuttosto leptocurtica, ma, come già conferma-

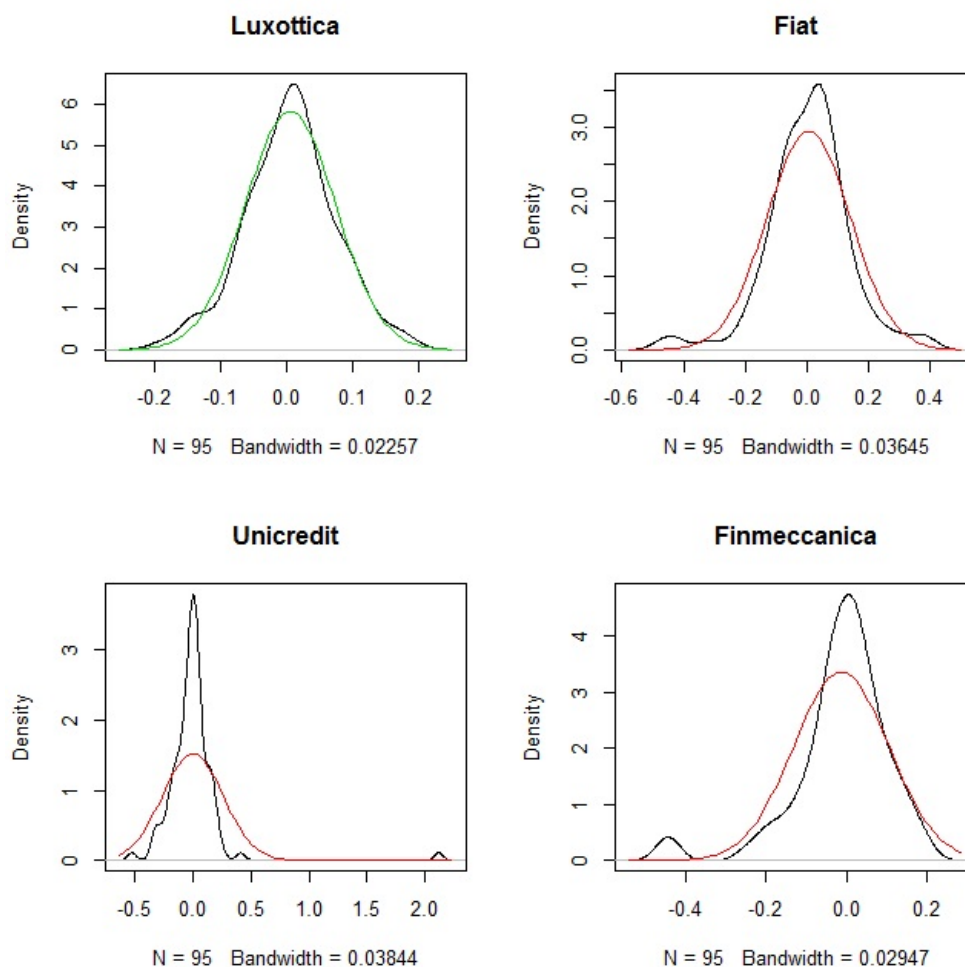


Figura 4.2: Confronto tra funzione di densità della normale e dei rendimenti mensili

to analiticamente con il test di D'agostino, simmetrica. Nella distribuzione di Finmeccanica, invece, la leptocurtosi è più accentuata ed inoltre è presente una chiara asimmetria negativa, testimoniata anche dall'indice di simmetria pari a -1.45. Infine, anche dal riquadro relativo ad Unicredit si può cogliere la rappresentazione del relevantissimo eccesso di curtosi, che si manifesta in una distribuzione decisamente accentrata, anche se con la presenza di un valore estremo (chiaramente un outlier), che indica un rendimento mensile di oltre il 210%. Approfondendo questa anomalia, si rintraccia la sua causa nel raggruppamento azionario avvenuto in data 27 Dicembre 2011, per mezzo del quale ad ogni azionista Uni-

credit sono state ritirate le azioni e corrisposte nuove azioni in un rapporto di 10 ad 1, senza che ciò abbia comportato una diminuzione del capitale sociale. Il rendimento outlier che ne deriva ha quindi un mero significato matematico, ma è privo di una valenza finanziaria: il prezzo del titolo passa da 0.78€ del Primo Dicembre 2011 a 6.42€ del 2 Gennaio 2012, ma calcolati su un quota di capitale dieci volte superiore. Piuttosto che un rendimento positivo straordinario, questa variazione di prezzo è quindi una perdita consistente:

$$\ln\left(\frac{0.642}{0.78}\right) = -19.47\%$$

È perciò interessante analizzare la distribuzione dei rendimenti del titolo escludendo il dato anomalo, che infatti ha solamente un valore contabile e non finanziario. La parte relativa ad Unicredit del grafico 4.2 diventa:

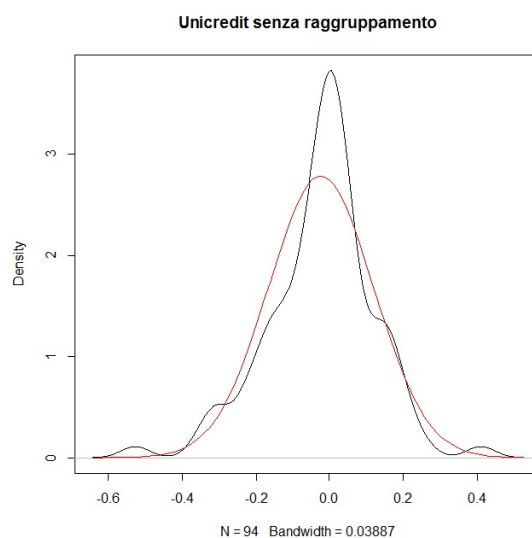


Figura 4.3: Confronto tra funzione di densità della normale e dei rendimenti mensili di Unicredit depurati dall'effetto del raggruppamento azionario

Osservando la figura si può cogliere che, pur rimanendo diversa rispetto alla normale, la distribuzione dei rendimenti le si avvicina parzialmente; permane comunque una decisa leptocurtosi, tuttavia l'indice di eccesso di curtosi diminuisce sensibilmente dal valore di 42.59 ad un più accettabile 1.3. Si attenua invece notevolmente l'asimmetria. Ripetendo il test di D'Agostino si ottiene:

### Test di normalità di D'Agostino

Titolo	P-value normalità	P-value simmetria	P-value curtosi
Unicredit	0.0156	0.0778	0.0225

Tabella 4.4: Test di normalità di D'Agostino per i rendimenti mensili del titolo Unicredit depurati dall'effetto del raggruppamento azionario

Dal confronto con il test effettuato in precedenza sui rendimenti comprensivi dell'outlier emerge un miglioramento dei p-values, tuttavia la distribuzione non può essere considerata normale, soprattutto per quanto riguarda la curtosi. Con un livello di significatività di 0.05, si può invece considerare la distribuzione simmetrica.

## 4.2 Analisi della frontiera efficiente campionaria

Il comportamento della frontiera efficiente campionaria classica (1.2.2) è studiato in base alle variabili della correlazione lineare tra i titoli, della lunghezza delle serie storiche e del numero dei titoli che compongono il portafoglio.

### 4.2.1 Analisi della frontiera efficiente campionaria al variare della correlazione tra i titoli

Si è sottolineato più volte come il coefficiente di correlazione lineare di Pearson  $\rho$  abbia un ruolo fondamentale nel definire il potenziale di riduzione del rischio derivante dalla diversificazione. La disequazione (1.17) evidenzia come il vantaggio di questa aumenti al diminuire della correlazione tra i titoli.

Per cogliere questo aspetto si analizzano due portafogli: uno composto dai tre titoli Fiat, Eni ed Unicredit, l'altro dai tre titoli bancari Unicredit, Banca Popolare di Milano e Mediobanca. I dati sono relativi al biennio 2012-2013 ed i rendimenti sono espressi su base giornaliera; le osservazioni sono 521 per entrambi i portafogli.

Si presume che i titoli appartenenti al medesimo settore siano maggiormente correlati tra loro e rappresentino una modalità di diversificazione non ottimale.

Infatti, confrontando le matrici di correlazione dei due portafogli:

	Fiat	Eni	Unicredit
Fiat	1.0000000	0.4687923	0.4800590
Eni	0.4687923	1.0000000	0.4558656
Unicredit	0.4800590	0.4558656	1.0000000

	Unicredit	Bpm	Mediobanca
Unicredit	1.0000000	0.5803426	0.6506853
Bpm	0.5803426	1.0000000	0.6386617
Mediobanca	0.6506853	0.6386617	1.0000000

si nota che le correlazioni tra i titoli appartenenti al medesimo settore produttivo sono tutte più elevate rispetto a quelle tra i titoli appartenenti a settori diversi (peraltro considerevoli).

Per quanto riguarda le distribuzioni dei titoli, queste sono rappresentate nel grafico a scatola e baffi 4.4.

