



Università
Ca' Foscari
Venezia

Corso di Laurea magistrale
(ordinamento ex D.M. 270/2004)
Economia e Gestione delle aziende

Tesi di Laurea

La metodologia DEA nell'analisi dell'efficienza
delle unità produttive.

Il caso Pittarosso Service S.p.A.

—
Ca' Foscari
Dorsoduro 3246
30123 Venezia

Relatore

Ch.ma Prof.ssa Daniela Favaretto

Correlatore

Ch.ma Prof.ssa Paola Ferretti

Laureando

Davide Venturato

Matricola 833539

Anno Accademico

2014 / 2015

Indice

Introduzione	1
Capitolo 1: Sistemi di misurazione delle performance aziendali	2
1.1 - Situazione attuale ed iniziative.....	2
1.2 - Dal modello contabile ai modelli a valore.....	4
1.3 - Excursus storico dei framework.....	6
1.4 - Produttività ed efficienza.....	14
1.5 - Teoria della produzione ed indicatori di Farrell.....	17
1.6 - Stima dell'efficienza tecnica nei modelli parametrici e non-parametrici.....	19
1.7 - Approcci di frontiera.....	20
1.7.1 - Approccio non-parametrico.....	22
1.7.2 - Approccio parametrico.....	24
1.7.3 - Stima di frontiere deterministiche.....	25
1.7.4 - Stima di frontiere stocastiche.....	25
1.7.5 - Valutazione comparativa.....	26
Capitolo 2: La metodologia DEA	27
2.1 - Evoluzione storica.....	27
2.2 - Multi-input e Multi-output.....	32
2.3 - Modelli base.....	33
2.4 - Modelli input-oriented e output-oriented.....	33
2.5 - Scelta del modello.....	36
2.6 - Modello CCR.....	37
2.7 - Production Possibility Set.....	42
2.8 - Estensione del modello: il problema duale.....	43
2.9 - Efficienza forte e variabili di scarto.....	46
2.10 - CCR output-oriented.....	48
2.10.1 - Le diverse tecnologie.....	51
2.10.2 - Tecnologia un input – un output.....	52
2.10.3 - Tecnologia due input – un output.....	55
2.10.4 - Tecnologia due output – un input.....	59
2.11 - Input e output slack.....	61

2.12 - Modello BCC.....	62
2.12.1 - Modello BCC: input-oriented.....	65
2.12.2 - Modello BCC: output-oriented.....	66
2.13 - Il modello Additivo.....	67
2.14 - Il modello Moltiplicativo.....	69
2.15 - Vantaggi e svantaggi della metodologia DEA.....	70
Capitolo 3: Applicazione al caso Pittarosso Service S.p.A.	73
3.1 - Le fasi dell'analisi.....	74
3.2 - Interpretazione dei risultati.....	75
3.3 - Analisi delle performance.....	76
3.4 - L'analisi DEA-CCR.....	83
3.5 - Scomposizione dell'efficienza.....	90
3.6 - Super-efficienza.....	93
Conclusioni	100
Bibliografia	102
Sitografia	106

INTRODUZIONE

Una delle principali sfide che ogni organizzazione deve affrontare per assumere o mantenere un ruolo di leadership nel proprio core business consiste nel saper misurare e valutare le performance aziendali in rapporto ai propri obiettivi strategici.

Data la natura sempre più mutevole ed incerta del contesto competitivo, le aziende sono chiamate a cambiamenti ed innovazioni a livello strategico, operativo e gestionale. Il processo di innovazione risulta essere un fattore critico di successo da applicare ai processi aziendali, che devono configurarsi come efficaci ed efficienti per poter supportare le strategie organizzative. Di fondamentale importanza è quindi l'allineamento dei processi di business alle strategie aziendali volto a garantire all'impresa un duraturo vantaggio competitivo. Negli anni sono stati sviluppati numerosi modelli per la valutazione delle performance con lo scopo di conferire al management una visione complessiva dell'operato aziendale e nel guidarlo nella realizzazione di processi continuamente più integrati ed allineati agli scopi aziendali.

In questo elaborato verrà descritta ed analizzata la metodologia DEA come strumento di analisi dell'efficienza produttiva delle business unit aziendali.

La tesi tratta un caso pratico applicativo con lo scopo di elaborare un modello empirico in grado di stimare un indice di produttività ed analizzarne le variazioni lungo un arco temporale pluriennale. L'analisi è stata coadiuvata dal tirocinio formativo svolto presso l'azienda Pittarosso Service S.p.A.

Nel capitolo 1 viene proposto un excursus storico riguardante lo sviluppo dei principali modelli di valutazione delle performance aziendali incentrato sulle metodologie che hanno rivoluzionato l'analisi dei sistemi di controllo.

Nel capitolo 2 si espone la metodologia DEA e le sue molteplici varianti ed estensioni sviluppate nel corso degli anni.

Nel capitolo 3 viene trattata l'applicazione della metodologia nell'analisi dell'efficienza dei punti vendita dell'azienda Pittarosso Service S.p.A., industria operante nel settore del retail calzaturiero nazionale ed internazionale.

CAPITOLO 1

SISTEMI DI MISURAZIONE DELLE PERFORMANCE AZIENDALI

1.1 – Situazione attuale ed iniziative

L'attuale contesto economico è caratterizzato da un andamento evolutivo frenetico ed incessante, le imprese che non sono state in grado di adeguare i propri standard assumono oramai ruoli marginali nel mercato o addirittura ne sono estromesse.

Le entità economiche in grado di cogliere le opportunità e di innovarsi, di ripensare alle regole dell'ingaggio competitivo, di intraprendere nuove strade ed apportare correttivi e miglioramenti ai processi produttivi hanno trovato in questo contesto terreno fertile per la propria crescita.

La relazione fra competitività e performance aziendale, elemento cardine dello sviluppo economico, si fonda sul concetto che idonei strumenti di valutazione consentono all'impresa di mantenere il proprio vantaggio competitivo e di creare valore: è necessario attivare all'interno dell'organizzazione un sistema di misurazione delle performance, idoneo a valutare i risultati specifici e, se possibile, gli impatti sulle performance aziendali, di norma sintetizzate da quelle economico-finanziarie.

“Il successo di un'azienda si esprime nella ricerca di un'integrazione profonda ed efficiente delle attività svolte dalle diverse unità organizzative verso il miglioramento globale dell'offerta dei prodotti e dei servizi al cliente/utente.

La capacità di raggiungere e sostenere nel tempo il successo richiede, pertanto, il miglioramento continuo di tutte le attività e di tutti i processi gestionali e non soltanto delle componenti materiali e tangibili del servizio che viene proposto al cliente”.

[Brimson e Antos, 1994]

L'attenzione verso la misurazione della performance, tematica fortemente sviluppatasi nell'ultimo decennio, assume una prospettiva d'impresa come organizzazione economica qualificata dall'intento di misurare le performance dei propri processi produttivi.

I sistemi di controllo e misurazione hanno subito un'intensificazione nell'importanza e nella centralità, divenendo una determinante nella creazione e nel mantenimento del

vantaggio competitivo dell'impresa. "Questi sono strumenti il cui scopo non è fotografare fedelmente e con esattezza la realtà economica, quanto piuttosto i processi che, se correttamente progettati ed implementati, possono influenzare in maniera virtuosa i comportamenti degli individui e dei gruppi, indirizzandoli al conseguimento delle finalità istituzionali"¹. Le misure delle performance risulterebbero una inutile applicazione delle tecniche di misurazione se, chi opera e chi gestisce l'azienda, una volta rilevate, non le utilizzasse per far convergere gli sforzi e le energie dell'intera organizzazione al conseguimento degli obiettivi prefissati. Ad oggi la misurazione delle performance aziendali è una pratica ormai consolidata: un efficace sistema di misurazione "consente di prendere decisioni e di intraprendere azioni in quanto in grado di quantificare l'efficienza e l'efficacia di azioni passate attraverso l'acquisizione, la raccolta, la selezione, l'analisi, l'interpretazione e la divulgazione di dati appropriati"². Questa definizione riveste una particolare importanza, identificando gli elementi costitutivi di un sistema di misurazione:

- singole misure che quantificano l'efficienza e l'efficacia delle attività;
- un insieme di misure combinate che contribuisce a valutare la performance di un'organizzazione nella sua totalità;
- un'infrastruttura di supporto per effettuare operazioni di acquisizione, raccolta, selezione, analisi, interpretazione e divulgazione dei dati.

Per ottenere la massima efficienza dall'intero processo è altrettanto necessario che ogni business unit incrementi l'affidabilità, la precisione e l'adeguatezza dell'attività di misurazione a ciascuno di questi livelli.

¹ Antonella Cifalindò, 2012

² Neely, 2001

1.2 - Dal modello contabile ai modelli a valore

I modelli di valutazione delle performance basati sui dati contabili e sui parametri economico-finanziari furono sviluppati negli anni '30, per poi essere successivamente impiegati negli anni '90, con l'introduzione del modello di creazione di valore (EVA – Economic Value Added) ed il modello del reddito residuale (RIM – Residual Income Model). L'impiego dei modelli di valutazione basati sui dati contabili ha evidenziato come la qualità dell'informazione contabile rappresenti un aspetto importante nella determinazione del risultato del processo di valutazione. Questi modelli avevano il pregio di poter utilizzare un linguaggio contabile e la semplicità nel quantificare ed interpretare i risultati aziendali. L'utilizzo dei soli parametri economico-finanziari aveva tuttavia dei limiti relativi alla prospettiva di analisi, che non considerava la variabile rischio e l'orientamento di breve periodo.

La parzialità della rappresentazione è infatti una caratteristica intrinseca del modello contabile: non tutti i fatti rilevanti relativi ad un'azienda sono colti in modo soddisfacente in quanto le rilevazioni contabili rappresentano in modo parziale le dinamiche di un sistema³. L'inadeguatezza dei risultati contabili a rappresentare la performance complessiva di un'azienda è inoltre riconducibile all'omissione dei fattori intangibili delle attività aziendali, di cui il modello non è in grado di coglierne correttamente le dinamiche di creazione o di consumo⁴. Inoltre il modello contabile si basa sull'attendibilità del bilancio (condizionata dalla correttezza delle misure contabili) e non considera l'evoluzione del sistema aziendale: l'esperienza, la crescita del personale ed il valore del capitale umano.

Tali limiti non influenzavano la “qualità” della misurazione della performance, poiché gli asset principali che in quegli anni guidavano l'acquisizione di un vantaggio competitivo erano impianti, attrezzature, macchinari e terreni; tutti elementi rappresentati in modo appropriato nel capitale di funzionamento.

Il modello contabile perse la sua affidabilità quando cambiarono i criteri più significativi nel determinare e nello spiegare il raggiungimento della condizione di economicità: aumentò l'incidenza dei fattori intangibili, quali il know-how, il capitale intellettuale ed il capitale relazionale. Questi, consensualmente all'incremento del livello di concorrenza, correlato alla diminuzione dei mercati protetti ed alla globalizzazione dei mercati, indusse

³ Cfr. Zappa G., 1939

⁴ Cfr. Onida P., 1951

le aziende a sostenere un incremento dei rischi, a livello di incertezza e di variabilità dei risultati. Il modello contabile si dimostrò inadeguato nell'analisi di fattori come la perdita di competitività, il ritardo tecnologico ed il fallimento innovativo, oltre a non ponderare il risultato di periodo con la sua rischiosità.⁵

Il modello contabile inoltre non contestualizzava temporalmente i risultati aziendali: trattava allo stesso modo i flussi di risultato a manifestazione attuale e quelli a manifestazione futura⁶, a differenza del modello del valore che li "corregge" attraverso il tasso di attualizzazione.

Questi limiti vennero superati ponendo al centro dei modelli di valutazione delle performance il concetto di *valore economico*, che si fonda sui flussi futuri di risultato e che considera il momento temporale in cui si manifestano ed il livello del rischio associato ai flussi stessi⁷. Anche il modello del valore non è però esente da limiti, tra i quali i principali sono⁸: l'unicità della prospettiva, che mira a massimizzare la ricchezza degli azionisti, le ipotesi relative al tasso di attualizzazione, l'individuazione dei flussi di risultato per singolo periodo e le problematiche misurazioni del valore residuo.

Nel modello a valore si pone maggiore attenzione agli eventi operativi rispetto a quelli amministrativi e si passa dalla base dati contabile all'area dei sistemi direzionali; questi permettono l'attento monitoraggio di quanto accade quotidianamente all'interno dell'azienda e del suo ambiente di riferimento. Il passaggio verso adeguati sistemi di misurazione della performance deve evolvere verso un sistema di indicatori, a supporto del processo decisionale (operativo e strategico), coerente con la formula imprenditoriale e finalizzato a monitorare, nel breve come nel lungo periodo, il perseguimento degli obiettivi stabiliti dalla direzione aziendale.

Le determinanti del vantaggio competitivo, pur essendo riconducibili a schemi interpretativi di tipo generale, risentono delle peculiarità di ciascuna realtà economica. Le variabili devono essere specificate in modo da rendere evidente le relazioni intercorrenti tra cause (decisioni e azioni) ed effetti (valori assunti dalle determinanti del valore o value driver) e collegare quest'ultimi con i processi di generazione del valore. L'identificazione dei driver, l'esplicitazione tramite parametri e indicatori, e il loro monitoraggio sono elementi fondamentali per verificare e gestire il valore.

⁵ Cfr. Invernizzi G., Molteni M., 1991

⁶ Cfr. Buttignon F., 1990

⁷ Cfr. Bozzolan S., 2001

⁸ Cfr. Invernizzi G., Molteni M., 1991; Guatri L., 1998; Olivotto L., 2000

Nella costruzione dei modelli per la misurazione della performance si mira a definire nuove misure in grado di coniugare i risultati consuntivi con i risultati prospettici, al fine di porre attenzione sia al breve che al medio lungo termine. Lo scopo finale è identificare e misurare, integrando indicatori finanziari con indicatori non finanziari, le variabili determinanti del vantaggio competitivo indispensabili per il raggiungimento di una performance di successo.

L'importanza delle variabili non finanziarie è aumentata fino ad assumere un ruolo complementare a quelle finanziarie, arrivando al paradosso che, talvolta, il modo migliore per guidare un'azienda verso il raggiungimento di determinati risultati economico-finanziari sia quello di non avere tra i propri parametri obiettivo quelli economico-finanziari⁹.

1.3 – Excursus storico dei framework

Nell'ultimo ventennio si è assistito ad una rivoluzione nella diffusione dei modelli di controllo delle performance aziendali. Un enorme interesse per la misurazione si è manifestato sia nelle conferenze e pubblicazioni dei professionisti del settore sia nelle ricerche accademiche¹⁰. Numerosi framework per la progettazione e l'implementazione dei sistemi di misurazione sono stati proposti con l'obiettivo di definire ed analizzare un insieme di misure che riflettano gli obiettivi di un'organizzazione aziendale, per valutarne il rendimento e la coerenza dell'operato.