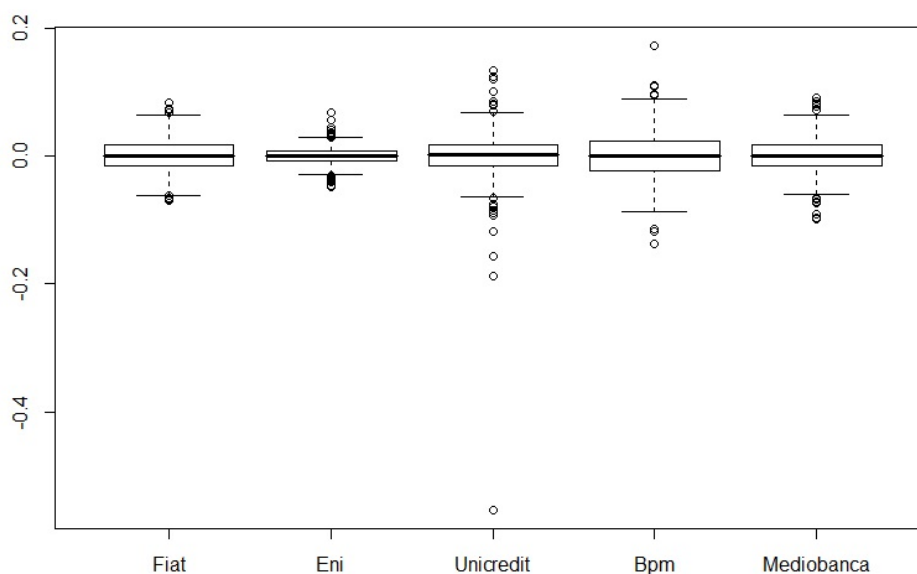


Figura 4.4: Box-plot dei rendimenti giornalieri dal 03/01/2012

Osservando la figura 4.4, le distribuzioni dei rendimenti appaiono sostanzialmente simmetriche, anche se, ancora una volta, il titolo Unicredit presenta valori anomali. Questi rappresentano delle forti perdite e sono riconducibili all'opera-

zione di aumento di capitale sociale del mese di gennaio 2012, che fa seguito al raggruppamento azionario del 27 Dicembre 2011 di cui sopra. Tutta la settimana antecedente il 9 Gennaio 2012 è caratterizzata da fortissime perdite, sia per il prezzo del titolo, che per quello del diritto di sottoscrizione ad un prezzo scontato delle nuove azioni che saranno emesse con l'aumento di capitale; tanto che si arriva all'indifferenza tra esercitare il diritto privilegiato oppure comprare le azioni sul mercato.

È quindi interessante riproporre il grafico 4.4 depurato dall'effetto di questa operazione societaria straordinaria.

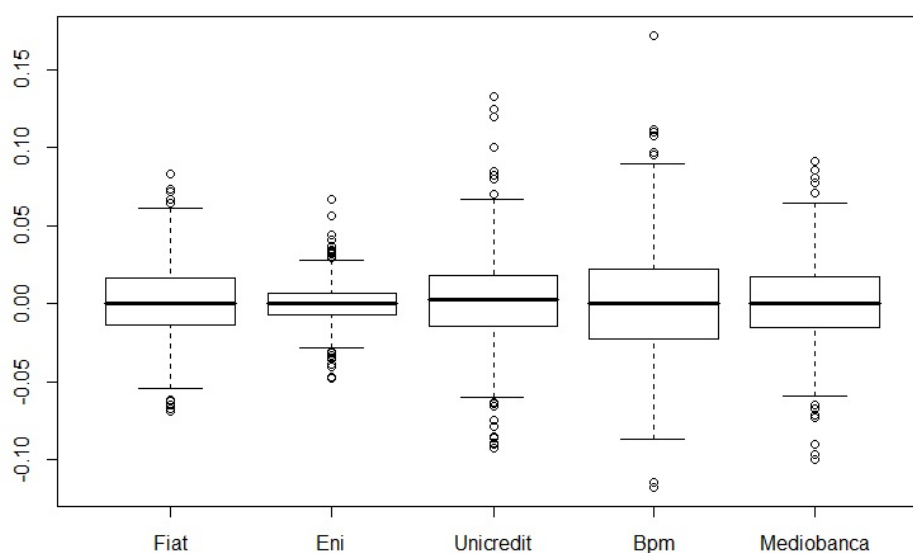


Figura 4.5: Box-plot dei rendimenti giornalieri dal 10/01/12

Dal grafico emerge come le distribuzioni siano sostanzialmente simili. Nonostante ciò, data la forte diversità delle matrici di correlazione dei due portafogli, ci si aspetta che la frontiera efficiente campionaria formata dai titoli bancari sia peggiore rispetto a quella formata da Fiat, Eni ed Unicredit e, pertanto, che ne sia dominata.

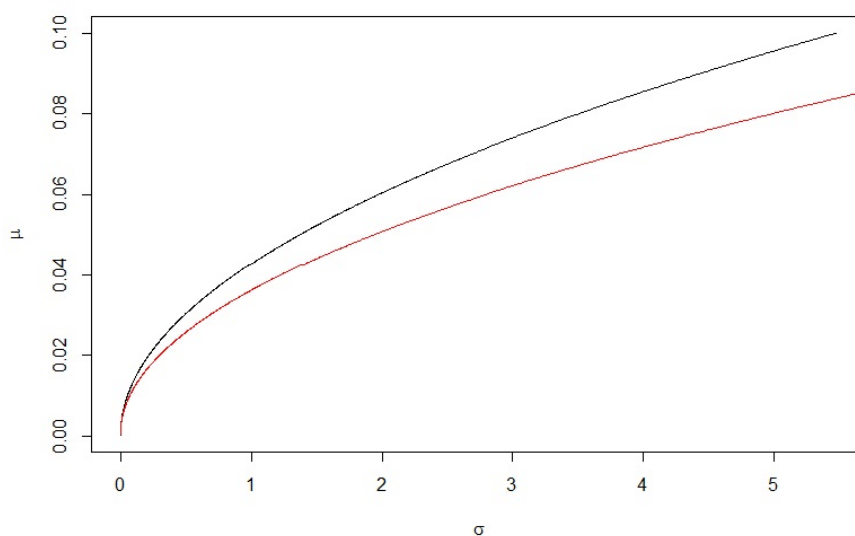


Figura 4.6: Confronto tra frontiere efficienti al variare delle matrici di correlazione

Il risultato del confronto è coerente con le aspettative: la frontiera efficiente campionaria formata da Fiat, Eni ed Unicredit (nel grafico 4.6, in nero) domina quella composta dai soli titoli bancari (in rosso). Per ogni livello di rischio, il rendimento offerto dal primo gruppo di portafogli è maggiore rispetto a quello offerto dal secondo: come previsto, investire in titoli appartenenti tutti allo stesso settore (e quindi molto correlati tra loro) è una scelta non ottimale.

#### 4.2.2 Analisi della frontiera efficiente campionaria al crescere del numero dei titoli e della lunghezza delle serie storiche

Nel capire quale ruolo abbiano un incremento del numero dei titoli e della lunghezza delle serie storiche nel definire la frontiera efficiente campionaria, almeno per il primo aspetto, la figura 1.8 ha un forte potere esemplificativo. L'aumento del numero dei titoli implica una diminuzione della componente di rischio diversificabile e quindi ciò dovrebbe risultare in una frontiera efficiente campionaria con un miglior rapporto rischio-rendimento. Per quanto riguarda la lunghezza delle serie storiche è importante sottolineare come appunto la frontiera efficiente

che deriva dall'analisi di dette serie storiche è campionaria, quindi la precisione della stima è naturalmente legata con una relazione positiva alla dimensione del campione. Più il campione (cioè la lunghezza delle serie storiche) aumenta, più l'errore campionario dovuto alla misurazione di solo una parte del fenomeno (il campione appunto) e non della sua totalità si riduce.

I titoli analizzati sono Fiat, Eni, Unicredit, Luxottica, Mediaset, Tod's e Finmeccanica per due casi: il primo limitatamente ai primi tre titoli ed il secondo considerando tutti sette i titoli. Si sono esaminati i rendimenti giornalieri per due periodi: il biennio 2012-2013 (521 osservazioni) ed il periodo di otto anni dal 2006 al 2013 (2078 osservazioni per il portafoglio Fiat-Eni-Unicredit e 2056 osservazioni per il secondo). Le quattro frontiere efficienti che derivano dalla combinazione delle due variabili sono rappresentate nella figura 4.7.

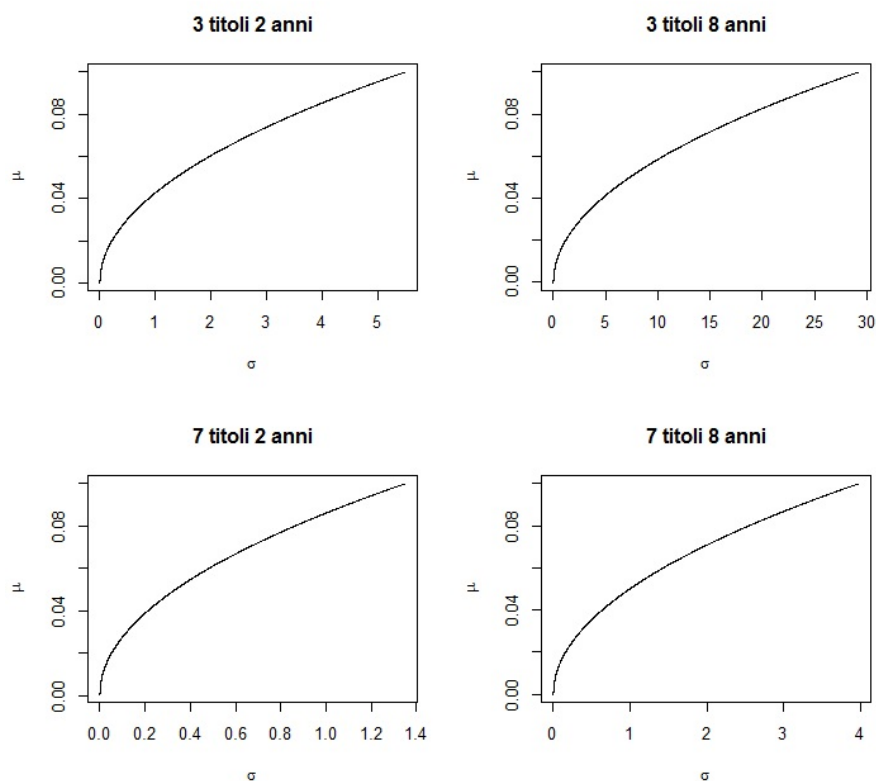


Figura 4.7: Frontiera efficiente campionaria al variare del numero dei titoli e della lunghezza delle serie storiche

Per cogliere le relazioni di dominanza tra le varie frontiere è utile isolare una variabile alla volta. In merito all'aumento del numero dei titoli, la figura 4.7 si risolve nella 4.8.

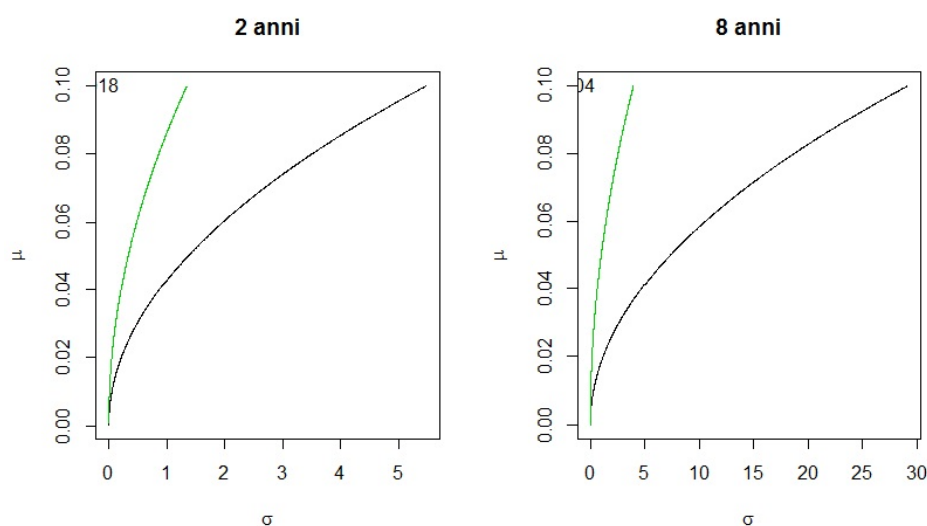


Figura 4.8: Frontiera efficiente campionaria per portafoglio con 3 titoli (verde) e con 7 titoli (nero)

Osservandola è evidente che, sia per le serie storiche di due anni, che per quelle di otto, l'aumento del numero dei titoli migliora radicalmente la frontiera efficiente dalla linea nera (per i portafogli composti solo da tre titoli) alla verde (per i portafogli composti da tutti i titoli). Questi risultati, quindi, confermano pienamente le aspettative e quanto precedentemente sostenuto in merito alla figura 1.8.

Riguardo alla lunghezza delle serie storiche, la figura 4.9 permette di giungere a conclusioni piuttosto nette: al crescere del numero di osservazioni la frontiera efficiente peggiora notevolmente passando dalla linea nera (per due anni) alla rossa (per otto anni). Questa tendenza è riscontrabile sia per i portafogli formati da tre titoli, che per quelli composti da sette ed è sicuramente influenzata dalla congiuntura economica. Infatti il biennio 2012-2013 è stato un periodo di miglioramento della situazione dei mercati finanziari dopo le crisi del 2007-

2008 e del 2011, invece presenti nelle frontiere stimate sugli otto anni 2006-2013, che finiscono così per scontare decisi incrementi di volatilità e decrementi dei rendimenti.

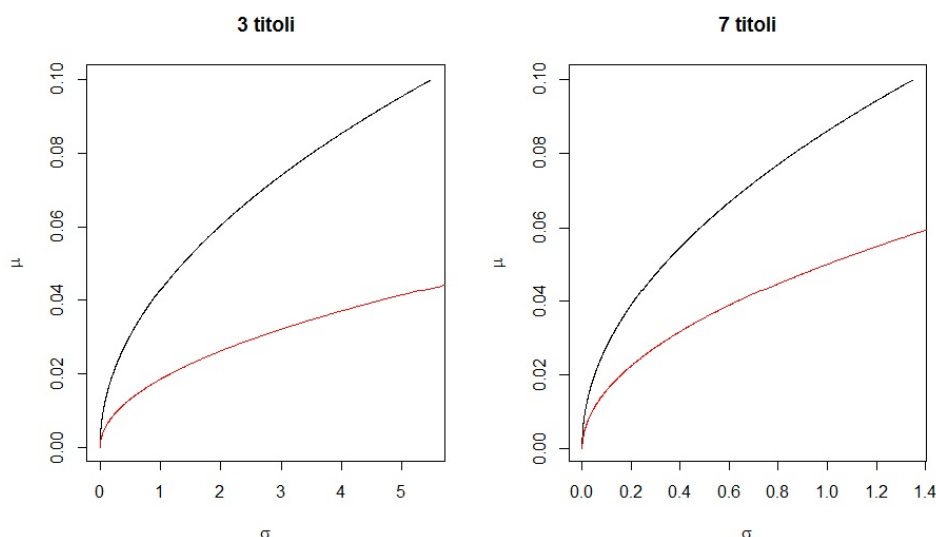


Figura 4.9: Frontiera efficiente campionaria stimata sul biennio 2012-2013 (nero) e sul periodo 2006-2013 (rosso)

La frontiera efficiente campionaria stimata su otto anni di dati è però ricavata a partire da un numero maggiore di osservazioni e rappresenta pertanto una stima migliore della frontiera efficiente perché, *ceteris paribus*, caratterizzata da un minore errore campionario. In questo caso, quindi la frontiera stimata sull'ultimo biennio sovrastima le possibili combinazioni di rischio-rendimento ottenibili nel mercato, risultando eccessivamente ottimistica per un'ottica di investimento di medio-lungo periodo.

### 4.3 Analisi della frontiera efficiente proposta da Bodnar e Bodnar

L'approccio di Bodnar e Bodnar e la frontiera efficiente non distorta da loro proposta sono senza dubbio molto interessanti, ma ad un'analisi dei dati approfonda-

data mostrano molteplici problematicità, alcune delle quali già esposte in fase di presentazione teorica del modello nel paragrafo 3.1.

### 4.3.1 Verifica delle ipotesi alla base del modello

Le ipotesi alla base del modello di Bodnar e Bodnar sembrano non essere molto realistiche: se le due ipotesi che il numero di titoli sia superiore a due ( $k > 2$ ) e che la lunghezza delle serie storiche sia superiore al numero dei titoli ( $n > k$ ) sono facilmente realizzabili, le criticità provengono da quella secondo cui i rendimenti logaritmici sono distribuiti normalmente e sono indipendenti tra loro.

Per quanto riguarda la normalità della distribuzione si è già evidenziato come essa non sia sempre verificata: se per i rendimenti giornalieri dei titoli non si riscontra mai (test di normalità con p-values infinitesimali), anche per quelli mensili non risulta sempre vera, ma su sette titoli analizzati vale solo per quattro di essi.

L'ipotesi di indipendenza dei rendimenti dei titoli, poi, implica la necessità di una matrice di correlazione diagonale, con tutti i titoli incorrelati tra loro; infatti l'incorrelazione è condizione necessaria (seppur non sufficiente) per l'indipendenza.

	Fiat	Eni	Unicredit	Luxottica	Mediaset	Tod's	Finmeccanica
Fiat	1.0000000	0.4687923	0.4800590	0.3502744	0.4401671	0.3559288	0.4352401
Eni	0.4687923	1.0000000	0.4558656	0.4577546	0.4831356	0.4097431	0.4026644
Unicredit	0.4800590	0.4558656	1.0000000	0.2436179	0.4325957	0.3131405	0.4082741
Luxottica	0.3502744	0.4577546	0.2436179	1.0000000	0.3032356	0.4680776	0.2841439
Mediaset	0.4401671	0.4831356	0.4325957	0.3032356	1.0000000	0.3467742	0.4984162
Tod's	0.3559288	0.4097431	0.3131405	0.4680776	0.3467742	1.0000000	0.3189416
Finmeccanica	0.4352401	0.4026644	0.4082741	0.2841439	0.4984162	0.3189416	1.0000000

	Fiat	Eni	Unicredit	Luxottica	Mediaset	Tod's	Finmeccanica
Fiat	1.0000000	0.5100559	0.2746651	0.4848964	0.4864210	0.4437289	0.4384788
Eni	0.5100559	1.0000000	0.2910897	0.4774862	0.4973879	0.4087658	0.3943371
Unicredit	0.2746651	0.2910897	1.0000000	0.2112780	0.2769824	0.2026960	0.2428877
Luxottica	0.4848964	0.4774862	0.2112780	1.0000000	0.4052722	0.4704213	0.3524534
Mediaset	0.4864210	0.4973879	0.2769824	0.4052722	1.0000000	0.3890025	0.4902697
Tod's	0.4437289	0.4087658	0.2026960	0.4704213	0.3890025	1.0000000	0.3322080
Finmeccanica	0.4384788	0.3943371	0.2428877	0.3524534	0.4902697	0.3322080	1.0000000

Come si evince dalle due matrici di correlazione (la prima delle quali è relativa al biennio 2012-2013 e la seconda al periodo 2006-2013) i coefficienti di correlazio-

ne  $\rho$  sono tutti decisamente diversi da zero. Il test statistico sulla significatività del coefficiente di correlazione conferma questa diversità. Mancando il presupposto dell'incorrelazione non può esserci quindi indipendenza tra i rendimenti dei titoli. Inoltre si nota che, al variare della lunghezza delle serie storiche, il comportamento dei valori di  $\rho$  non è univoco: per alcuni titoli l'indice cresce, mentre per altri cala, facendo quindi escludere che neppure asintoticamente la correlazione possa tendere a zero.