⁹ Cfr. Epstein M.J., Birchard B., 2000

¹⁰ Cfr. Neely, 1998

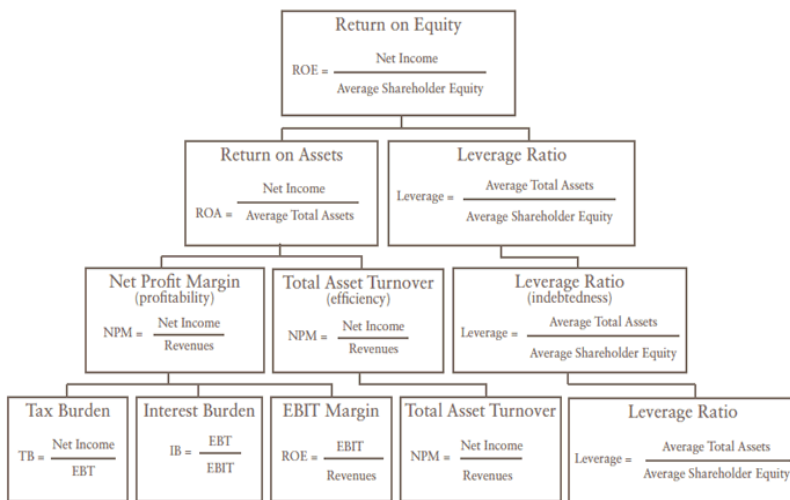
Figura 1.0: *Elenco storico dei principali framework e modelli per la misurazione delle performance*

<i>Name of the model/framework</i>	<i>Period of introduction</i>
The ROI, ROE, ROCE and derivates	Before 1980
The economic value added model (EVA)	1980
The activity based costing (ABC) – the activity based management (ABM)	1988
The strategic measurement analysis and reporting technique (SMART)	1988
The supportive performance measures (SPA)	1989
The customer value analysis (CVA)	1990
The performance measurement questionnaire (PMQ)	1990
The results and determinants framework (RDF)	1991
The balanced scorecard (BSC)	1992
The service-profit chain (SPC)	1994
The return on quality approach (ROQ)	1995
The Cambridge performance measurement framework (CPMF)	1996
The consistent performance measurement system (CPMS)	1996
The integrated performance measurement system (IPMS)	1997
The comparative business scorecard (CBS)	1998
The integrated performance measurement framework (IPMF)	1998
The business excellence model (BEM)	1999
The dynamic performance measurement system (DPMS)	2000
The action-profit linkage model (APL)	2001
The manufacturing system design decomposition (MSDD)	2001
The performance prism (PP)	2001
The performance planning value chain (PPVC)	2004
The capability economic value of intangible and tangible assets model (CEVITA)	2004
The performance, development, growth benchmarking system (PDGBS)	2006
The unused capacity decomposition framework (UCDF)	2007

(fonte: P.Taticchi, A.Asfalti, F.Sole, 2010)

Uno dei primi modelli per la valutazione delle performance fu elaborato da DuPont all'inizio del XX secolo, basandosi sull'utilizzo di una piramide (la cosiddetta Piramide DuPont) che correlava un'ampia gamma di indici finanziari al ritorno dell'investimento. Seppure questo modello risultasse ancora primitivo e caratterizzato da numerosi limiti, aveva il pregio di disporre gli indici finanziari secondo una struttura gerarchica ben definita riuscendo a rapportare le misure ai differenti livelli organizzativi.

Figura 1.1: Piramide DuPont



(fonte: www.advisorperspectives.com)

Si configurò così una tecnica, basata sulla scomposizione del ROE, utile ad analizzare la redditività aziendale per mezzo di strumenti tradizionali di gestione delle performance. I pregi di questo primo modello furono la semplicità, la capacità di analisi dei cambiamenti e la possibilità di utilizzarlo per valutazioni benchmarking. Il presupposto sul quale si fondava il modello era tuttavia anche il suo maggior limite: basava l'analisi sui soli dati numerici contabili certi ed affidabili. Il lavoro di DuPont fu invero molto criticato, data l'inadeguatezza nel saper cogliere l'evoluzione del contesto competitivo e delle strategie aziendali. La sua focalizzazione sul costo tendeva a generare una visione storica poco indicativa dei percorsi evolutivi della performance futura, incoraggiando, di fatto, una visione di breve termine¹¹.

Il sistema di controllo e gestione delle prestazioni iniziò ad assumere un ruolo centrale nell'operato aziendale: si passò dall'utilizzarlo come una mera "fotografia" dei risultati

¹¹ Cfr. Bruns, 1998

aziendali al considerarlo un fattore cardine nella guida alle scelte strategiche future. La diretta necessità è che esso non fosse un sistema inerte ai cambiamenti, ma che evolvesse, dalle modellizzazioni tipicamente fondate su misure sintetiche di natura economico-finanziaria a quelle sistemiche, in grado di cogliere non solo l'effetto economico delle strategie ma anche le cause sottostanti, attraverso indicatori analitici dei processi aziendali.

Un secondo modello, sviluppato nel 1987 da Thomas Johnson e Robert Kaplan, a seguito di un'analisi approfondita sull'evoluzione dei sistemi di contabilità gestionale, constatò come l'utilizzo dei soli indicatori finanziari permettesse di valutare il risultato netto di un'impresa, senza tuttavia rilevare i reali cambiamenti del contesto competitivo e delle strategie aziendali. Questo ridimensionò quindi il lavoro di DuPont, il cui focus sui costi forniva una visione storica delle performance, in mancanza di informazioni o previsione su quelle future. Si decretò pertanto come fallimentare l'utilizzo dei soli indicatori finanziari con l'effetto che molte aziende iniziarono proprio in quel periodo ad adottare congiuntamente nei propri modelli di controllo misure finanziarie e non finanziarie, per riflettere in maniera più adeguata gli obiettivi aziendali ed il loro conseguimento.

Nel 1988, venne proposta da Lynch e Cross la tecnica SMART (*Strategic Measurement and Reporting Technique*), sviluppata dai laboratori Wang.

Il modello basato sulla costruzione di una piramide (detta Performance Pyramid) costituì il primo tentativo di creare un sistema integrato di misurazione delle performance. Venne introdotto il concetto di "misure a cascata" lungo l'organizzazione aziendale con lo scopo di affermare che le misurazioni, a livello di business unit e di centro di lavoro, dovevano riflettere sia la visione aziendale che gli obiettivi interni ed esterni della singola strategic business unit (SBU).

Tale piramide era suddivisa in quattro livelli di misure e obiettivi finalizzati al conseguimento aziendale dell'efficacia esterna e dell'efficienza interna. Al vertice era posta la "visione" aziendale, proiezione futura degli ideali, dei valori e delle aspirazioni del management, identificata negli obiettivi di lungo termine. I livelli sottostanti erano composti dalle unità strategiche di business, dai sistemi operativi aziendali e dai dipartimenti e centri di lavoro.

Le ipotesi cardine del modello erano due: tutte le attività svolte sono correlate agli obiettivi e le singole misure sono definite in maniera tale che, in riferimento a queste, possano essere apportati miglioramenti, nello svolgimento dei processi aziendali, mirati al raggiungimento degli obiettivi prefissati.

Lo scopo prefissatosi da tale metodica era di tradurre la strategia aziendale nelle attività delle singole business unit tramite un sistema di obiettivi e misure. Si può infatti notare come il modello presentasse al proprio interno un doppio circuito: quello degli obiettivi e quello delle misure. Il primo era strutturato secondo una logica top-down, che procedeva verticalmente scendendo dal vertice aziendale e diffondendo le finalità strategiche all'interno delle strategic business unit, dai sistemi operativi fino alle singole unità organizzative. Il secondo al contrario procedeva dal basso verso l'alto, con l'individuazione delle misure prima al livello operativo, successivamente allo strategic business unit, fino al livello aziendale.

In tal modo era possibile la rilevazione del raggiungimento degli obiettivi da parte delle singole SBU e la valutazione della coerenza delle attività svolte con la strategia adottata.

Il primo modello teso alla ricerca di un bilanciamento delle misurazioni fu ideato nel 1989 da Keegan *et al.* (*The Supportive Performance Measures*). Questi propose una matrice per la valutazione delle performance che rifletteva la necessità di suddividere le misure in categorie, quali "internal" ed "external", "cost" e "non-cost", assegnando grande importanza al bilanciamento delle misurazioni lungo queste dimensioni. Il modello, seppur molto semplice, sottolineava come le misure dovessero essere basate su una conoscenza approfondita dei costi, delle loro relazioni e del loro comportamento; di conseguenza l'impresa poteva scegliere quale set di misure adottare e su quali porre il focus.

Nel 1990 fu sviluppato da Dixon *et al.* il "*The performance measurement questionnaire approach*", con lo scopo di creare un sistema di misurazione dinamico, in grado di cambiare le misurazioni consensualmente al modificarsi del contesto competitivo e strategico. Questo modello si rivelò uno strumento utile a valutare lo stato di un sistema di misurazione, ad identificare i miglioramenti necessari all'organizzazione e ad evidenziare l'esigenza di misurare nuove tipologie di performance. Il modus operandi prevedeva che i risultati raccolti venissero successivamente valutati da un team di esperti attraverso una serie di analisi: "analisi dell'allineamento strategico", per verificare la coerenza delle attività svolte con la strategia intrapresa, "analisi di congruenza", per valutare la capacità del sistema di analizzare il business, "analisi del consenso", per determinare l'effetto della comunicazione, ed infine "l'analisi della confusione",

per comprendere il consenso circa le aree di miglioramento individuate.

Nel 1991 Fitzgerald *et al.* proposero per il settore terziario un modello di suddivisione delle misure di performance in due tipologie: le “misure di risultato”, legate alla competitività e alle performance finanziarie, e le “misure determinanti”, relative alla flessibilità, all’utilizzo di risorse, all’innovazione e alla qualità del servizio offerto. Il modello si basava sul concetto di causalità, esplicitando come i risultati ottenuti (*misure di risultato*) fossero in funzione della precedente performance di business, con riferimento ad elementi determinanti specifici (*misure determinanti*).

Brown (1996) attraverso il “*Macro Process Model*” sviluppò ulteriormente il concetto di collegare le misure con relazioni di causa-effetto: introdusse un modello che evidenziava chiaramente la correlazione fra i cinque stadi del processo di business (Input, Processi, Output, Risultati e Goal) e le misure della loro performance. La teoria di Brown si basava sulla convinzione che ogni stadio rappresentava il driver della performance del successivo, dimostrando, ad esempio, come gli input dell’organizzazione condizionassero la performance dei processi fino agli stessi obiettivi aziendali.

I modelli esposti illustrano come il concetto generale di misurazione delle performance abbia subito negli anni numerose rivisitazioni e variazioni.

L’apice nella diffusione dei modelli di valutazione delle performance fu raggiunto nel 1996, quando Kaplan e Norton proposero la Balance Scorecard (BSC), una metodologia di controllo che permetteva di descrivere, attuare e gestire la strategia dell’intera organizzazione aziendale, traducendo la missione e la strategia in obiettivi e misure di performance.

La Balanced Scorecard partiva dal presupposto che utilizzare unicamente misure di tipo economico-finanziario su un PMS (Performance Measurement System) fosse riduttivo e limitativo, oltre che potenzialmente ingannevole, fornendo esclusivamente informazioni inerenti azioni già avvenute. Le misure finanziarie si limitavano a raccontare la storia delle attività patrimoniali tangibili; la Balanced Scorecard mise invece a disposizione una finestra sul valore creato dalle attività intangibili. La particolarità di questo approccio era che, nel sistema informativo a disposizione dell’organizzazione, si utilizzavano gli indicatori non finanziari congiuntamente alle misure finanziarie, precedentemente ritenute insufficienti a guidare e valutare il processo di creazione del valore futuro. Inoltre si ponevano a confronto obiettivi operativi a breve termine con quelli strategici a lungo

termine e si utilizzavano indicatori di performance esterni (relativi a clienti ed azionisti) ed interni (inerenti processi operativi, innovazione e crescita).

Il modello strutturava la visione e la strategia aziendale in quattro dimensioni:

- *prospettiva di performance finanziaria*: indica se l'implementazione dei piani e delle iniziative contribuisce effettivamente al miglioramento del profitto e se ciò avviene in accordo con le prospettive degli azionisti;

- *prospettiva di performance dei processi interni*: identifica i processi critici di successo in cui l'organizzazione deve eccellere al fine dell'implementazione della strategia;

- *prospettiva dei clienti*: orienta l'attività alla soddisfazione delle esigenze manifestate dalla clientela;

- *prospettiva di apprendimento e crescita*: identifica l'infrastruttura organizzativa (personale, tecnologia e procedure operative) che l'azienda deve predisporre per ottenere una crescita e dei miglioramenti nel lungo termine.

La Balanced Scorecard si dimostrò quindi un tool estremamente utile al conseguimento di una strategia unitaria, con la possibilità non solo di formulare la strategia aziendale a livello di management, ma anche di comunicarla ai livelli operativi col fine di incentivare l'allineamento delle iniziative individuali, organizzative ed interfunzionali verso la realizzazione di obiettivi comuni.

Concettualmente Kaplan e Norton sostennero che il pieno potenziale della Balanced Scorecard si sarebbe realizzato solo se un'organizzazione avrebbe collegato con chiarezza le sue misure identificando i propri driver della performance¹².

La grande notorietà e diffusione della BSC derivava dall'apparente facilità applicativa, che nascondeva tuttavia numerose insidie: era richiesto uno studio preliminare molto approfondito sui processi specifici di business al fine di determinare quali e quante misure potessero essere sufficienti per monitorare il raggiungimento degli intenti strategici.

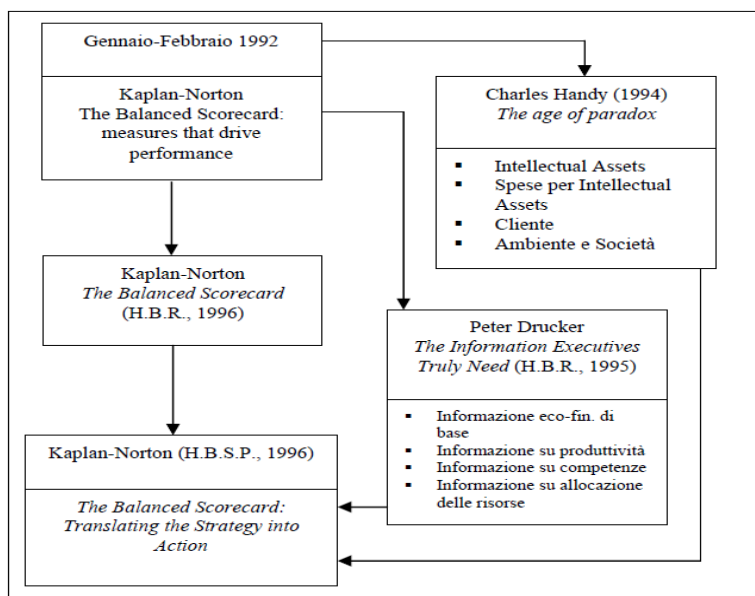
Recentemente, nel 2001, Neely e Kennerley proposero un nuovo modello, il cosiddetto "*Prisma della Performance*" con lo scopo di rispecchiare le caratteristiche ed affrontare le carenze delle strutture già sviluppate. L'assunto base consisteva nel definire quali

¹² Cfr. Kaplan e Norton, 1996-b

fossero gli stakeholder dell'impresa, e individuare fra questi quelli "critici".