L'ipotesi che i rendimenti logaritmici dei titoli siano distribuiti normalmente ed indipendentemente tra loro non trova quindi riscontro.

### 4.3.2 Comportamento anomalo: varianza negativa

Si è poi evidenziato che oltre un determinato valore (da qui in avanti, detto *s limite* (3.14)) della pendenza  $s$  (3.2) della frontiera efficiente la frontiera efficiente non distorta assume una posizione anomala e priva di significato finanziario (oltre che statistico), presentando valori negativi di varianza.

<b>S limite</b>	<b>20 osservazioni</b>	<b>200 osservazioni</b>	<b>2056 osservazioni</b>
<b>3 titoli</b>	0.1188	0.0102	0.001
<b>7 titoli</b>	0.475	0.0311	0.0029

Tabella 4.5: Valore limite di  $s$  per i due portafogli

La tabella riporta i valori di *s limite* per i due portafogli (quello composto dai tre titoli Fiat, Eni ed Unicredit e quello composto da tutti sette i titoli) ed al variare della lunghezza delle serie storiche. Come si può notare osservando la tabella, al crescere del numero di osservazioni  $n$ , il valore *s limite* tende a zero. Infatti per:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)(k-1)}{n(n-k-1)} = 0$$

Inoltre, questo valore è funzione positiva del numero di titoli, infatti, per qualsiasi numero di osservazioni, calcolato per il portafoglio composto da tre titoli è sempre minore rispetto a quello per il portafoglio composto da tutti i titoli.

Ad ogni modo, il valore della pendenza  $s$  è molto spesso inferiore ad  $s_{limite}$  (3.14), tanto che il comportamento anomalo sembra essere più la norma che, appunto, un'anomalia.

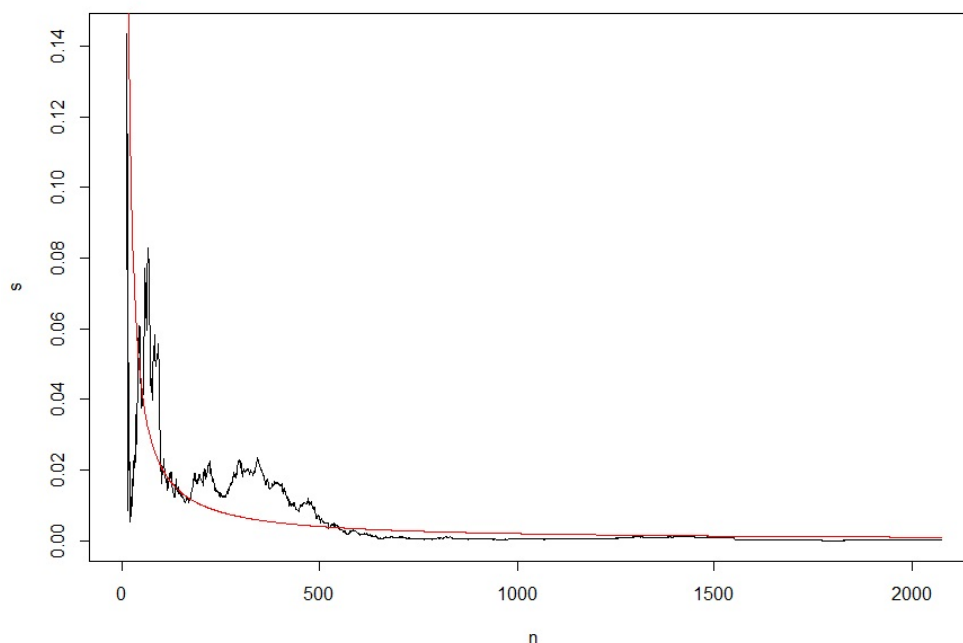


Figura 4.10: Confronto tra  $s_{campionario}$  ed  $s_{limite}$  al variare della lunghezza delle serie storiche per il portafoglio Fiat-Eni-Unicredit

La figura 4.10 mostra in nero il valore di  $s_{campionario}$  (la pendenza della frontiera efficiente campionaria calcolata su dati reali) ed in rosso quello di  $s_{limite}$  al variare del numero di osservazioni per il portafoglio formato dai tre titoli Fiat, Eni ed Unicredit per il periodo di otto anni dal 2006 al 2013. Si può notare che, per questo portafoglio, per un basso numero di osservazioni (fino a circa un centinaio) il valore di  $s_{campionario}$  è minore rispetto ad  $s_{limite}$ , e la frontiera efficiente di Bodnar e Bodnar assume quindi la posizione anomala. Per un numero medio di osservazioni (fino a circa cinquecento)  $s_{campionario} > s_{limite}$  e la frontiera ha quasi sempre la posizione corretta, ma superate le 546 osservazioni assume di nuovo il comportamento anomalo.

Proprio a questo riguardo la frontiera di Bodnar e Bodnar è molto sensibile: si sposta notevolmente al variare anche minimo delle osservazioni. Nella figura 4.11 si può notare questa caratteristica: il primo grafico rappresenta la frontiera efficiente campionaria (in nero) e quella non distorta (in rosso) per il portafoglio formato da Fiat, Eni ed Unicredit per le prime 98 osservazioni del 2006, mentre il secondo (con gli stessi colori) per le prime 99 osservazioni dello stesso anno.

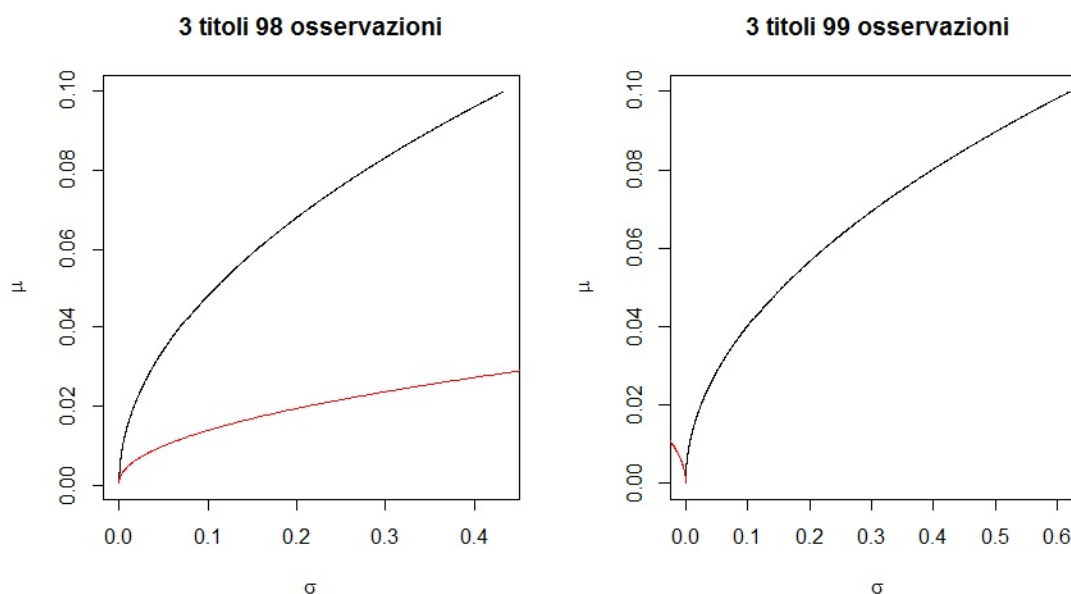


Figura 4.11: Sensibilità della frontiera efficiente di Bodnar e Bodnar

Per un'unica osservazione di differenza la frontiera non distorta cambia radicalmente dalla posizione corretta del primo grafico a quella anomala del secondo, nonostante i rendimenti dei titoli, le loro varianze e le matrici di correlazione non cambino in modo rilevante.

#### T-test sulle medie

Titolo	P-value	Intervallo di confidenza 95 %	Medie campionarie
Fiat	0.82	(-0.005 0.006)	0.003 0.002
Eni	0.87	(-0.003 0.003)	-0.0003 -0.0005
Unicredit	0.92	(-0.012 0.013)	0 0

Tabella 4.6: T-test sulle medie

Il test sulle medie confronta a due a due le medie dei rendimenti di ogni titolo per le 98 e 99 osservazioni e restituisce la media campionaria dei rendimenti, un intervallo di confidenza per la differenza delle medie ed un p-value per accettare o meno l'ipotesi nulla che la differenza delle medie sia zero (cioè che le medie siano uguali tra loro). Tutti tre i p-values sono estremamente elevati, ragione per cui accettiamo l'ipotesi nulla che le medie dei rendimenti per le due diverse osservazioni siano tra loro uguali.

F-test sulle varianze

Titolo	P-value	Intervallo di confidenza 95 %	Rapporto tra varianze
Fiat	0.62	(0.61 1.35)	0.9
Eni	0.82	(0.64 1.42)	0.95
Unicredit	0.97	(0.67 1.48)	0.99

Tabella 4.7: F-test sulle varianze

Il test sulle varianze confronta a due a due le varianze dei rendimenti di ogni titolo per le 98 e 99 osservazioni e restituisce la stima campionaria del rapporto tra le varianze dei rendimenti, un intervallo di confidenza per il rapporto tra le varianze ed il p-value per accettare o meno l'ipotesi nulla che il rapporto tra le varianze sia uno. Anche in questo caso, i tre p-values sono molto elevati, e quindi si accetta l'ipotesi nulla che le varianze dei rendimenti per le due diverse osservazioni siano uguali.