Per molte imprese il concetto di stakeholder venne fatto combaciare a quello di shareholder, trascurando così molti dei portatori di interesse, fra cui clienti, dipendenti e fornitori. Il modello quindi accoglieva esplicitamente una prospettiva multistakeholder e si proponeva di identificare cinque prospettive inter-correlate di prestazioni: identificare i "key stakeholder", individuarne le attese, le strategie, i processi e le capacità da sviluppare. Le ultime tre sfaccettature evidenziavano la necessità di adottare strategie idonee a soddisfare le richieste degli stakeholder chiave, di implementare o migliorare i processi critici e di individuare le capacità da sviluppare per attivare, operare e migliorare detti processi. Se quindi la prima dimensione mirava al conseguimento della soddisfazione dello stakeholder, la quinta rifletteva la necessità delle aziende di massimizzare il contributo degli stakeholder a supporto delle loro attività. Per esempio, la soddisfazione del cliente è un obiettivo primario nella maggiore parte dei business, tuttavia all'impegno e alle risorse che l'azienda coinvolge in questo scopo deve esserci un corrispondente impegno della clientela sotto forma di lealtà e di profitto. Il Prisma delle Performance può essere utilizzato a qualsiasi livello organizzativo, sia in aziende integrate orizzontalmente che gerarchicamente. Gli autori sostengono che tale framework fornisce una rappresentazione equilibrata del business¹³, valutando sia le misure interne ed esterne sia l'integrazione fra misure finanziarie e non finanziarie.

Figura 1.2: Quadro evolutivo dei modelli sistemici di misurazione delle performance



(fonte: Bubbio A. (2000))

¹³ Cfr. Neely, 2002

1.4 – Produttività ed efficienza

Nella letteratura economica, i termini “produttività” ed “efficienza”, utilizzati per identificare l’abilità di un’impresa nella gestione delle risorse, sono spesso impiegati come sinonimi. In realtà questi esprimono concetti lievemente diversi e la loro misurazione può condurre ad indicatori associati a interpretazioni differenti.

“La misura dell’efficienza di un’unità produttiva può essere definita per confronto fra il processo di produzione effettivamente realizzato ed un altro processo, opportunamente scelto, corrispondente ad uno standard di ottimalità, che può avere valenza nel tempo e nello spazio”¹⁴.

La misurazione dell’efficienza può avvenire sia attraverso l’esame dell’evoluzione degli indicatori specifici, in una prospettiva *time series*, sia tramite il confronto dei medesimi indicatori con valori standard degli stessi, secondo una prospettiva *cross-section*.

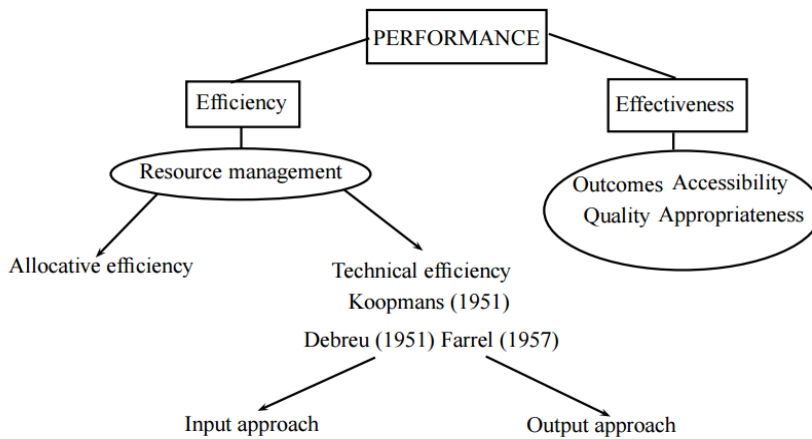
Nella realtà produttiva, dove ogni azienda impiega numerosi input per produrre uno o più output, la produttività rappresenta esattamente il rapporto fra la quantità di output ottenuta dalla produzione e la corrispondente quantità di input impiegata. Questa misura tuttavia, se presa singolarmente, non conferisce alcun giudizio in merito all’efficienza produttiva, necessitando di un’analisi benchmarking nei confronti di comparabili aziende.

La produttività viene influenzata da vari aspetti quali le differenti tecnologie di produzione, il tipo di processo produttivo e l’ambiente nel quale la produzione viene realizzata. Data quindi la complessità nel valutare e considerare tutte le variabili, in questo lavoro si intende analizzare la sola componente dell’efficienza per misurarne il contributo alla produttività.

Per efficienza produttiva si intende la potenzialità di una tecnica produttiva di minimizzare la quantità di risorse utilizzate o i costi di produzione.

¹⁴ Petretto, 1986

Figura 1.3: Elementi compositivi della performance: l'efficienza e l'efficacia



(fonte: Porcelli F., 2009)

L'efficienza è però solo una componente delle prestazioni complessive, come esposto in Figura 1.3.

“Un’analisi completa della performance aziendale comporta, oltre che alla misurazione dell’efficienza, anche la misurazione dell’efficacia e della capacità del sistema di raggiungere i programmi e gli obiettivi politici in termini di risultato, accessibilità, qualità ed adeguatezza”¹⁵.

Prima di esporre il contenuto dell’analisi è opportuno definire entrambi i concetti di efficienza:

- *efficienza tecnica (o produttiva)*: capacità di ottimizzare il livello dell’output partendo da un set determinato e limitato di input, dato il rapporto di sostituzione fra tali input.

Nella letteratura sono due le principali definizioni di “efficienza tecnica”:

- I. Secondo Koopmans (1951) “un produttore è tecnicamente efficiente se può aumentare la produzione di un output solo riducendo la produzione di almeno un altro output o aumentando l’impiego di almeno un input e se può ridurre l’impiego di un input solo aumentando l’impiego di almeno un altro input o riducendo la produzione di almeno un output”.

¹⁵ Worthington e Dollery, 2000

II. Secondo Debreu (1951) e Farrell (1957), la cui definizione di efficienza tecnica è nota come la “misura Debreu-Farrell”: l’efficienza orientata all’input viene definita come il complemento a uno della massima riduzione equi-proporzionale di tutti gli input che permette di produrre un livello prefissato di output. In modo analogo può essere definita anche la misura di efficienza orientata all’output. Concretamente ciò significa che il valore unitario indica la perfetta efficienza tecnica, mentre un valore inferiore all’unità indica un problema di inefficienza.

- *efficienza allocativa (o gestionale)*: capacità di combinare input e output nella proporzione ottima, dati i prezzi e la tecnologia a disposizione. Rispeschia l’abilità di un’impresa nel massimizzare l’output del processo dati i risparmi ottenuti sul mercato (sia nei processi di acquisto di input che di vendita di output), che hanno permesso di ottenere a parità di mezzi monetari più risorse.

Da un punto di vista teorico, la spiegazione di una mancata convergenza fra comportamenti effettivi e comportamenti potenzialmente ottimi risiede in problemi di inefficienza tecnica e/o allocativa. Da un punto di vista pratico la difficoltà consiste invece nella definizione empirica delle potenzialità massime di output e minime di input con cui confrontare i rispettivi livelli effettivamente osservati (difficoltà attenuata dall’utilizzo di metodi non parametrici nella valutazione della frontiera efficiente). Entrambe queste due difficoltà sono acuite dalla natura multi-prodotto delle imprese.

Nel contesto della valutazione dell’efficienza e dell’inefficienza tecnica di un’unità produttiva è possibile approfondire l’analisi considerando il tipo di rendimento di scala caratterizzante la tecnologia impiegata dall’impresa, come esposto da Färe, Grosskopf e Lovell (1985).

1.5 - Teoria della produzione ed indicatori di Farrell

L'efficienza tecnica consiste nella capacità di massimizzare la quantità prodotta attraverso i fattori produttivi a disposizione, ovvero nell'abilità a minimizzare la quantità di input necessaria per produrre una prefissata quantità di output. In questo senso, l'efficienza tecnica può essere orientata all'aumento dell'output (*output approach*) o alla riduzione dell'input (*input approach*).

Per agevolare la discussione è utile utilizzare la seguente notazione:

- $x = (x_1, \dots, x_n) \in R_+^n$ è il vettore input
- $y = (y_1, \dots, y_m) \in R_+^m$ è il vettore output

La tecnologia produttiva utilizzata può essere rappresentata attraverso un cluster di input:

- $L(y) = \{x: (x, y) \in \text{insieme delle possibilità produttive}\}$

$L(y)$ per ogni $y \in R_+^m$, possiede un isoquante corrispondente a:

- $\text{Isoq}L(y) = \{x: x \in L(y), kx \notin L(y), k \in [0,1)\}$

Può quindi essere definita la misura Debreu-Farrell orientata agli input come segue:

$$DF_I(x, y) = \min\{k: kx \in L(y)\}$$

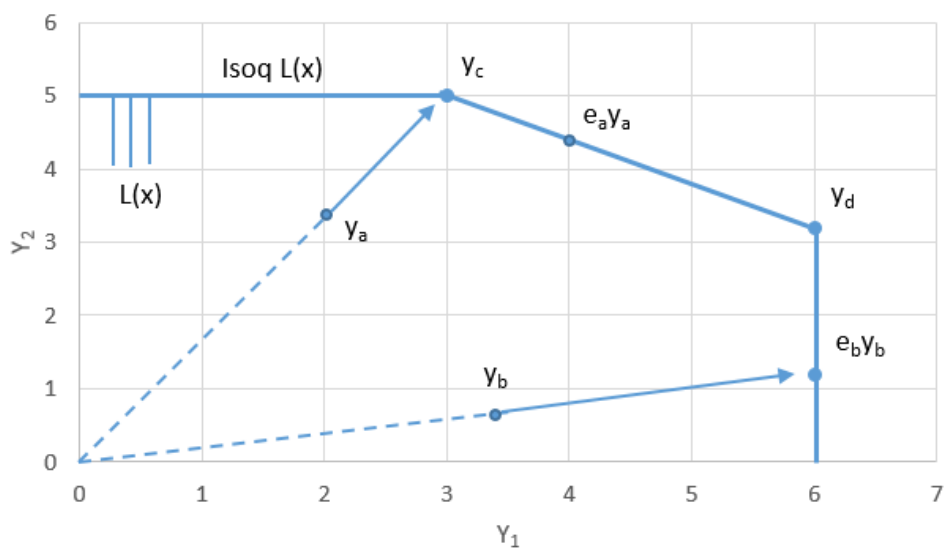
Da cui segue che $DF_I(x, y) \leq 1$, dove il valore 1 indica la presenza di efficienza tecnica, poiché non è possibile alcuna riduzione equi-proporzionale degli input. Un valore inferiore all'unità evidenzia invece la presenza di inefficienza tecnica.

In modo del tutto analogo può essere definita la misura Debreu-Farrell orientata agli output:

$$DF_O(x, y) = \max\{e: ey \in L(x)\}$$

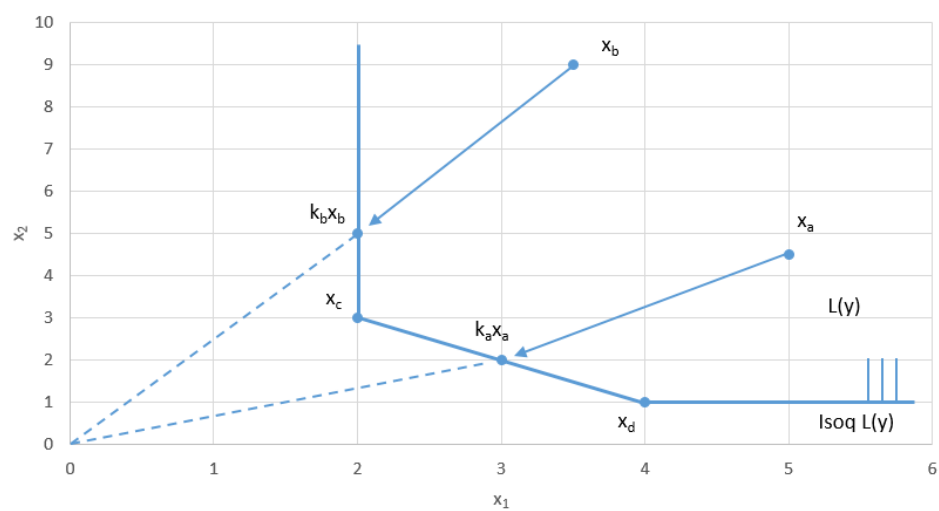
Le due situazioni vengono di seguito graficamente rappresentate:

Figura 1.4: Debreu-Farrell output-oriented efficiency measure



(fonte: Porcelli F. (2009), Measurement of Technical Efficiency)

Figura 1.5: Debreu-Farrell input-oriented efficiency measure



(fonte: Porcelli F. (2009), Measurement of Technical Efficiency)

1.6 - Stima dell'efficienza tecnica nei modelli parametrici e non-parametrici

La misura di efficienza tecnica di Debreu-Farrell (DF) orientata agli input necessita, partendo dall'insieme delle osservazioni, della costruzione di una mappa di isoquanti di produzione. Come si può osservare dalla Figura 1.5, i vettori degli input X_a ed X_b , possono essere ridotti proporzionalmente (o in senso radiale) mantenendo inalterato il vettore output Y . Al contrario, per i vettori X_c ed X_d non è possibile esercitare una riduzione radiale senza conseguenti variazioni del vettore output Y .

Concretamente, la misura DF, che correla il livello di efficienza dell'unità produttiva alla distanza dalla funzione di produzione o di isoquanto, non tiene in considerazione un aspetto fondamentale del processo produttivo: la tecnologia di riferimento, che rimane praticamente sconosciuta.

Il problema empirico consiste nell'individuare innanzitutto uno stimatore di tale tecnologia che involupi i dati osservati e che successivamente ne derivi uno stimatore di efficienza tecnica. Lo stimatore ideale delle misure di efficienza dovrebbe fornire stime puntuali dei livelli di efficienza e consentire di sottoporre a verifica empirica le ipotesi oggetto di analisi.