Infine, anche confrontando le matrici di correlazione (la prima relativa alle 98 osservazioni e la seconda alle 99):

```

          Fiat      Eni Unicredit
Fiat      1.0000000 0.3259337 0.1064626
Eni        0.3259337 1.0000000 0.1221793
Unicredit 0.1064626 0.1221793 1.0000000

          Fiat      Eni Unicredit
Fiat      1.0000000 0.3762519 0.1441573
Eni        0.3762519 1.0000000 0.1501111
Unicredit 0.1441573 0.1501111 1.0000000

```

appare evidente che gli indici non variano significativamente.

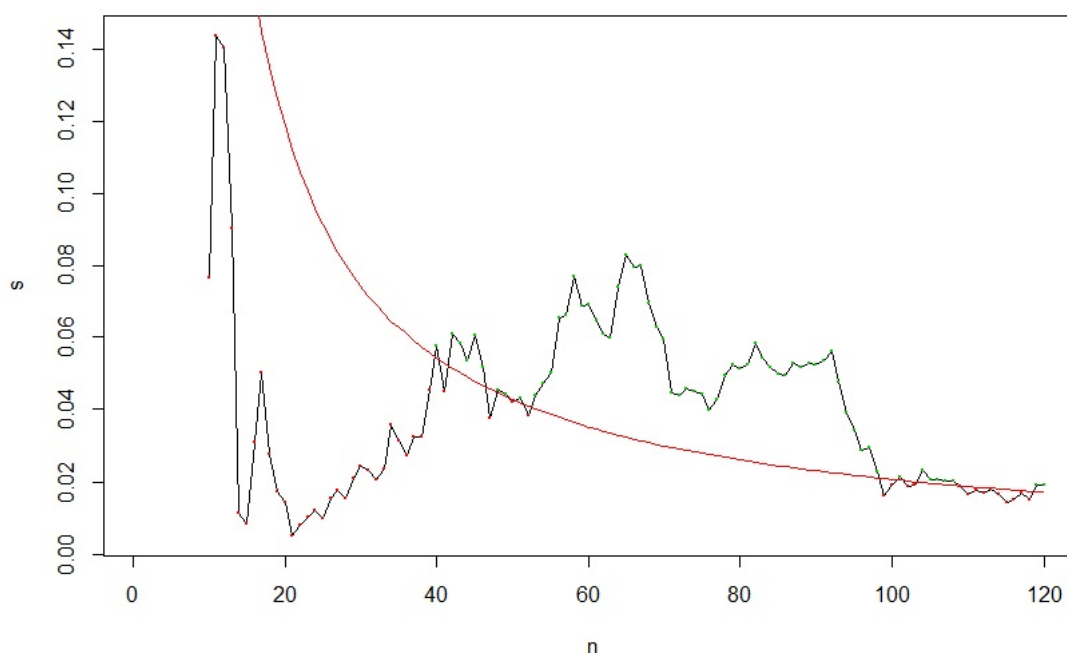


Figura 4.12: Confronto tra  $s$  *campionario* ed  $s$  *limite* al variare della lunghezza delle serie storiche per il portafoglio Fiat-Eni-Unicredit: prime 120 osservazioni del 2006

Il grafico 4.12 evidenzia le prime 120 osservazioni dell'anno 2006; per ogni lunghezza delle serie storiche  $n$ , i punti indicanti la pendenza  $s$  *campionario* sono stati colorati di rosso se minori di  $s$  *limite* e di verde se superiori. Osservando la figura emerge l'estrema sensibilità appena discussa: molto spesso al variare di una sola osservazione la pendenza della frontiera  $s$  *campionario* varia notevolmente. In particolare questo aspetto si coglie intorno alle prime quaranta osservazioni e dopo le prime 98: in corrispondenza di questi intervalli la pendenza  $s$  *campionario* tende ad oscillare attorno al valore di  $s$  *limite*, alternando osservazioni per le quali è maggiore ad altre per cui è minore. Con riferimento alla figura 4.11, si nota che per 98 osservazioni  $s$  *campionario*  $>$   $s$  *limite*, mentre per 99 la pendenza diventa minore del valore limite, risultando in una frontiera efficiente non distorta che assume la posizione anomala.

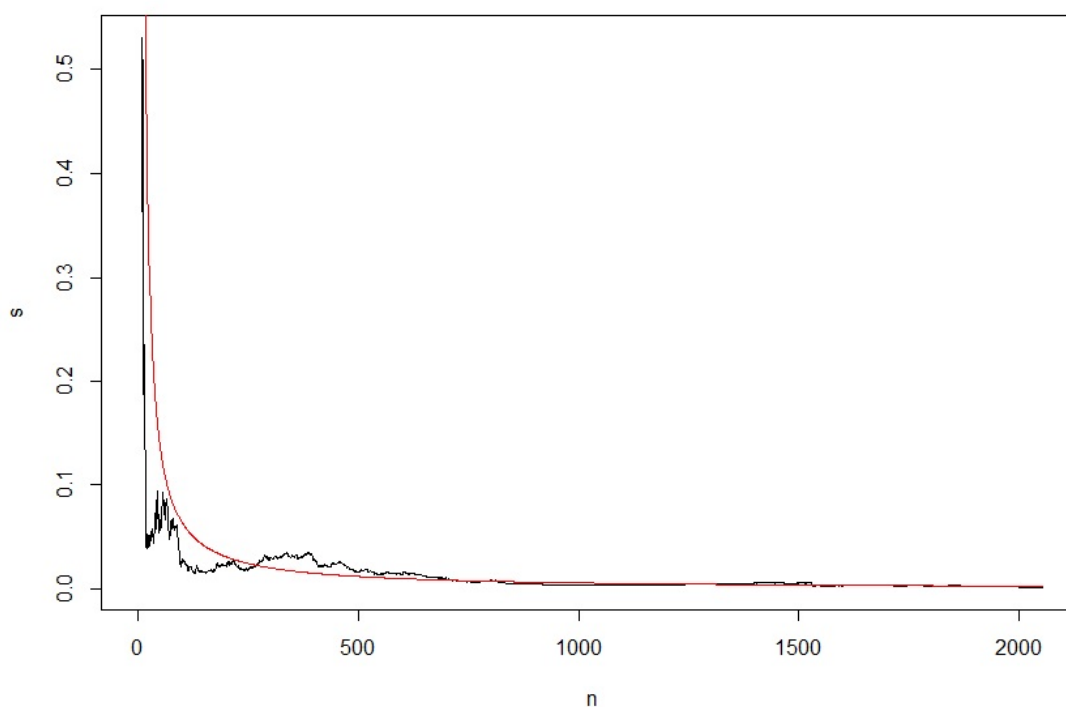


Figura 4.13: Confronto tra  $s$  *campionario* ed  $s$  *limite* al variare della lunghezza delle serie storiche per il portafoglio composto da sette titoli

Per quanto riguarda il numero di titoli  $k$ , confrontando il grafico 4.13 con il 4.10 si nota un miglioramento della sensibilità della frontiera non distorta rispetto al portafoglio di tre titoli: infatti le oscillazioni del valore  $s$  *campionario* (in nero) attorno ad  $s$  *limite* (in rosso) sono meno accentuate ed in alcuni casi la frontiera non distorta mantiene la posizione corretta anche per un numero di osservazioni giornaliere elevate (ad esempio, per  $n = 1500$ :  $s$  *campionario*  $>$   $s$  *limite*). È anche evidente che rispetto al portafoglio con tre titoli il valore della pendenza  $s$  *campionario* è molto più spesso superiore ad  $s$  *limite*: per Fiat-Eni-Unicredit su 2078 osservazioni,  $s$  *campionario*  $>$   $s$  *limite* 447 volte (pari al 21.51%), mentre per il portafoglio composto dai sette titoli su 2056 osservazioni  $s$  *campionario*  $>$   $s$  *limite* 923 volte (pari al 44.89%). Sembra quindi che al crescere del numero dei titoli  $k$  la frequenza dell'anomalia tenda a decrescere.

Tuttavia, essa non migliora affatto considerando i rendimenti mensili.

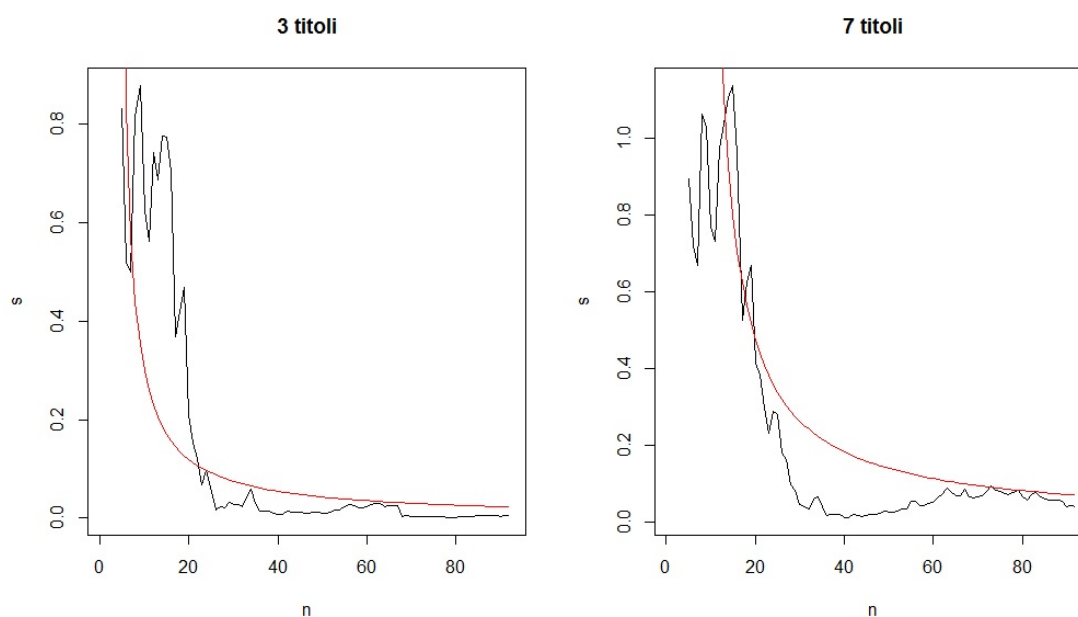


Figura 4.14: Confronto tra  $s$  campionario ed  $s$  limite al variare della lunghezza delle serie storiche per rendimenti mensili

Dai due grafici in figura 4.14 si evince che, anche considerando i rendimenti mensili, la posizione della frontiera di Bodnar e Bodnar rimane non corretta per la maggior parte delle osservazioni. In particolare, su di un totale di 92 osservazioni mensili per il periodo di otto anni dal 2006 al 2013, per il portafoglio composto da tre titoli la frontiera efficiente non distorta assume la posizione corretta solo 15 volte (poco superiore al 16%) e mai oltre le 22 osservazioni. Al contrario di quanto accade per i rendimenti giornalieri, la situazione peggiora ulteriormente all'aumentare del numero dei titoli  $k$ : per sette titoli, la frontiera efficiente assume la posizione corretta solo 9 volte (meno del 10%). Dal grafico emerge infine come le pendenze campionarie  $s$  delle frontiere abbiano un andamento simile per i tre ed i sette titoli, ma il peggioramento della situazione al crescere del numero dei titoli  $k$  è dovuto al valore di  $s$  limite, che come già sottolineato è funzione positiva del numero dei titoli. Questa problematica potrebbe quindi essere legata alla mancanza di indipendenza tra i rendimenti, che al crescere del numero dei

titoli si discosta maggiormente dalla condizione ideale ipotizzata da Bodnar e Bodnar.

### 4.3.3 Comportamento asintotico

Spiegando i limiti della frontiera efficiente di Bodnar e Bodnar si è sottolineato come, al crescere del numero di osservazioni, essa (3.10) tenda a quella campionaria classica (3.4), cioè i parametri A e C tendano a zero, mentre B e D ad uno.

Parametro	20 osservazioni	200 osservazioni	2056 osservazioni
<b>A</b>	0.0559	0.0051	0.0005
<b>B</b>	0.8421	0.9849	0.9985
<b>C</b>	0.1	0.01	0.001
<b>D</b>	1.0478	1.005	1.0005

Tabella 4.8: Parametri per il portafoglio formato da Fiat, Eni, Unicredit

Parametro	20 osservazioni	200 osservazioni	2056 osservazioni
<b>A</b>	0.094	0.0053	0.0005
<b>B</b>	0.6316	0.9648	0.9966
<b>C</b>	0.3	0.03	0.0029
<b>D</b>	1.3397	1.0257	1.0024

Tabella 4.9: Parametri per il portafoglio formato da 7 titoli

Le tabelle riportano i valori dei parametri di A, B, C e D per i due portafogli ed al variare della lunghezza delle serie storiche. Da entrambe le tabelle si evince che al crescere della lunghezza delle serie storiche i parametri A e C tendono a zero, mentre B e C ad uno. I quattro parametri correttivi della frontiera efficiente (ma anche *s limite*) non dipendono in alcun modo dai rendimenti dei singoli titoli, dalla loro varianza e dalla matrice delle covarianze, ma solo da  $n$  e  $k$ . Quindi, ad esempio, i parametri calcolati sulle prime  $n$  osservazioni del 2006 sono identici a quelli stimati sulle prime  $n$  del 2012 o sulle prime  $\frac{n}{4}$  degli anni dal 2007 al 2010.

Se per venti osservazioni il comportamento asintotico è, prevedibilmente, molto debole, stupisce che già per sole duecento osservazioni (cioè meno di un anno

solare di dati borsistici) i parametri A, B, C e D abbiano praticamente raggiunto il loro valore limite e che quindi la frontiera efficiente proposta da Bodnar e Bodnar si risolva in quella campionaria classica.

È poi interessante il confronto tra le due tabelle: per qualsiasi numero di osservazioni i parametri calcolati sul portafoglio composto dai soli tre titoli Fiat, Eni ed Unicredit sono più vicini al valore cui dovrebbero tendere rispetto a quelli calcolati sul portafoglio composto da tutti sette i titoli. Chiaramente la differenza tra i parametri per i due portafogli è maggiormente presente per un numero piccolo di osservazioni e tende ad annullarsi al crescere della lunghezza delle serie storiche. Questa conclusione concorda con gli studi di Siegel e Woodgate[13] ed è illustrata nella figura 3.1.

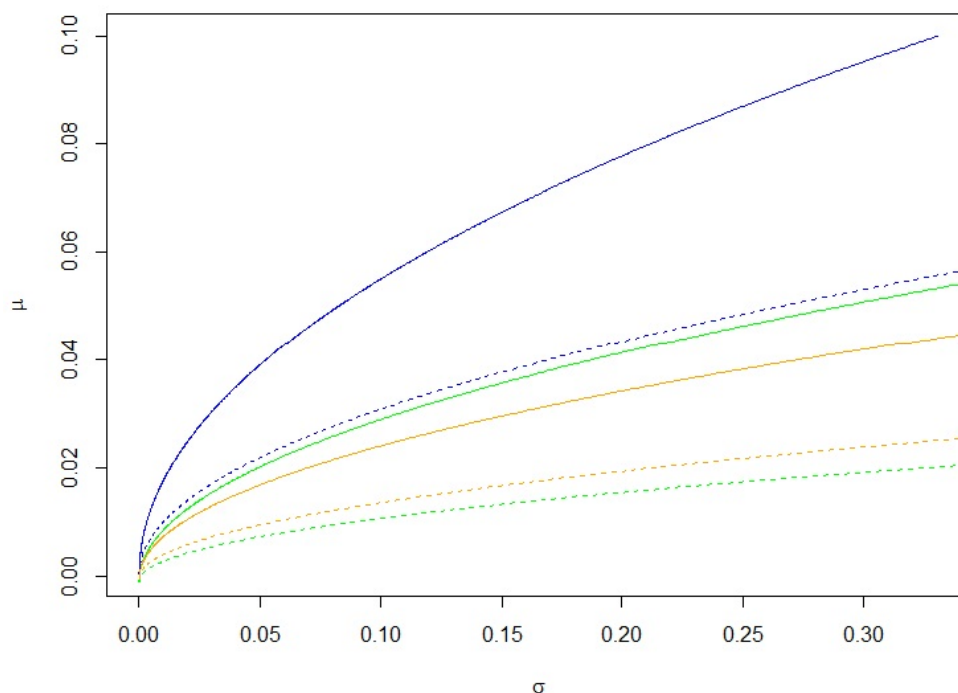


Figura 4.15: Comportamento asintotico della frontiera efficiente non distorta

Nel grafico 4.15 sono rappresentate tre frontiere efficienti campionarie (con la linea continua) con le relative non distorte (tratteggiate) per tre diverse lunghez-

ze delle serie storiche per il portafoglio composto dai sette titoli. Il colore blu identifica le prime 300 osservazioni dal 2006, quella verde le prime 800 e l'ocra le prime 1500. Si può notare che, coerentemente con l'andamento asintotico dei parametri  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  (e con quanto teorizzato anche da Siegel e Woodgate[13]), all'aumentare della lunghezza delle serie storiche  $n$ , la distanza tra la frontiera campionaria e quella non distorta diminuisce.

Il comportamento asintotico della frontiera efficiente di Bodnar e Bodnar non va però inteso come un avvicinamento alla migliore frontiera campionaria (quella stimata sulla serie storica più lunga disponibile), ma come una diminuzione della distanza tra frontiera campionaria e la relativa non distorta al crescere di  $n$ .