Nello studio della frontiera efficiente esistono diversi approcci, che differiscono in base alle ipotesi relative a¹⁶:

- i. forma analitica della funzione stimata: *frontiera parametrica o non-parametrica*;
- ii. esistenza di un modello stocastico che interpreti la relazione esistente fra produzione osservata e frontiera: *frontiera stocastica o matematica*;
- iii. natura degli errori: *frontiere deterministiche o stocastiche (o ad errore composto)*.

Negli approcci parametrici la frontiera è espressa con una funzione matematica nota che contiene un numero fisso di parametri costanti e sconosciuti, oggetto di stima; negli approcci non parametrici invece le possibilità produttive sono date dall'insieme dei dati osservati di cui la frontiera, costruita imponendo alcune proprietà, ne costituisce l'involuppo.

Nelle frontiere parametriche deterministiche non si avanza alcuna ipotesi sul meccanismo di generazione dei dati e si assume assenza di errore stocastico: la differenza fra produzione teorica ed osservata rappresenta l'inefficienza dell'unità produttiva.

¹⁶ Cfr. Maietta, 1992

Nelle frontiere parametriche stocastiche questa differenza viene invece scissa in due componenti: errore stocastico e misura dell'inefficienza.

La valutazione dell'efficienza di un'attività produttiva richiede innanzitutto la specificazione delle variabili che figurano nella funzione di produzione o di costo che caratterizzano l'attività economica, al fine di adottare il modello di analisi più consono.

Figura 1.6: Modelli per la stima dell'efficienza tecnica

		<i>"Di frontiera"</i>	<i>"Non di frontiera"</i>
<i>Non parametriche</i>	Deterministiche	<i>Data Envelopment Analysis</i> (Farrell, 1957)	
	Stocastiche		
<i>Parametriche</i>	Deterministiche	<i>Deterministic Frontier Model</i> (Aigner e Chu, 1968)	<i>Analisi di regressione semplice</i> (Feldstein, 1967)
	Stocastiche	<i>Stochastic Frontier Model</i> (Aigner et al. ,1977; Meeusen e Van den Broeck, 1977)	

(fonte: Balassone F., Francese M., Giordano R. (2003), *BDI – L'efficienza nei servizi pubblici*)

La Figura 1.6 espone le tecniche proposte in letteratura per la formulazione di giudizi in merito alla stima dell'efficienza. In primis si pone una distinzione fra gli approcci detti "di frontiera" e quelli "non di frontiera". I primi misurano l'efficienza delle unità produttive del campione in relazione ad un riferimento "ottimo", che può essere dato dalla stima di una frontiera delle possibilità produttive teoriche oppure dal miglior risultato conseguito dalle unità considerate nel campione di analisi; i secondi misurano invece l'efficienza rispetto ai risultati medi del campione.

Le misure vengono poi ulteriormente distinte in efficienza stocastica e deterministica, in relazione alla possibilità di considerare o meno fattori di natura stocastica, che possono influire sui risultati delle unità produttive a prescindere dal loro grado di efficienza.

In questo elaborato di tesi saranno trattati esclusivamente gli approcci di "frontiera".

1.7 - Approcci di frontiera

L'approccio di frontiera basa l'analisi su due tipologie di funzione: la funzione di produzione, che relazione la quantità dei singoli fattori di produzione impiegati con la quantità di output ottenuto, e la funzione di costo che valuta, dati i prezzi degli input e degli output, il costo minimo sostenibile per la loro produzione. Entrambe le funzioni condividono la caratteristica di frontiera, massima e minima rispettivamente, sulla quale le imprese pienamente efficienti vengono a collocarsi, dato lo stato della tecnologia. Numerosi sono stati i metodi proposti per la misurazione dell'efficienza basati sulla nozione di frontiera, come ben esposto da Greene (1997), i quali differiscono principalmente per l'interpretazione del concetto di frontiera: alcuni metodi si propongono di stimare la frontiera "assoluta", altri quella "best practice", che rispecchia il miglior risultato conseguito fra le imprese incluse nel campione considerato.

Una importante distinzione in letteratura viene posta fra le tecniche parametriche e quelle non parametriche. Le prime si basano sulla stima econometrica di una funzione frontiera (di produzione o di costo): specificano a priori una forma funzionale con parametri costanti, che vengono stimati con metodi statistico-econometrici, in maniera tale che la raffigurazione grafica della funzione rappresenti nel miglior modo i dati. Tale funzione, in relazione al caso oggetto di studio, può essere assunta deterministica o stocastica.

Il metodo si articola in due fasi:

1. stima dei parametri della funzione frontiera (ad esempio, nel caso di una funzione produzione, si stimerà la relazione fra gli output e gli input del processo produttivo);
2. calcolo delle misure di efficienza tecnica confrontando i singoli output delle aziende osservate con i valori teorici appartenenti alla frontiera.

Quindi, per ciascuna osservazione, la misura dell'efficienza in termini sia di input che di output è calcolata con riferimento alla funzione stimata, che rappresenta la frontiera della tecnica produttiva in esame.

Il postulato alla base di tutti gli approcci parametrici è la possibilità di individuare la frontiera partendo dai dati osservati e attraverso una funzione che “circondi” quanto più da vicino i dati. Questo approccio risulta molto utile se ad ogni parametro viene associato un particolare significato, con la possibilità di interpretare economicamente i parametri. Gli svantaggi sono invece una conseguenza dell'imposizione di una predeterminata forma funzionale alla tecnologia di produzione e di una predeterminata distribuzione all'inefficienza, con il rischio che eventuali errori di specificazione della tecnologia e della struttura dell'errore si riflettano sulla misurazione dell'inefficienza.

Le tecniche non parametriche invece non prevedono la specifica a priori della forma funzionale in esame, ma semplicemente richiedono che i punti appartenenti alla frontiera soddisfino determinate proprietà. Presupponendo l'esistenza della frontiera, con tecniche di programmazione lineare, si valuta l'appartenenza dei dati alla stessa in base alle ipotesi stabilite. La misura di efficienza, così ottenuta per ciascuna osservazione, sarà di tipo relativo.

1.7.1 - Approccio non-parametrico

I metodi non-parametrici si basano sulla costruzione di un sistema di riferimento rispetto al quale valutare le singole osservazioni inerenti le performance delle DMU costituenti il campione di analisi. Essi non necessitano di ipotesi a priori sulle caratteristiche del parametro preso a riferimento o comunque prevedono ipotesi meno restrittive rispetto a quelle tipiche della statistica parametrica; in particolare non si assume l'ipotesi che i dati provengano da una popolazione normale o gaussiana.

L'approccio non-parametrico risulta molto flessibile nella fase di costruzione della frontiera efficiente, non facendo riferimento a nessun modello teorico che specifichi la forma funzionale della frontiera attraverso la predeterminazione di un numero prefissato di parametri volti a spiegare la struttura dell'insieme di produzione.

I metodi non-parametrici si basano su poche assunzioni teoriche e non formulano ipotesi sulla forma funzionale della frontiera di produzione e sulla posizione che le osservazione assumono rispetto alla frontiera efficiente, se non che esse possano trovarsi omolateralmente alla frontiera stessa. Non viene fatta alcuna ipotesi probabilistica in merito alla metodologia di raccolta dei dati, considerando tale metodologia come descrittiva e non inferenziale.

Il metodo non-parametrico è meglio conosciuto come “Data Envelopment Analysis” (DEA), ed è stato ideato da Farrell nel 1957.

Per comprendere appieno tale metodologia si consideri un’impresa che opera impiegando due input, x_1 e x_2 , per produrre un singolo output y ; si assuma inoltre che la funzione di produzione $y = f(x_1, x_2)$ sia caratterizzata da rendimenti di scala costanti e che sia rappresentata da un isoquanto di produzione unitario.

La Figura 1.7 espone graficamente l’approccio non-parametrico, valutando sei imprese (A, B, C, D, E e F). In assenza di informazioni inerenti alla posizione dell’isoquanto di produzione, non è possibile asserire che le unità operano in maniera inefficiente, è possibile però ipotizzare che l’isoquanto di produzione si dispone lungo la linea di unione delle unità B,C,D ed F. In relazione all’isoquanto ipotizzato l’impresa A non è efficiente, per esserlo dovrebbe collocarsi nel punto A^* ; la sua efficienza tecnica è misurata confrontando i suoi input con quelli dell’impresa teorica (A^*) collocata sull’isoquanto efficiente (l’efficienza tecnica di A è: OA^*/OA). La condizione di convessità implica che, se due diverse combinazioni di input sono in grado di produrre un’unità di output, allora anche la loro combinazione lineare produce il medesimo output. In questo modo è possibile distinguere quali siano le combinazioni di input efficienti da quelle inefficienti. L’unità C rispetto a B utilizza una quantità maggiore di input x_1 ma inferiore di x_2 , ciò non toglie che possano essere entrambe efficienti.

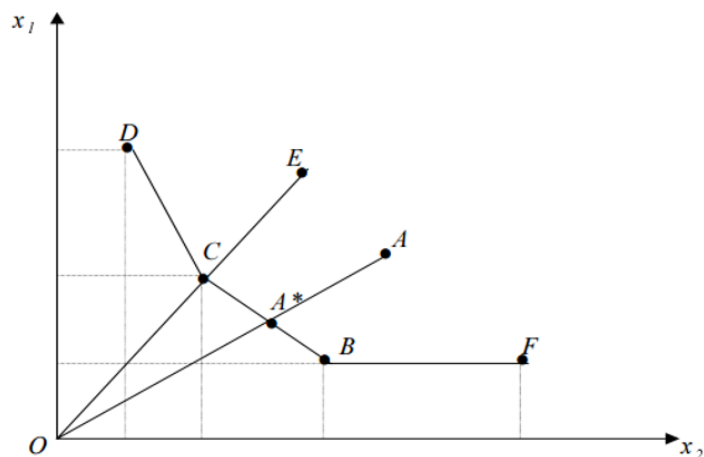
Analogamente l’unità D rispetto a B è caratterizzata una quantità maggiore di x_1 ma inferiore di x_2 .

L’unità F, la quale è posta lungo l’isoquanto efficiente, risulta essere efficiente in senso “debole” nell’utilizzo del fattore x_2 : tale unità, se paragonata a B, potrebbe utilizzare una quantità minore di input x_2 ; presenta quindi un eccesso di input.

È invece possibile affermare che la tecnologia di produzione di E la rende inefficiente in relazione alle altre: rispetto a C utilizza maggiori quantità di entrambi gli input.

I segmenti che congiungono tutte le combinazioni di input efficienti danno luogo all’isoquanto efficiente. Ciò significa che un’impresa risulta essere efficiente se produce ad esempio su un qualsiasi punto del segmento CD.

Figura 1.7: L'approccio non parametrico



(fonte: Balassone F., Francese M., Giordano R. (2003), BDI – L'efficienza nei servizi pubblici)

Questo tipo di approccio fornisce dunque una valutazione dell'efficienza relativa alla miglior performance osservabile all'interno del campione.

1.7.2 - Approccio parametrico

A secondo delle ipotesi sul processo generatore dei dati, è possibile utilizzare due differenti approcci: la stima di frontiere deterministiche o di quelle stocastiche.

Nel metodo parametrico-deterministico le funzioni frontiera deterministiche afferiscono che la deviazione di un'osservazione dal suo massimo teorico è attribuibile esclusivamente all'inefficienza aziendale, ossia alle scelte del produttore; tale specificazione non tiene conto di possibili shock casuali non controllabili specifici del processo produttivo.

L'approccio stocastico invece riconosce che le deviazioni dalla frontiera possono essere giustificate da condizioni poste al di fuori del controllo del produttore: alla funzione da stimare considera anche fattori attribuibili sia agli stati di natura, sia ad altre circostanze (es. errori di misurazione, omissioni di variabili determinanti, etc...).

1.7.3 - Stima di frontiere deterministiche

Il primo modello parametrico di stima della frontiera è il “*Deterministic Frontier Model*” (DFM) e fu elaborato da Aigner e Chu nel 1968. Il modello presenta una frontiera di produzione omogenea di tipo Cobb-Douglas, con il vincolo che tutte le osservazioni si dispongono in corrispondenza della frontiera o sotto di essa.

La misura dell’inefficienza è data dal residuo: nel caso di una funzione di produzione, il residuo rappresenta l’inefficienza tecnica; nel caso di una funzione di costo, il residuo rappresenta invece l’inefficienza complessiva.

Nell’analisi di frontiere deterministiche uno dei problemi riscontrabili riguarda il segno “sbagliato” rispetto alla teorizzazione economica, che prevede che dalla stima delle funzioni di produzione o di costo emergano solo residui negativi, nel primo caso, e positivi, nel secondo. Questo viene risolto spostando l’intercetta stimata della funzione fino all’eliminazione delle deviazioni positive/negative della funzione di produzione/costo. Concretamente per stimare l’inefficienza con una frontiera deterministica occorre inizialmente stimare la frontiera con il metodo dei Minimi Quadrati Ordinari (OLS), calcolare il valore massimo fra gli scarti e traslare l’intercetta di una quantità pari al massimo residuo. Tale metodo è noto in letteratura come Corrected Ordinary Least Squares (COLS).

1.7.4 - Stima di frontiere stocastiche

Nelle frontiere stocastiche non si pone il problema del segno “sbagliato” in quanto si considerano anche le variabili al di fuori del controllo dell’impresa, con la conseguenza che queste possono modificare la frontiera, fornendo risultati migliori o peggiori.

La stima di frontiere stocastiche prevede che le deviazioni rispetto alla frontiera efficiente siano dovute, oltre che alle scelte errate dell’impresa, anche a fattori causali non controllabili. Il modello “*Stochastic Frontier Model*” (SFM), definito da Aigner *et al.* nel 1977, prevede la scomposizione del termine “errore” in due componenti: la prima, componente simmetrica, include gli effetti degli errori di misurazione, di shock esogeni o di altri disturbi di natura stocastica consentendo variazioni random della frontiera fra imprese diverse; la seconda si concentra sugli effetti dell’inefficienza.

Lo svantaggio di questo metodo è che non vi è un modo diretto ed immediato per determinare quale delle due componenti influisca maggiormente sull’ “errore” totale.

1.7.5 - Valutazione comparativa

In letteratura non è emersa una netta preferenza per una delle tecniche sopra esaminate; nessuna offre una soluzione soddisfacente all'influenza degli errori stocastici sul risultato. Una differenza importante è che l'approccio parametrico richiede la specificazione puntuale della funzione di produzione, limitandone l'utilizzo, mentre l'approccio non parametrico non specifica a priori nessuna forma funzionale relativa ai dati sotto osservazione.

Le tecniche non di frontiera, non trattate in questa sede, presentano come limite l'impossibilità di misurare il livello di inefficienza, ma possono solo valutare la posizione relativa delle unità produttive comprese nel campione. Tuttavia anche le tecniche di frontiera, che basano la stima dell'inefficienza su un sottoinsieme di osservazioni, presentano alcuni svantaggi come la possibile presa in considerazione di misure outlier, che ne potrebbero inficiare l'esattezza.

CAPITOLO 2

LA METODOLOGIA DEA

2.1 - Evoluzione storica

La prima pubblicazione inerente la metodologia DEA risale al 1978, nel lavoro intitolato "*Measuring the efficiency of decision making units*", elaborato da Charnes, Cooper e Rhodes. Si poneva come obiettivo quello di estendere l'indice di efficienza di Farrell, trasformando l'analisi condotta inizialmente da Farrell su imprese utilizzando un solo input e output, in un problema di programmazione lineare da adattare ad una moltitudine di output, con lo scopo di migliorare la metodologia inerente lo studio della produttività.

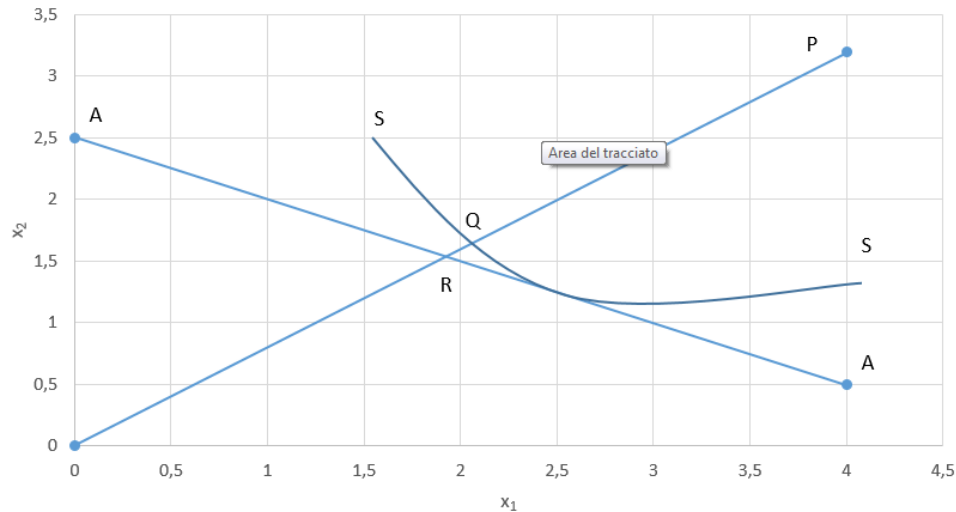
Prima del 1978 le misurazioni dell'efficienza produttiva erano molto accurate, precise e puntuali, ma troppo restrittive, ignoravano la possibilità di combinare input e output multipli in modo da raggiungere una misura dell'efficienza totale.

La DEA divenne così un nuovo ramo di studio dell'efficienza produttiva, alternativo al metodo econometrico. Essa opera formulando ipotesi circa la struttura e la tecnologia di produzione. Se i dati disponibili sono solo di tipo quantitativo è possibile calcolare l'efficienza esclusivamente nella sua componente "tecnica", mentre in presenza di dati inerenti i prezzi dei fattori produttivi è possibile calcolare l'efficienza economica (in termini di costo e profitto) in tutte le sue componenti: "tecnica", "allocativa" e "slack".

Il primo approccio analitico alla misurazione dell'efficienza di un processo produttivo risale alle opere "seminali" di Koopmans (1951), Debreu (1951) e Farrell (1957). A Koopmans (1951) può essere attribuita una prima definizione di efficienza tecnica sviluppata adattando il concetto di efficienza paretiana: data una funzione di produzione che, per una data tecnologia, trasforma un vettore di input in un vettore di output, un vettore input-output è tecnicamente efficiente se e solo se è possibile incrementare l'output ottenuto (o diminuire l'input utilizzato), solo mediante la riduzione di un altro output (o l'aumento di un altro input). Debreu offre inoltre la prima misura radiale di efficienza produttiva data dal "coefficiente di risorse utilizzate" per unità di output. A Farrell risale invece una misura di efficienza globale (o economica) come prodotto del punteggio dell'efficienza tecnica e dell'efficienza allocativa.

Un semplice esempio della scomposizione dell'efficienza proposta da Farrell è mostrato in Figura 2.1, che mostra un caso in cui si considerano due variabili di input (x_1 ed x_2) per produrre un solo output (y), sotto l'ipotesi di assenza di economie/diseconomie di scala.

Figura 2.1: Efficienza tecnica ed allocativa



(fonte: www.informare.it)

La curva SS identifica l'isoquante dell'impresa completamente efficiente e permette di misurare l'efficienza tecnica. Se una data impresa utilizza le quantità di input identificate dal punto P, tale impresa risulterà essere inefficiente e l'inefficienza tecnica (TE) sarà graficamente rappresentata dal segmento QP (ossia dalla distanza del punto P dall'isoquante di produzione). La distanza QP identifica infatti quanto gli input potrebbe essere proporzionalmente ridotti senza ottenere una riduzione dell'output. L'inefficienza tecnica in questione può anche essere quantificata in valore percentuale tramite il rapporto:

$$TE = OQ/OP$$

Questo rapporto è compreso tra zero ed uno: esso è pari ad 1 solo quando l'impresa risulta tecnicamente efficiente, ossia quando giace sull'isoquante SS.

Identificando con la retta AA l'isocosto, è possibile individuare anche l'efficienza allocativa che, sempre rispetto al punto P, sarà data dal seguente rapporto:

$$AE = OR/OQ$$

La distanza RQ rappresenta la riduzione nei costi di produzione che si potrebbe ottenere se il processo produttivo avvenisse in corrispondenza del punto di efficienza allocativa (e tecnica) W, invece che nel punto Q, tecnicamente efficiente ma economicamente inefficiente.

L'efficienza complessiva è così definita:

$$EE = OR/OP$$

e si può calcolare come risultato del prodotto fra efficienza tecnica e allocativa, precedentemente calcolate:

$$EE = TE * AE = (OQ/OP) * (OR/OQ) = (OR/OP)$$

Queste misure di efficienza presuppongono la conoscenza della funzione di produzione dell'impresa pienamente efficiente. Ciò avviene raramente e pertanto l'isoquanto efficiente deve essere stimato utilizzando un campione di dati.

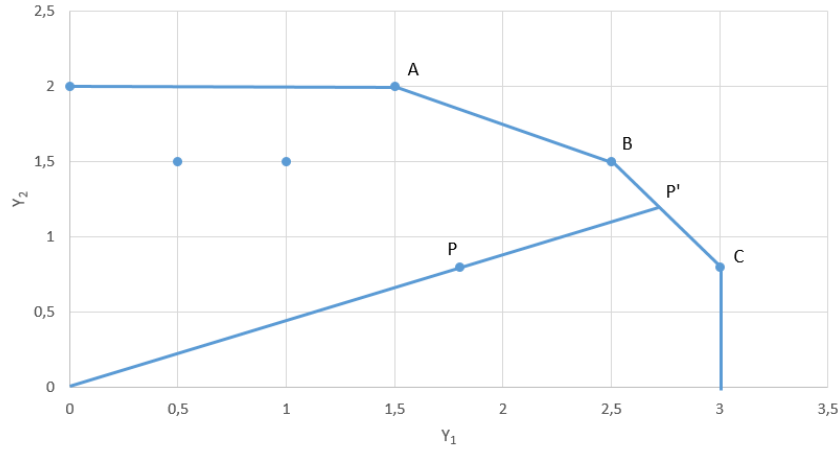
La soluzione proposta da Farrell (1957) prevede:

- che nessuno dei punti osservati appartenenti al campione si situi al di sotto o alla sinistra dell'isoquanto;
- l'utilizzo di una funzione di produzione parametrica (ad esempio una Cobb-Douglas ottenuta in modo appropriato dai dati).

Queste semplici misure dell'efficienza vengono definite come “input-oriented” qualora trattino problematiche relative alla minimizzazione proporzionale degli input, senza alterazione del livello dell'output.

Viceversa, si può adottare un approccio “output-oriented” mirante alla massimizzazione del livello di output a parità di input utilizzati nel processo produttivo, come esposto graficamente in Figura 2.2.

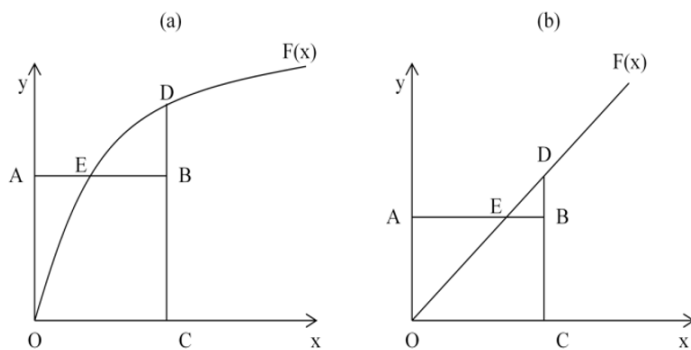
Figura 2.2: Efficienza tecnica (output-oriented)



(fonte: www.informare.it)

Nella Figura 2.2 si può notare come i punti A, B e C corrispondano alle DMU più efficienti in base alle quali è stata costruita la frontiera efficiente. Questa figura rappresenta una tecnologia produttiva che trasforma un input (x) in due output (y_1 ed y_2). Il punto P costituisce una DMU inefficiente e la sua proiezione nella frontiera efficiente P' rappresenta la posizione che P dovrebbe occupare per essere pienamente efficiente. Si dimostra inoltre¹⁷ che le misure input e output oriented forniscono lo stesso risultato in termini di efficienza tecnica solo nel caso di rendimenti di scala costanti. La Figura 2.3 illustra le differenze fra rendimenti di scala decrescenti (a) e rendimenti di scala costanti (b).

Figura 2.3: Rendimenti di scala decrescenti e costanti



(fonte: Zeli, 2002)

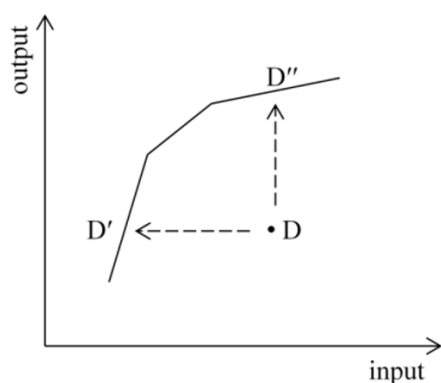
¹⁷ Cfr. Färe-Lovell, 1978

Come dimostrato da Färe-Lovell (1978), se si considera l'impresa posta in B, la misura dell'efficienza input-oriented corrisponde al rapporto AE/AB mentre quella output-oriented al rapporto CB/CD .

Come si può evincere questi due rapporti risultano uguali solo nel secondo caso, ossia nel caso di rendimenti di scala costanti, dove: $AE/AB=CB/CD$

La metodologia DEA consiste quindi nell'identificare una frontiera a tratti lineare, utilizzando tecniche di programmazione lineare, ed in base a ciò identificare se le DMU del campione di analisi risultano efficienti o meno: come evidenziato in Figura 2.4, nel caso queste non lo fossero le possibili strategie per giungere alla frontiera sono due: diminuire il livello di input mantenendo inalterato l'output (punto D') oppure massimizzare l'output con lo stesso set di input (punto D'').

Figura 2.4: Frontiera Efficiente a tratti lineare



(fonte: Gregoriou, Zhu, 2005)

Continuando nell'analisi storica, il primo modello proposto per l'analisi dell'efficienza tecnica fu il modello CCR (dal nome degli ideatori Charnes, Cooper e Rhodes), che si limitava a misurare l'efficienza in condizioni di ritorni di scala costanti (CRS).

Solo intorno agli anni '80 venne introdotto il metodo BCC (Banker, Charnes, Cooper), in grado di considerare nella sua formulazione anche l'effetto scala, ammettendo la valutazione di rendimenti di scala variabili (VRS).

Nel medesimo periodo venne introdotto un ulteriore modello caratterizzato da frontiere lineari a tratti: “*Invariant Multiplicative efficiency Analysis and Piecewise Cobb-Douglas Envelopment*”, elaborato da Charles, Cooper, Seiford e Stutz nel 1983 e che focalizzava l'attenzione sull'efficienza relativa.

2.2 - Multi-input e Multi-output

Nella realtà economica i processi produttivi utilizzano una varietà di input per produrre uno o più output e pertanto, per rendere l'esposizione quanto più possibile affine alla realtà, occorre estendere il modello considerando la situazione multi-input e multi-output. La complessità del caso "multi" risiede nella ponderazione delle variabili quantitative per il calcolo dell'efficienza, in quanto tratta variabili dimensionalmente differenti.

Nei modelli che verranno presentati di seguito saranno considerate n entità economiche (indicate con $j = 1, 2, \dots, n$), che utilizzano m input (indicati con $i = 1, 2, \dots, m$) per ottenere, tramite un determinato processo produttivo, s output (indicati con $r = 1, 2, \dots, s$).

La ponderazione si baserà su alcune modifiche nell'indice di efficienza assoluta.

Quindi, se indichiamo con x_{ij} la quantità dell' i -esimo input impiegato dalla j -esima unità produttiva e con y_{rj} la quantità dell' r -esimo output prodotto dalla j -esima unità produttiva, basterà introdurre due pesi, u_r e v_i , che si riferiscono rispettivamente all' r -esimo output prodotto ed al i -esimo input impiegato, per ottenere un unico valore che rappresenti un indice di efficienza assoluta per l'unità produttiva considerata. La metodologia DEA permette infatti di utilizzare pesi variabili che vengono derivati direttamente dalle osservazioni e scelti in modo da massimizzare gli indici di efficienza "output/input" di ciascuna DMU relativamente a ogni altra unità presente nel campione. I pesi per essere considerati ottimali devono essere positivi o almeno non negativi, e l'indice di efficienza relativa risultante deve essere compreso fra zero ed uno

2.3 – Modelli base

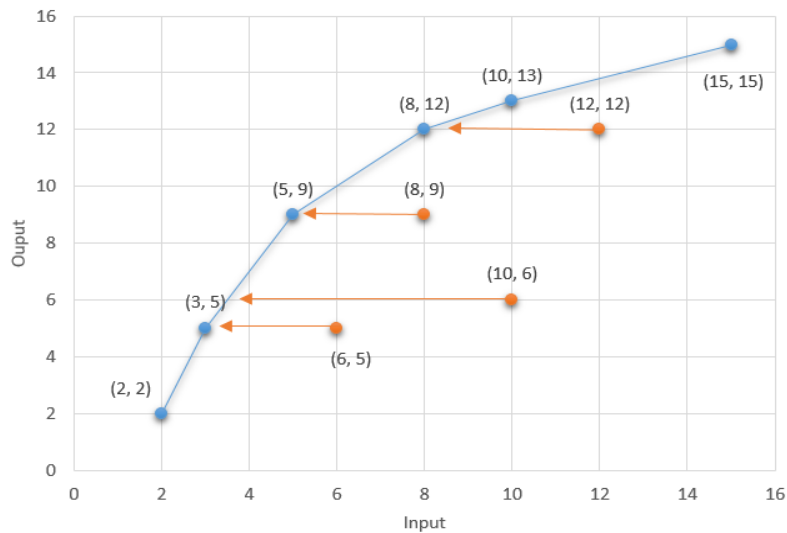
La DEA è una metodologia diffusa nel tempo che ha portato alla nascita di vari modelli, ognuno dei quali basato su diverse caratteristiche interpretative:

1. Modello CCR (1978): produce una valutazione oggettiva dell'efficienza complessiva. Tramite l'utilizzo di input e output virtuali (creati come aggregazione pesata), identifica e stima la fonte dell'inefficienza identificata.
2. Modello BCC (1984): considera i ritorni di scala variabili (VRS) e stima l'efficienza tecnica "pura", depurata dall'effetto delle componenti dell'efficienza di scala.
3. Modello moltiplicativo (1982-1983): modello matematico che fornisce una frontiera log-lineare a tratti o Cobb-Douglas a tratti.
4. Modello additivo (1985) ed estensione del modello Additivo (Charnes et al., 1987): relaziona la DEA alla prima analisi sull'inefficienza; collega inoltre i risultati sull'efficienza al concetto economico di Pareto-ottimo, come interpretato nel lavoro di Koopmans.