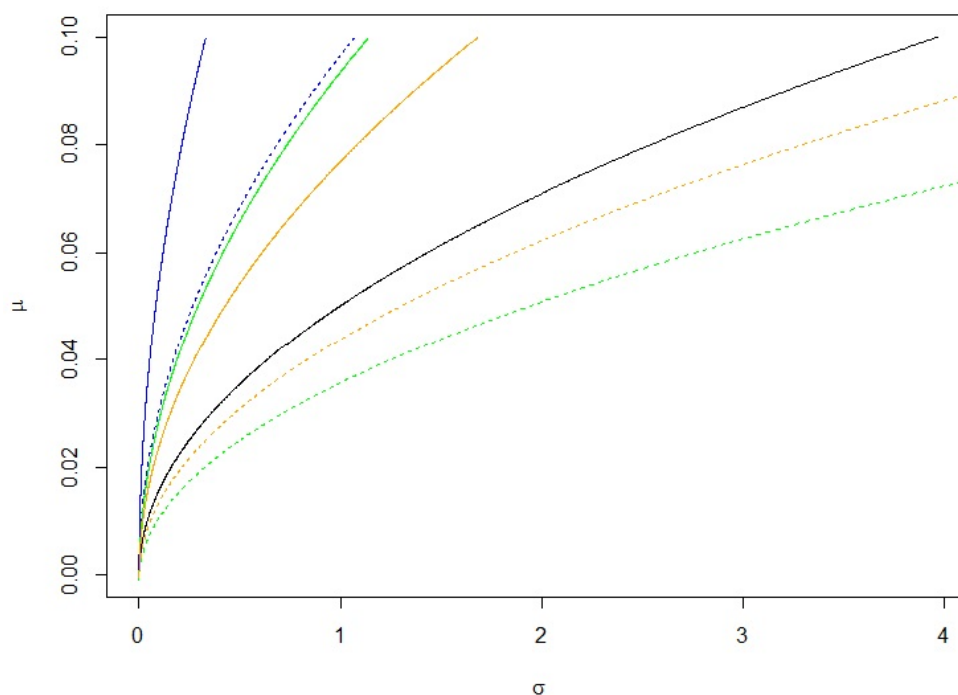


Figura 4.16: Comportamento asintotico della frontiera efficiente non distorta

Infatti, aggiungendo al grafico 4.15 la frontiera efficiente stimata sugli otto anni, si ottiene la figura 4.16, dalla quale emerge nuovamente come la frontiera stimata su serie storiche brevi sottostimi la varianza (nel grafico in blu), in questo

caso perché nel 2006 la crisi finanziaria doveva ancora manifestarsi; tutte tre le frontiere campionarie colorate dominano quella nera (che appunto rappresenta la frontiera efficiente stimata sugli otto anni). È altresì evidente come il comportamento della frontiera non distorta sia indipendente dalla lunghezza delle serie storiche e che essa non converge alla frontiera efficiente campionaria di colore nero. Anzi il comportamento della frontiera di Bodnar e Bodnar, come già osservato nella figura 4.11, è imprevedibile ed erratico.

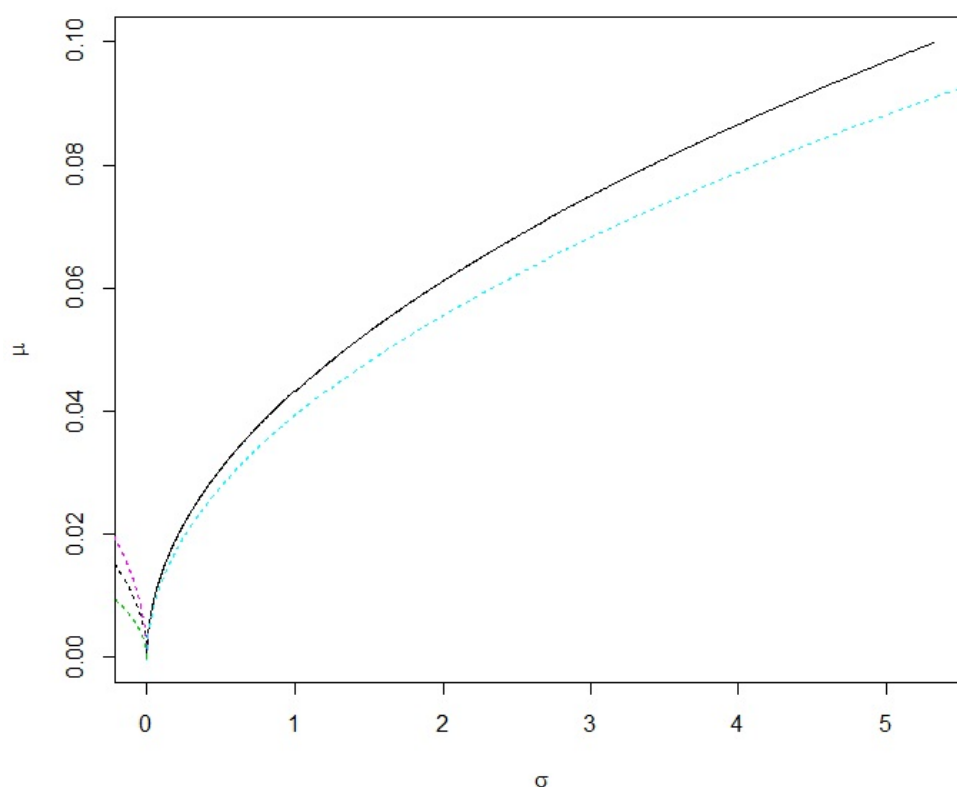


Figura 4.17: Comportamento erratico della frontiera efficiente non distorta rispetto alla frontiera campionaria stimata sul maggior numero di osservazioni

Il grafico 4.17 rappresenta la frontiera efficiente campionaria (in nero continuo) e quelle efficienti non distorte per il portafoglio di sette titoli per tre diversi sotto-campionamenti (in viola per 1000 osservazioni, in celeste per 1400 ed in verde per 1800) e per gli otto anni (in nero tratteggiato). Si può notare che al crescere

della dimensione campionaria la frontiera non distorta non sempre si avvicina alla frontiera efficiente campionaria: per 1000 osservazioni la frontiera di Bodnar e Bodnar assume il comportamento anomalo, poi per 1400 ha la posizione corretta ed, infine, per 1800 e tutte le 2056 ha di nuovo il comportamento anomalo. Inoltre l'immagine testimonia nuovamente l'elevata frequenza delle situazioni in cui il comportamento della frontiera non distorta è anomalo.

#### 4.3.4 Intervalli di confidenza per la frontiera efficiente

Infine è interessante ragionare in termini di stima intervallare per la frontiera efficiente, cioè costruire un intervallo di confidenza per la frontiera campionaria e verificare se quella proposta da Bodnar e Bodnar ricade all'interno dell'intervallo. In tal caso se sottoponessimo a verifica d'ipotesi le due frontiere potremmo concludere che esse sono statisticamente simili e quindi usare la frontiera non distorta non da alcun vantaggio pratico, viceversa è preferibile seguire l'approccio di Bodnar e Bodnar.

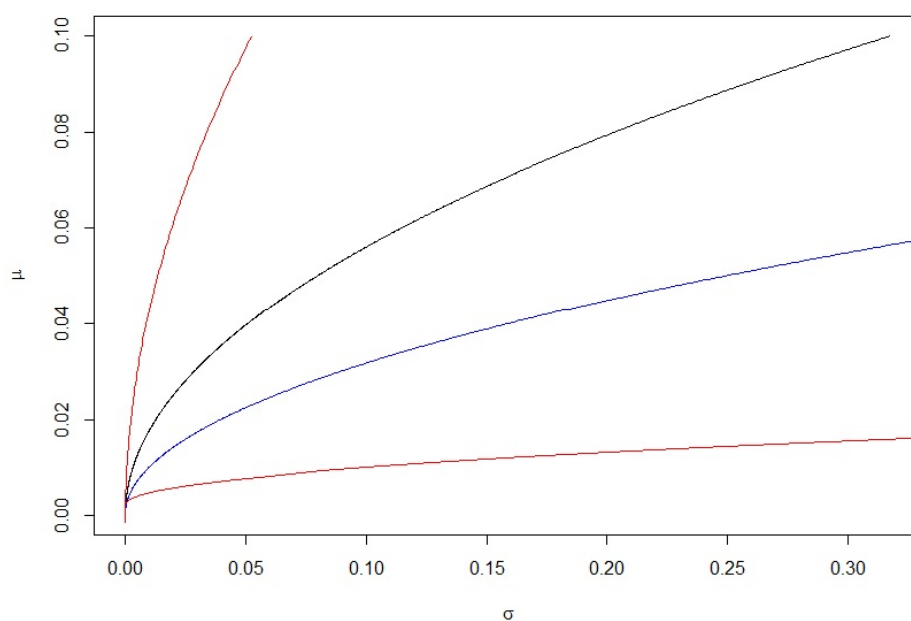


Figura 4.18: Intervallo di confidenza per il portafoglio formato da tre titoli

Il grafico 4.18 raffigura gli intervalli di confidenza per la frontiera efficiente classica (in rosso), la frontiera efficiente campionaria (in nero) e quella non distorta (in blu), per il portafoglio composto dai tre titoli Fiat, Eni ed Unicredit per le prime 98 osservazioni del 2006, lo stesso usato per analizzare la sensibilità della frontiera non distorta 4.11. Gli intervalli sono stati ottenuti con la tecnica di ricampionamento bootstrap con un valore di 5000 ricampionamenti ed il livello di confidenza è del 95%.

Si può notare che la frontiera efficiente proposta da Bodnar e Bodnar appartiene all'intervallo di confidenza per la frontiera efficiente campionaria, per tale ragione, in questo caso, si ottengono risultati statisticamente comparabili.

Ripetendo l'analisi per il portafoglio Fiat-Eni-Unicredit su di un numero maggiore di osservazioni si perviene ai medesimi risultati: in tutti i casi analizzati la frontiera efficiente di Bodnar e Bodnar ricade all'interno dell'intervallo di confidenza.

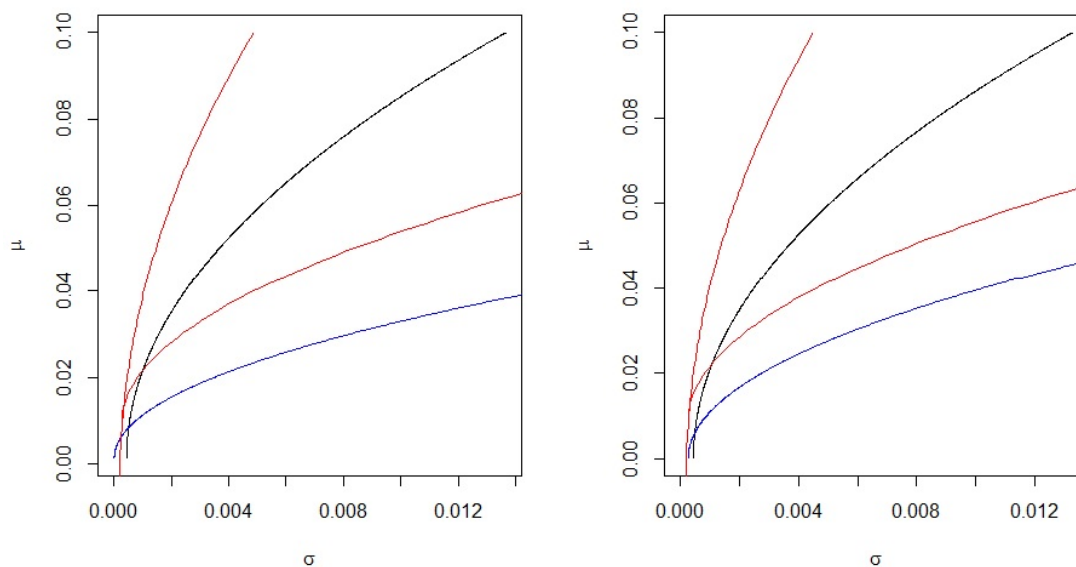


Figura 4.19: Intervallo di confidenza per il portafoglio formato da sette titoli (rendimenti mensili)

Tuttavia analizzando i rendimenti mensili, la frontiera efficiente di Bodnar e Bodnar non si trova nell'intervallo di confidenza. Ad esempio, per due diversi campionamenti del portafoglio composto da sette titoli, si ottengono i due grafici in figura 4.19, dai quali è evidente che la frontiera efficiente proposta da Bodnar e Bodnar (sempre in blu), non è all'interno dell'intervallo di confidenza per la frontiera efficiente classica. Questo comportamento della frontiera efficiente di Bodnar e Bodnar per i rendimenti mensili, è molto frequente e non va considerato un'anomalia, perché appunto si verifica nella quasi totalità dei casi analizzati, evidenziando quanto affermato da Bodnar e Bodnar sulla sovrastima della frontiera efficiente da parte dell'approccio classico. Si può, quindi, ipotizzare che il verificarsi dell'ipotesi di distribuzione normale per i soli rendimenti mensili abbia un effetto positivo nel convalidare l'approccio di Bodnar e Bodnar.

L'efficacia operativa dell'uso della frontiera efficiente non distorta è quindi limitata all'analisi su rendimenti mensili, mentre per quelli giornalieri l'uso di una al posto dell'altra non dà differenze significative dal punto di vista statistico, ed è quindi preferibile usare gli stimatori classici a causa della loro semplicità.

---

## CONCLUSIONI

---

L'analisi empirica delle serie storiche dei rendimenti logaritmici permette di giungere a conclusioni piuttosto chiare.

In primo luogo si è accertato che una delle ipotesi cardine della teoria finanziaria classica (quella di distribuzione normale dei rendimenti) non sempre è verificata: per i rendimenti giornalieri, anzi, non ha alcun riscontro, mentre per quelli mensili non sempre è accertata. In ogni caso, anche quando l'ipotesi nulla di normalità può essere accettata, le stime campionarie dell'eccesso di curtosi restituiscono valori superiori a zero, confermando la letteratura in merito ad una distribuzione più o meno leptocurtica.

In secondo luogo, è emersa l'importanza del coefficiente di correlazione lineare tra i rendimenti dei titoli  $\rho$  e del numero dei titoli  $k$  per migliorare le performance di portafoglio, nella misura in cui, a parità di ogni altra condizione, al crescere di  $k$  il rischio del portafoglio diminuisce (spesso notevolmente), mentre all'aumentare di  $\rho$  esso tende a crescere in modo considerevole. Il ruolo della lunghezza delle serie storiche  $n$  sembra, invece, essere ridimensionato: infatti il rendimento del portafoglio risulta maggiormente legato al ciclo macroeconomico ed in generale all'andamento dei mercati finanziari; in altri termini, a parità di ogni altra condizione, quando i mercati dei capitali hanno cattive performance (nei dati analizzati specialmente dal 2007-2008 al 2011) i risultati del portafoglio, prevedibilmente, ne risentono. Va in ogni caso mantenuto un principio di matching tra l'ottica del periodo di investimento e la lunghezza delle serie storiche usate per la stima: non ha senso infatti per investimenti di breve termine stima-

re frontiere efficienti su dati decennali o ventennali, come non ha senso fare il contrario.

Queste prime considerazioni sono applicabili sia alle stime della frontiera efficiente basata sugli stimatori classici, sia su quella basata sugli stimatori non distorti proposti da Bodnar e Bodnar. Relativamente a questa ultima, se ne possono aggiungere altre.

Innanzitutto, oltre al rifiuto dell'ipotesi di distribuzione normale dei rendimenti (comune ad entrambi i modelli), bisogna rigettare anche quella di distribuzione indipendente dei rendimenti.

In secondo luogo, gli stimatori non distorti proposti da Bodnar e Bodnar provocano molto spesso un comportamento anomalo della frontiera efficiente, facendole assumere una posizione speculare (rispetto all'asse delle ordinate) a quella che dovrebbe avere. Le analisi testimoniano come questa anomalia sia fortemente influenzata dal valore limite di  $s$  (3.14) ed inoltre renda la frontiera stimata con il modello di Bodnar e Bodnar estremamente sensibile: una variazione anche minima del campione osservato, fa mutare radicalmente la posizione della frontiera. Tuttavia si è notato che, per i rendimenti giornalieri, al crescere del numero dei titoli  $k$ , la frequenza del comportamento anomalo diminuisce, restando comunque elevata per un numero alto di osservazioni  $n$ .

In terzo luogo, la frontiera efficiente non distorta tende asintoticamente a quella campionaria classica: cioè per un numero di osservazioni  $n$  che cresce, la distanza tra le due frontiere diminuisce; così come diminuisce al diminuire del numero dei titoli  $k$ . Questo risultato è concorde anche con gli studi precedenti in materia, tra cui quelli di Siegel e Woodgate.

Infine, per quanto riguarda la stima intervallare, si osserva che, per i rendimenti giornalieri, la frontiera efficiente non distorta ricade dentro l'intervallo di confidenza per quella efficiente classica, mentre per quelli mensili la frontiera proposta da Bodnar e Bodnar non vi ricade. Per i rendimenti giornalieri, quindi,

le due frontiere sono statisticamente simili tra loro; viceversa per quelli mensili l'uso della frontiera classica al posto di quella non distorta implica una sottostima del rischio o, allo stesso modo, una sovrastima del rendimento.

Nonostante quindi gli stimatori classici della frontiera efficiente siano realmente distorti, l'uso di stimatori non distorti è segnato da luci ed ombre, con il prevalere delle ultime sulle prime. La non corrispondenza delle ipotesi dei modelli con la realtà empirica, il comportamento anomalo e quello asintotico della frontiera efficiente proposta da Bodnar e Bodnar ed infine la stima intervallare sembrano testimoniare un modello che, seppur partendo da buone basi (la distorsione degli stimatori classici), per i rendimenti giornalieri ha un'efficacia decisamente limitata, mentre per quelli mensili deve essere ulteriormente sviluppato ed approfondito.

---

## BIBLIOGRAFIA

---

- [1] E.FAMA, *Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work*, Journal of Finance 1970
- [2] G. TREVISAN, *Economia e Politica dell'Agricoltura*, ed. Cafoscarina 2000
- [3] L. BACHELIER, *Théorie de la Spéculation*, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure 1900
- [4] F. MICHIELI, *Un approccio critico agli indicatori finanziari di rischio e rendimento*, Tesi di laurea triennale 2013
- [5] J. TOBIN, *Liquidity Preference as Behavior Towards Risk*, Review of Economic Studies 1958
- [6] M. ROZEFF - W. KINNEY, *Capital market seasonality: the case of stock returns*, Journal of Financial Economics 1976
- [7] S. BOUMAN - B. JACOBSEN, *The Halloween Indicator, Sell in May and Go Away: Another Puzzle*, The American Economic Review 2002
- [8] B. J. JACOBS - K. N. LEVY, *Calendar Anomalies: Abnormal Returns at Calendar Turning Points*, Financial Analysts Journal 1988
- [9] M. STATMAN, *How Many Stocks Make a Diversified Portfolio?*, Journal of Financial and Quantitative Analysis 1987
- [10] M. ALLAIS, *Le Comportement de l'homme rationnel devant le risque: critique des postulats et axiomes de l'école américaine*, Econometrica 1953

- 
- [11] D. KAHNEMAN - A. TVERSKY, *Prospect Theory: An Analysis of Decision Under Risk*, *Econometrica* 1979
- [12] D. KAHNEMAN - A. TVERSKY, *Judgement under uncertainty: Heuristics and Biases*, *Science* 1974
- [13] A.F. SIEGEL - A. WOODGATE, *Performance of Portfolios Optimized with Estimation Error*, *Management Science* 2007
- [14] O. BODNAR - T. BODNAR, *On the unbiased estimator of the efficient frontier*, *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 2010
- [15] B. MANDELBROT, *The Variation of Certain Speculative Prices*, *The Journal of Business* 1963
- [16] E. FAMA, *Foundations of Finance*, *Basic Books* 1976