2.4 – Modelli input-oriented e output-oriented

Come esposto in precedenza, la valutazione dell'inefficienza di una DMU consiste nella misurazione ed identificazione dell'esistenza di sprechi nella produzione. Un'unità economica può risultare tecnicamente inefficiente non solo se spreca input in fase di produzione (orientamento agli input), ma anche se, dati gli input, non massimizza gli output (orientamento agli output).

Figura 2.5: DEA model – Input oriented



(fonte: John B. Walden e James E. Kirkley, 2000)

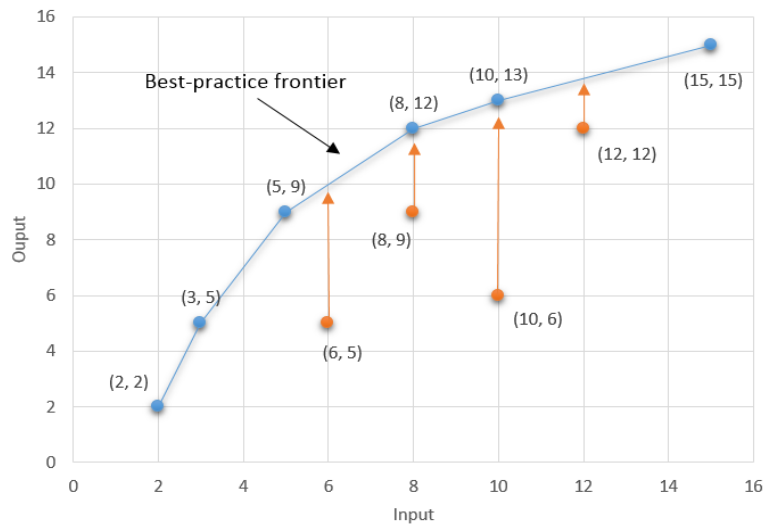
Nella Figura 2.5 è riportato un tipico caso di misurazione input-oriented. I punti posti alla destra della frontiera ottimale risultano appartenere ad una combinazione di produzione non efficiente e la misurazione dello scostamento dalla frontiera è effettuata in maniera orizzontale considerando la sola variabile x in quanto, per il suddetto orientamento, lo scopo è minimizzare l'impiego degli input a parità di output.

Considerando ad esempio il punto inefficiente con coordinate (8, 9) si avrà:

$$E_{(8,9)} = \frac{x_{(5,9)}}{x_{(8,9)}} = \frac{5}{8} = 0,62$$

Il punto (8, 9) ha efficienza pari al 62% e, tramite una riduzione degli input del 38%, potrebbe raggiungere la frontiera efficiente.

Figura 2.6: DEA model – Output oriented



(fonte: John B. Walden e James E. Kirkley, 2000)

L'orientamento agli output invece viene presentato in Figura 2.6.

La misurazione in questo caso verrà effettuata sulla distanza verticale, considerando solo la variabile y dell'output: lo scopo è infatti la massimizzazione dell'output a parità di input.

Considerando il punto con coordinate $(8, 9)$ si avrà:

$$E_{(8,9)} = \frac{x_{(8,9)}}{x_{(8,12)}} = \frac{9}{12} = 0,75$$

Il punto $(8, 9)$ con un aumento del 25% del livello di output prodotto potrebbe raggiungere la frontiera efficiente.

2.5 – Scelta del modello

Prima di procedere con l'esemplificazione dei vari modelli, è necessario precisare che tutti questi sono utili a valutare l'efficienza delle DMU, ma ognuno con un orientamento differente: il focus dell'analisi verterà su concetti ed ipotesi diversi.

Innanzitutto occorre definire il modello su cui basare l'analisi del caso: la scelta varia in base al rendimento di scala del campione di analisi, costante (CRS) oppure variabile (VRS). Successivamente il soggetto decide in base alle specifiche esigenze se condurre una analisi volta alla minimizzazione degli input, alla massimizzazione dell'output o ad entrambe.

I modelli possibili sono:

Figura 2.7: Scelta del modello in base all'orientamento ed ai ritorni di scala

	<i>Orientamento</i>		
	<i>Input</i>	<i>Output</i>	<i>Entrambi</i>
<i>ritorni di scala costanti (CRS)</i>	CCR _{INPUT}	CCR _{OUTPUT}	Additivo
<i>ritorni di scala variabili (VRS)</i>	BCC _{INPUT}	BCC _{OUTPUT}	Additivo

Dopo il lavoro pionieristico di Farrell del 1957, che pose le basi del metodo DEA, l'applicazione di tecniche non parametriche allo studio e valutazione delle efficienze fu trascurata per un ventennio circa, fino al lavoro di Charnes, Cooper e Rhodes (1978), che diede nuovi stimoli ed impulsi introducendo il modello CCR.

La loro tesi si basa sulla valutazione dell'efficienza di un'entità economica come rapporto fra la quantità di output e la corrispondente quantità di input impiegata, entrambe opportunamente pesate. Il campione di analisi deve presentare caratteristiche di omogeneità, indipendenza ed autonomia e si ammette che, all'interno di tale campione di riferimento possano esistere più DMU "ideali" (cosiddette *best practice*) la cui efficienza sia maggiore o uguale a quelle di tutte le altre unità operative del campione stesso.

I pesi vengono quindi a costituire le variabili incognite del problema di massimizzazione, mentre il rapporto fra la quantità ponderata di output e di input costituisce la funzione obiettivo da massimizzare.

Charnes, Cooper e Rhodes elaborarono la seguente definizione di metodologia DEA: modello di programmazione matematico, applicato a dati che possono essere osservati, che offre un nuovo modo di ottenere stime empiriche delle relazioni – come le funzioni di produzione e le frontiere efficienti di produzione – che rappresentano i pilastri dell'economia moderna.

2.6 – Modello CCR

Il modello CCR (Charnes, Cooper e Rhodes, 1978) permette di effettuare valutazione sia tramite un orientamento agli input che agli output.

Le ipotesi del modello, che assume l'esistenza di n DMU, sono le seguenti:

- devono esserci dati numerici strettamente positivi disponibili per tutti gli input e output considerati;
- in generale, è preferibile considerare un ridotto ammontare di input ed un elevato quantitativo di output;
- gli input, gli output e la scelta delle DMU devono riflettere un interesse per quanto riguarda la valutazione dell'efficienza relativa delle DMU;
- i rendimenti di scala sono costanti (CRS);
- tutti gli input e tutti gli output sono ricondotti ad un singolo input virtuale (espresso come somma pesata degli input) ed ad un singolo output virtuale (espresso come somma pesata degli output);
- i pesi devono essere non negativi e tali da non rendere maggiore di 1 il rapporto per tutte le DMU.

Si suppone che ogni DMU utilizzi un ammontare di m differenti input per produrre s tipologie di output. Si avranno le seguenti matrici degli input (X) e degli output (Y):

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_{m1} & y_{m2} & \cdots & y_{mn} \end{pmatrix}$$

dove x_{ij} rappresenta l' i -esimo input considerato per la j -esima DMU ed y_{ij} rappresenta l' i -esimo output per la j -esima DMU.

Per ogni DMU vengono scelti dei pesi sia per gli input (v_i) ($i=1, \dots, m$), sia per gli output (u_r) ($r=1, \dots, s$):

$$\text{virtual input} = v_1 x_{10} + \cdots + v_m x_{m0}$$

$$\text{virtual output} = u_1 y_{10} + \cdots + u_s y_{s0}$$

Utilizzando la programmazione lineare (PL), si determinano i pesi degli input e output che massimizzano il rapporto $\frac{\text{virtual output}}{\text{virtual input}}$.

L'efficienza risultante di ogni DMU è data quindi dal rapporto tra la somma ponderata degli output e la somma ponderata degli input.

I pesi ottimi, non predeterminati in anticipo dal decisore ma ricavati dai dati, sono delle variabili che il modello calcola in maniera da massimizzare il rapporto di efficienza e che generalmente variano da una DMU all'altra. Ciascuna unità economica è "libera" di scegliere i pesi in maniera tale da massimizzare il proprio livello di efficienza: si verificherà pertanto l'assegnazione agli input di pesi tanto più piccoli quanto maggiore ne è la disponibilità e, viceversa, tanto più elevati quanto più limitata ne è la quantità

disponibile. L'unico vincolo, inerente la decisione sui pesi, è che non assumano valori negativi e che siano tali da rendere positivo ma non superiore ad 1 il rapporto di efficienza per tutte le altre DMU.

Selezionati i dati, si procede alla valorizzazione dell'efficienza per ogni DMU.

Ponendo come DMU₀ l'entità di analisi di cui si vuole conoscere l'efficienza rispetto a tutte le altre DMU_j, si risolve il seguente problema di programmazione frazionaria (FP), tramite il quale si otterranno i valori ottimali dei pesi degli input (v_i) ($i=1, \dots, m$) e degli output (u_r) ($r=1, \dots, s$):

(FP₀)

$$\max_{v,u} \theta = \frac{u_1 y_{10} + u_2 y_{20} + \dots + u_s y_{s0}}{v_1 x_{10} + v_2 x_{20} + \dots + v_m x_{m0}} \quad (1.0)$$

s.t.

$$\frac{u_1 y_{1j} + \dots + u_s y_{sj}}{v_1 x_{1j} + \dots + v_m x_{mj}} \leq 1 \quad (j = 1, \dots, n) \quad (1.1)$$

$$v_1, v_2, \dots, v_m \geq 0 \quad (1.2)$$

$$u_1, u_2, \dots, u_s \geq 0 \quad (1.3)$$

La non negatività dei pesi (1.2) (1.3) non è sufficiente a garantire un valore positivo nella (1.1). Ma, poiché si assume che i valori degli input e output siano diversi da zero, allora questa condizione associata alla non negatività dei pesi garantisce un valore uguale o maggiore di zero al rapporto "virtual output" su "virtual input".

Il passaggio successivo consiste nella trasformazione del problema di programmazione frazionaria (FP₀) in un equivalente problema di programmazione lineare nella forma *input-oriented*, attraverso alcuni passaggi matematici.

Innanzitutto si noti che il denominatore del vincolo (1.1), sotto le condizioni di non negatività delle variabili del denominato x ed v , risulta anch'esso non negativo per ciascuna j . A tal proposito, si può moltiplicare il denominato in entrambi i lati della disequazione senza dover cambiare il segno di quest'ultima, ottenendo così l'equazione (1.4).

Si prendano a riferimento i seguenti passaggi:

$$(v_1x_{1j} + \dots + v_mx_{mj}) \cdot \frac{u_1y_{1j} + \dots + u_sy_{sj}}{v_1x_{1j} + \dots + v_mx_{mj}} \cdot (v_1x_{1j} + \dots + v_mx_{mj}) \quad (1.4)$$

$$\mu_1y_{1j} + \dots + \mu_sy_{sj} \leq v_1x_{1j} + \dots + v_mx_{mj} \quad (\text{con } j=1, \dots, n) \quad (1.5)$$

Il problema frazionario (FP₀) risulta essere equivalente a quello lineare (LP₀); il valore di un numero frazionario non varia se si moltiplicano il numeratore ed il denominatore per uno stesso numero diverso da zero; quindi per ricondurre la forma frazionaria a quella lineare è sufficiente porre il denominatore della funzione obiettivo (1.0) uguale ad 1 e lo si imposta quale vincolo, ottenendo la (1.7). La soluzione si otterrà massimizzando il numeratore come in (1.6), sotto i suddetti vincoli:

(LP₀)

$$\max_{v, \mu} \theta = \mu_1y_{10} + \dots + \mu_sy_{s0} \quad (1.6)$$

s.t.

$$v_1x_{10} + \dots + v_mx_{m0} = 1 \quad (1.7)$$

$$\mu_1y_{1j} + \dots + \mu_sy_{sj} \leq v_1x_{1j} + \dots + v_mx_{mj} \quad (\text{con } j=1, \dots, n) \quad (1.8)$$

$$v_1, v_2, \dots, v_m \geq 0 \quad (1.9)$$

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s \geq 0 \quad (2.0)$$

La soluzione ottimale del problema di programmazione lineare ($v = v^*$; $\mu = \mu^*$) è anche la soluzione ottimale per il corrispondente problema di programmazione frazionaria (FP₀) in quanto la trasformazione effettuata risulta invertibile in base alle assunzioni fatte.

I due problemi condividono quindi la medesima soluzione ottima θ^* .

Si può affermare che, per il modello CCR, nella versione *input-oriented*, una DMU₀ è efficiente se:

1. $\theta^*=1$ ed esiste almeno un vettore-soluzione ottima (v^*, u^*) con ($v^* > 0$) ed ($u^* > 0$);
2. Altrimenti, in tutti gli altri casi, la DMU₀ si considera inefficiente.

Una DMU è considerata efficiente se e solo se la sua efficienza è pari all'unità e tutte le variabili slack sono nulle. La presenza di slack indica infatti che la DMU non è Pareto-Koopmans efficiente e che sarebbe quindi possibile mantenere il medesimo livello di produzione riducendo le risorse impiegate.

L'inefficienza secondo il modello CCR input-oriented si presenta quando:

1. $\theta^* < 1$;
2. $\theta^* = 1$ ma almeno uno dei due pesi ottimi (v^*, u^*) è pari a zero per ogni soluzione ottimale del problema LP₀.

2.7 – Production Possibility Set

Per Production Possibility Set (P) si intende l'insieme delle combinazioni produttive ammissibili, delimitato nello spazio dalle DMU che operano con maggiore efficienza.

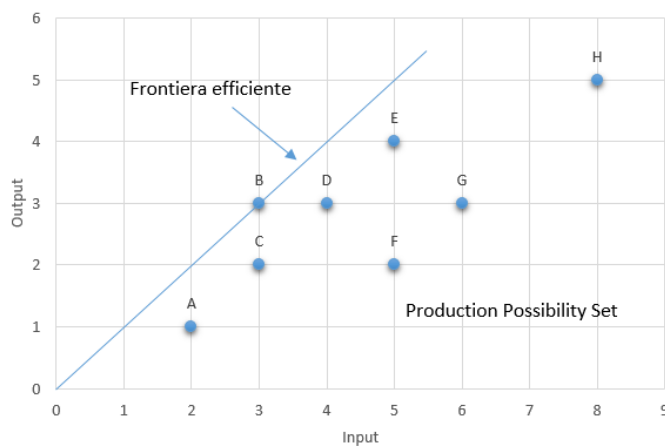
Per attività si intendono le coppie di input ($x \in R^m$) ed output ($y \in R^s$) nella forma (x_j, y_j) per ciascuna DMU_n.

L'insieme P gode delle seguenti proprietà:

1. Ogni attività osservata (x_j, y_j) appartiene a P;
2. Se un'attività appartiene a P allora anche qualunque altra trasformazione del tipo (tx, ty) , dove t è un qualunque scalare positivo (ossia per $t > 0$), appartiene a P.
3. Per qualunque attività (x, y) in P, qualunque altra attività semi-positiva (\bar{x}, \bar{y}) , con $(\bar{x} \geq x)$ e $(\bar{y} \leq y)$ è compresa in P;

Graficamente si richiama la Figura 2.8, nella quale P, determinato dalla posizione del punto B, è rappresentato dalla sezione di spazio al di sotto della frontiera efficiente.

Figura 2.8: Insieme delle possibilità produttive



(fonte: W. Cooper, M. Seiford e K. Tone, 2006)

2.8 – Estensione del modello: il problema duale

Il problema appena esposto viene ora rivisitato da un punto di vista duale che si compone di due fasi: la prima, relativa all'analisi ed alla ricerca di quel valore θ , che esprime il valore dell'efficienza delle DMU sotto osservazione; la seconda, nella definizione di un'ulteriore misura atta ad esprimere la piena efficienza paretiana, basata sull'analisi e sulla verifica della presenza di eccessi di input o di carenza di output (“*slack*”).

Innanzitutto riscriviamo il modello CCR nella forma matriciale (notando che i pesi, considerati come vettori nel modello LP₀, nella forma duale vengono considerati come variabili del modello):

[Multiplier Form]

(LP₀)

$$\max_{v,u} u y_0 \quad (2.1)$$

s.t.

$$v x_0 = 1 \quad (2.2)$$

$$u Y - v X \leq 0 \quad (2.3)$$

$$v \geq 0, u \geq 0 \quad (2.4)$$

dove v rappresenta il vettore riga dei moltiplicatori degli input ed u il vettore riga dei moltiplicatori degli output.

Questa formulazione rappresenta lo stesso modello di quello (1.6) – (2.0) solamente riscritto in forma matriciale.

Il problema duale viene espresso utilizzando una variabile reale θ ed un vettore non negativo trasposto di variabili, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$, come segue:

[Envelopment Form]

(DLP₀)

$$\min_{\theta, \lambda} \theta \quad (2.5)$$

s.t.

$$\theta x_0 - \lambda X \geq 0 \quad (2.6)$$

$$\lambda Y \geq y_0 \quad (2.7)$$

$$\lambda \geq 0 \quad (2.8)$$

Come sottolineato da Charnes, Cooper e Rhodes (1978) l'importanza di riscrivere il problema in forma duale è data da:

- la forma duale permette un minor sforzo computazionale dato che la complessità di un problema lineare cresce all'aumentare del numero dei vincoli. Mentre LP₀ prevede un numero di vincoli pari al numero di DMU del campione esaminato (n), il problema in forma duale necessita solamente di $(m + s)$ vincoli, pari al numero di input e output, che generalmente sono inferiori al numero delle entità economiche prese in esame;
- la difficoltà a trovare una soluzione al problema di massimizzazione degli slack;
- favorisce l'interpretazione dei risultati in quanto nel problema DLP₀ le soluzioni sono rappresentate dagli input e output mentre nel problema LP₀ vengono considerati i pesi che, seppur molto utili, necessitano di ulteriori valutazioni.

Lo scopo del problema (DLP₀) è cercare quell'attività appartenente all'insieme P che garantisca almeno il livello di output y_0 della DMU₀ in tutte le sue componenti, riducendo radialmente in maniera proporzionale il vettore degli input x_0 ad un valore che sia il più piccolo possibile.

Si può quindi capire perché un problema di massimizzazione venga trasformato, nella forma duale, in un problema di minimo: da un lato i vincoli del problema (DLP₀) impongono all'attività $(\theta x_0; y_0)$ di rimanere in P, dall'altro l'obiettivo di (DLP₀) è di cercare il valore minimo di θ tale da ridurre x_0 radialmente verso θx_0 rimanendo in P. Ciò è perfettamente consono con l'obiettivo di efficienza del modello CCR secondo cui, dato un ammontare di output y_0 , si cerca quell'attività in P che riduce x_0 al valore più piccolo possibile.

La prima fase si conclude con il riconoscimento che il valore ottimale dell'obiettivo θ^* corrisponde all'ottimo del modello (LP₀). Il valore θ^* rappresenta l'efficienza CCR, detta anche "Efficienza di Farrell".

La seconda fase consiste nella definizione degli eccessi di input ($s^- \in R^m$) e delle carenze di output ($s^+ \in R^s$), detti slack. Questi esprimono di quanto l'insieme delle attività $(\lambda X; \lambda Y)$ riescano ad ottenere performance migliori (nel senso di risparmio di input a parità di output e di massimizzazione di output a parità di input) rispetto all'unità $(\theta x_0; y_0)$ posta sotto osservazione. Gli slack vengono così definiti:

$$\text{- eccesso di input: } (s^- = \theta x_0 - \lambda X)$$

$$\text{- carenza di output: } (s^+ = \lambda Y - y_0)$$

Per riuscire a trovare il valore degli slack occorre risolvere il problema LP attraverso due fasi: nella prima fase si risolve DLP₀ trovando "l'efficienza di Farrell" θ^* ; nella seconda, sfruttando la conoscenza del termine θ^* , si risolve il problema di programmazione lineare (LP) utilizzando come variabili (λ, s^-, s^+) :

$$\max_{\lambda, s^-, s^+} w = e s^- + e s^+ \quad (2.9)$$

s.t.

$$s^- = \theta^* x_0 - \lambda X \quad (3.1)$$

$$s^+ = \lambda Y - y_0 \quad (3.2)$$

$$\lambda \geq 0, \quad s^- \geq 0, \quad s^+ \geq 0 \quad (3.3)$$

dove "e" rappresenta un vettore di termini unitari; $e = (1, \dots, 1)$.

L'obiettivo di questa seconda fase consiste nel trovare la soluzione che massimizza la somma degli slack, mantenendo il valore ottimo $\theta = \theta^*$. La soluzione ottima (λ^*, s^-, s^+) viene chiamata soluzione di massimo slack e, se tale soluzione prevede che s^- e s^+ siano entrambi pari a zero, allora viene denominata soluzione "zero-slack". Questa corrisponde ad un importante indicatore di efficienza, dato che a questo livello non è possibile risparmiare input o incrementare l'output senza peggiorare gli altri input o output. Ecco che il risultato $\theta^* = 1$ non è più sufficiente ad esprimere la condizione di efficienza.

Le considerazioni appena esposte permettono di definire l'efficienza forte o paretiana secondo il modello CCR nel seguente modo:

- I. $\theta^* = 1$;
- II. la DMU di riferimento è "zero-slack" ($s^- = 0, s^+ = 0$)

La prima condizione tipicamente definisce una DMU efficiente in forma debole (o dotata di efficienza tecnica) che si posizionerà sulla frontiera efficiente ma che non potrà diminuire l'impiego di tutti i propri input senza alterare il mix produttivo. Nel caso in cui entrambe le due condizioni si verificassero saremmo in presenza della cosiddetta efficienza forte.

2.9 - Efficienza forte e variabili di scarto

Le definizioni di efficienza data nel modello CCR nella forma LP e nella versione duale, seppur diverse, non sono in contrasto. Le forme primale e duale di un problema lineare sono due modi diversi di esprimere i medesimi concetti. Quindi, una DMU è pienamente efficiente o efficiente in forma forte, se oltre ad avere un livello di efficienza pari ad uno, è anche zero slack. Le variabili slack (s^-, s^+) indicano di quanto i valori di input ed output associati ad esse dovrebbero essere "aggiustati" per eliminare tutte le inefficienze. Il concetto di slack (o scarto) è associato alla sola forma duale del problema DEA.

Come fatto notare da Cooper *et al*, i pesi (v, u) del problema primale trovano corrispondenza nei vincoli del problema duale (2.6) e (2.7):

$$\theta x_0 - X\lambda \geq 0 \quad (2.6)$$

$$Y\lambda \geq y_0 \quad (2.7)$$

Si può esprimere la cosiddetta *condizione di complementarietà degli scarti*, secondo la quale per ciascuna soluzione ottima (v^*, u^*) del problema in forma lineare (LP₀) ed $(s^{-*}, s^{+*}, \lambda^*)$ del problema duale (DLP₀) si avrà che:

$$v^* s^{-*} = 0 \quad \text{ed} \quad u^* s^{+*} = 0.$$

Per questo motivo, se una qualunque componente (v^*, u^*) è positiva, allora la corrispondente componente (s^{-*}, s^{+*}) deve essere pari a zero e viceversa. Dato che nel problema CCR non sussistono differenze nella definizione di efficienza nella forma primale e duale, si considerano le seguenti situazioni a cui tipicamente si va incontro nel valutare l'efficienza di una DMU:

- se $\theta^* < 1$, allora la DMU è inefficiente secondo entrambe le definizioni.
- se $\theta^* = 1$ e gli slack sono diversi da zero ($s^{-*} \neq 0$ o $s^{+*} \neq 0$), allora la DMU è efficiente in forma debole e, data la condizione di complementarietà degli scarti, le componenti (v^*, u^*) , corrispondenti agli scarti positivi, devono essere pari a zero.
- se $\theta^* = 1$ e gli slack sono pari a zero ($s^{-*} = 0$ e $s^{+*} = 0$), allora la DMU è considerata efficiente in forma forte, ed il problema LP₀ avrà una soluzione ottima dove entrambi i pesi sono strettamente maggiori di zero ($v^* > 0$; $u^* > 0$).

2.10 - CCR Output-oriented

Se l'analisi condotta finora utilizzando il modello CCR aveva come scopo la minimizzazione degli input, con l'intento di produrre almeno lo stesso livello di output, il punto di vista complementare si basa sull'approccio output-oriented, il cui scopo è di verificare la presenza di condizioni di efficienza nella massimizzazione dell'output.

[Forma Envelopment]

(DLPO₀)

$$\max_{\tau, \mu} \tau$$

s.t.

$$x_0 - \mu X \geq 0 \quad (3.4)$$

$$\tau y_0 - \mu Y \leq 0 \quad (3.5)$$

$$\mu \geq 0 \quad (3.6)$$

Sia la formulazione che la soluzione di questo modello sono direttamente derivabili dal modello "input-oriented", attraverso delle semplici trasformazioni lineari. Come sottolineato da Charnes, Cooper e Rhodes (1978) si può definire:

$$\lambda = \frac{\mu}{\tau} \quad ; \quad \theta = \frac{1}{\tau} \quad ;$$

attraverso queste due trasformazioni, il problema (DLPO₀) viene riscritto nella stessa formulazione di (DLP₀). Le soluzioni dei due modelli sono pertanto fra loro correlate:

$$\tau^* = \frac{1}{\theta^*} \quad ; \quad \mu^* = \frac{\lambda^*}{\theta^*}$$

Come affermato precedentemente, θ dev'essere ≤ 1 e di conseguenza $\tau \geq 1$: ciò significa che nella fase di valutazione di una DMU, tanto più il valore τ sarà grande e maggiore di uno, tanto meno efficiente sarà l'entità economica analizzata.

Inoltre, data la relazione che lega (DLP_0) a $(DLPO_0)$ e viceversa, si può concludere che una DMU è efficiente secondo il modello input-oriented se e solo se è efficiente anche secondo il modello output-oriented.

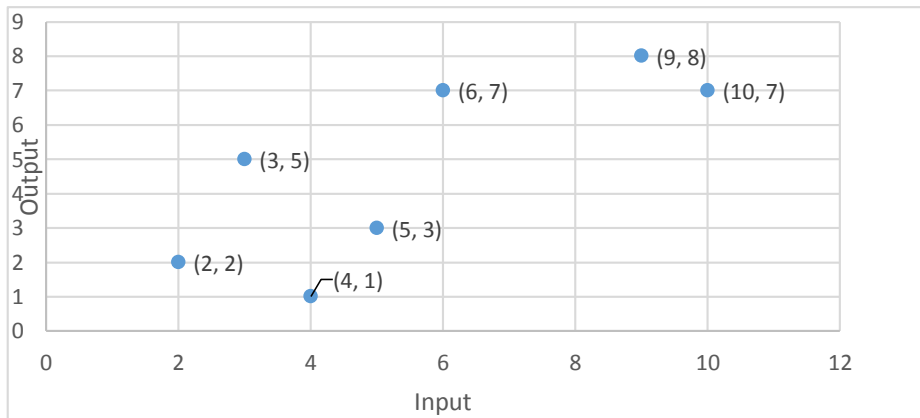
Procediamo ora ad un esempio utile a comparare i due differenti approcci:

Figura 2.9: Esempio: campione di DMU

DMU	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7
INPUT	2	3	6	9	5	4	10
OUTPUT	2	5	7	8	3	1	7

(fonte: Charnes A., Cooper W.W., Lewin A.Y., Seiford L.M., 1994)

Figura 2.10: Disposizione grafica DMU



(fonte: Charnes A., Cooper W.W., Lewin A.Y., Seiford L.M., 1994)

L'esempio illustra un campione di 7 DMU, ognuna delle quali utilizza un singolo input (x) per produrre un singolo output (y).

Per facilitare la comprensione e la verifica del problema, nella Figura 2.11 sono riportate le soluzioni ottime per le sette DMU, valutate per entrambi gli orientamenti del modello CCR.

Figura 2.11: Soluzioni ottime secondo il modello CCR input-oriented ed output-oriented

	<i>DMU</i>	μ^*	v^*	θ^*	λ^*
Input-oriented	1	3/10	1/2	3/5	$\lambda_2 = 0.4$
	2	1/5	1/3	1	$\lambda_2 = 1$
	3	1/10	1/6	7/10	$\lambda_2 = 1.4$
	4	1/15	1/9	8/15	$\lambda_2 = 1.6$
	5	3/25	1/5	9/25	$\lambda_2 = 0.6$
	6	3/20	1/4	3/20	$\lambda_2 = 0.2$
	7	3/50	1/10	21/50	$\lambda_2 = 1.4$
Output-oriented	1	1/2	5/6	5/3	
	2	1/5	1/3	1	$\lambda_2 = 1$
	3	1/7	5/21	10/7	$\lambda_2 = 2$
	4	1/8	5/24	15/8	$\lambda_2 = 3$
	5	1/3	5/9	25/9	
	6	1	5/3	20/3	
	7	1/7	5/21	50/21	

(fonte: Charnes A., Cooper W.W., Lewin A.Y., Seiford L.M., 1994)

Per ricavare ad esempio l'efficienza della DMU 5, si è risolto il seguente problema "input-oriented":

[Forma Envelopment]

$$\min \theta$$

s.t.

$$2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 6\lambda_3 + 9\lambda_4 + 5\lambda_5 + 4\lambda_6 + 10\lambda_7 \leq 5\theta \quad (\text{input})$$

$$2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 7\lambda_3 + 8\lambda_4 + 3\lambda_5 + 1\lambda_6 + 7\lambda_7 \leq 3 \quad (\text{output})$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7 \geq 0$$

dalla cui risoluzione si ricava la soluzione ottima $\lambda_j^* = 0,6$ (con $j \neq 2$).

Alternativamente tale modello può essere risolto nel seguente modo:

[Forma Multiplier]

$$\begin{aligned} \max \theta &= 3\mu \\ \text{s.t.} \\ 2\mu - 2v &\leq 0 \quad (P1) \\ 5\mu - 3v &\leq 0 \quad (P2) \\ 7\mu - 6v &\leq 0 \quad (P3) \\ 8\mu - 9v &\leq 0 \quad (P4) \\ 3\mu - 5v &\leq 0 \quad (P5) \\ 1\mu - 4v &\leq 0 \quad (P6) \\ 7\mu - 10v &\leq 0 \quad (P7) \\ 5v &= 1 \\ \mu, v &\geq 0 \end{aligned}$$

Una DMU viene considerata inefficiente se il valore ottimo, ottenuto dalla risoluzione del problema LP, è inferiore all'unità ($\theta^* \leq 1$). Se invece il valore ottimo risulta pari ad uno e se i moltiplicatori ottimi sono positivi ($\mu_r > 0$, $v_i > 0$), allora la DMU è considerata efficiente.

2.10.1 - Le diverse tecnologie

Vengono ora esposte alcune applicazioni della metodologia DEA, secondo il modello CCR, ai seguenti casi:

- Caso di tecnologia un input – un output
- Caso di tecnologia due output – un input
- Caso di tecnologia due input – un output
- Caso di tecnologia m input – t output

2.10.2 - Tecnologia un input – un output

Rappresenta il caso più semplice che si può riscontrare, nel quale le unità economiche si servono di un solo input per produrre un solo output. Per trovare le unità decisionali maggiormente efficienti occorre calcolare l'efficienza media per ogni DMU (data dal rapporto output/input).

Figura 2.12: Esempio 1 input – 1 output

DMU	A	B	C	D	E	F	G	H
Input	2	3	3	4	5	5	6	8
Output	1	3	2	3	4	2	3	5

(fonte: Cooper, Seiford, Tone, 2005)

L'efficienza della DMU A può essere valutata risolvendo il seguente problema di programmazione lineare:

A:

$$\max \theta = u$$

s.t.

$$2v = 1$$

$$u \leq 2v \quad (A) \qquad 3u \leq 3v \quad (B)$$

$$2u \leq 3v \quad (C) \qquad 3u \leq 4v \quad (D)$$

$$4u \leq 5v \quad (E) \qquad 2u \leq 5v \quad (F)$$

$$3u \leq 6v \quad (G) \qquad 5u \leq 8v \quad (H)$$

dove tutte le variabili sono imposte e considerate come non negative.

La soluzione ottima del problema per A è data da ($v^* = 0.5$, $u^* = 0.5$, $\theta^* = 0.5$). L'unità A non risulta quindi efficiente, avendo un valore θ^* inferiore all'unità.

Si procede con il medesimo ragionamento per tutte le restanti DMU (Figura 2.13):

B:

$$\max \theta = 3u$$

s.t.

$$3v = 1$$

$$u \leq 2v \quad (A) \qquad 3u \leq 3v \quad (B)$$

$$2u \leq 3v \quad (C) \qquad 3u \leq 4v \quad (D)$$

$$4u \leq 5v \quad (E) \qquad 2u \leq 5v \quad (F)$$

$$3u \leq 6v \quad (G) \qquad 5u \leq 8v \quad (H)$$

Con soluzione ottima ($v^* = 0.3333, u^* = 0.3333, \theta^* = 1$)

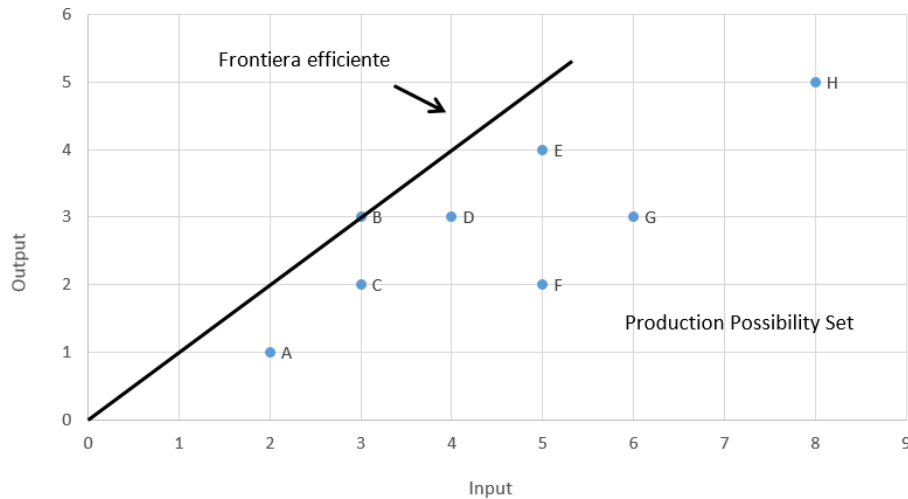
Figura 2.13: Soluzioni ottime problema CCR 1 input – 1 output

DMU	CCR - θ^*
A	0.5000
B	1.0000
C	0.6667
D	0.7500
E	0.8000
F	0.4000
G	0.5000
H	0.6250

L'unica DMU efficiente risulta essere la B. L'unità A, per raggiungere l'efficienza, dovrebbe ridurre del 50 % il livello del proprio input, lasciando inalterato quello dell'output. Similmente anche le restanti entità economiche dovrebbero apportare dei correttivi ai livelli di input.

Il seguente grafico riporta la situazione esaminata:

Figura 2.14: Frontiera efficiente e production possibility set del problema CCR 1 input – 1 output



(fonte: Cooper, Seiford, Tone, 2005)

La frontiera efficiente è rappresentata dalla retta con maggiore inclinazione verso l'asse delle ordinate. L'indice di efficienza relativa esprime la percentuale di efficienza della DMU_j rispetto alla DMU maggiormente efficiente. Misura quindi l'inefficienza della DMU_j rispetto alla frontiera. Le DMU inefficienti possiedono un ventaglio di possibilità tra cui optare per migliorare l'efficienza: ridurre l'input mantenendo inalterati i livelli dell'output realizzato; aumentare la quantità prodotta a parità di input impiegato oppure optare per una possibilità intermedia fra le due soluzioni precedenti. La scelta inevitabilmente implicherà lo spostamento delle DMU relativamente inefficienti verso la frontiera efficiente.

2.10.3 - Tecnologia due input – un output

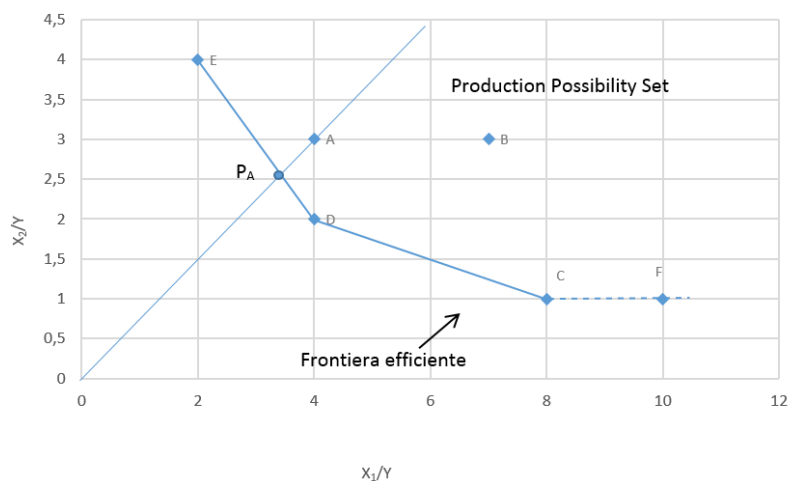
In questa seconda tipologia le DMU, a parità di output, minimizzano gli input impiegati. La Figura 2.15 espone i valori di input e output per ciascuna DMU; il valore dell'output è stato considerato pari ad uno per tutte le unità economiche.

Figura 2.15: Esempio problema CCR 2 input – 1 output

DMU	A	B	C	D	E	F
Input (x_1)	4	7	8	4	2	10
Input (x_2)	3	3	1	2	4	1
Output (y)	1	1	1	1	1	1

(fonte : Cooper, Seiford, Tone, 2005)

Figura 2.16: Frontiera efficiente e production possibility set del problema CCR 2 input – 1 output



(fonte: Cooper, Seiford, Tone, 2005)

La frontiera efficiente è costituita dall'unione delle unità più vicine agli assi che risultano essere efficienti, mentre il “Production Possibility Set” delle unità relativamente inefficienti non si trova più al di sotto della frontiera, bensì al di sopra. L'efficienza di una DMU in rapporto alla frontiera si può misurare anche graficamente, tramite la proiezione su di essa di una *virtual unit*. È infatti sufficiente, ad esempio prendendo in considerazione la DMU inefficiente A, proiettare sulla frontiera efficiente la virtual unit P_A : tale unità,

trovandosi sulla retta che congiunge l'origine degli assi con la DMU_A , presenterà il medesimo rapporto tra gli input dell'unità A. P_A inoltre giace sul segmento che congiunge i punti E e D, entrambe appartenenti alla frontiera e che costituiranno il *reference set* per la DMU_A . Per determinare graficamente l'indice di efficienza radiale occorre rapportare la distanza della virtual unit dall'origine con la distanza tra la DMU_A e l'origine:

$$e_A = \frac{d(O, P_A)}{d(O, A)}$$

il numeratore rappresenta la distanza fra l'origine e la proiezione della DMU_A sulla frontiera efficiente, il denominatore la distanza fra l'origine e la DMU_A .

Dal punto di vista matematico, per l'unità A, si configura il seguente problema di programmazione lineare:

A:

$$\max \theta = u$$

s.t.

$$4v_1 + 3v_2 = 1$$

$$u \leq 4v_1 + 3v_2 (A)$$

$$u \leq 8v_1 + v_2 (C)$$

$$u \leq 2v_1 + 4v_2 (E)$$

$$u \leq 7v_1 + 3v_2 (B)$$

$$u \leq 4v_1 + 2v_2 (D)$$

$$u \leq 10v_1 + v_2 (F)$$

dove tutte le variabili sono imposte e considerate non negative.

Il problema può essere risolto in due modi: come un problema di programmazione lineare oppure come un semplice sistema di disequazioni a due incognite per sostituzione. L'unica soluzione ottima ottenibile è ($v_1^* = 0.1429$, $v_2^* = 0.1429$, $u^* = 0.8571$, $\theta^* = 0.8571$). L'efficienza CCR di A è pari a 0.8571 e l'insieme di riferimento è $E_A = \{D, E\}$.

Lo stesso ragionamento può essere applicato all'unità B, secondo il seguente problema lineare:

B:

$$\max \theta = u$$

s.t.

$$7v_1 + 3v_2 = 1$$

$$u \leq 4v_1 + 3v_2 \quad (A)$$

$$u \leq 8v_1 + v_2 \quad (C)$$

$$u \leq 2v_1 + 4v_2 \quad (E)$$

$$u \leq 7v_1 + 3v_2 \quad (B)$$

$$u \leq 4v_1 + 2v_2 \quad (D)$$

$$u \leq 10v_1 + v_2 \quad (F)$$

dove l'unica soluzione ottima è ($v_1^* = 0.0526$, $v_2^* = 0.2105$, $u^* = 0.6316$, $\theta^* = 0.6316$). L'efficienza CCR di B è pari a 0.6316 e l'insieme di riferimento è $E_B = \{C, D\}$. In questo preciso caso è utile notare, dato che v_1 rappresenta il "peso" associato all'input x_1 e v_2 il rispettivo "peso" dell'input x_2 , che il rapporto $\frac{v_2^*}{v_1^*} = \frac{0.2105}{0.0526} \cong 4$ suggerisce che è particolarmente vantaggioso per l'unità B pesare l'input x_2 quattro volte di più rispetto all'input x_1 per massimizzare il proprio rapporto "virtual input" su "virtual output". Una riduzione dell'input x_2 ha un effetto maggiore sull'efficienza rispetto ad una riduzione dell'input x_1 .

Il punto C risulta CCR efficiente ($v_1^* = 0.0833$, $v_2^* = 0.3333$, $u^* = 1$, $\theta^* = 1$) avendo come soluzione ottima $\theta^* = 1$, come anche i punti E e D (entrambi appartenenti alla frontiera).

È interessante analizzare il caso della DMU F, il cui problema in forma lineare è:

F:

$$\max \theta = u$$

s.t.

$$10v_1 + v_2 = 1$$

$$u \leq 4v_1 + 3v_2 \quad (A)$$

$$u \leq 8v_1 + v_2 \quad (C)$$

$$u \leq 2v_1 + 4v_2 \quad (E)$$

$$u \leq 7v_1 + 3v_2 \quad (B)$$

$$u \leq 4v_1 + 2v_2 \quad (D)$$

$$u \leq 10v_1 + v_2 \quad (F)$$

La soluzione ottima risulta essere ($v_1^* = 0$, $v_2^* = 1$, $u^* = 1$, $\theta^* = 1$). Tale unità, avendo $\theta^* = 1$ sembrerebbe essere efficiente, tuttavia si può notare che $v_1^* = 0$. Assegnando quindi per prova a v_1 un valore (ε) positivo ed infinitesimale si può osservare il cambiamento di θ^* . Ponendo quindi $v_1 = \varepsilon$, si stabilirà un nuovo vincolo:

$$10\varepsilon + v_2 = 1 \quad \text{dal quale si otterrà } v_2 = 1 - 10\varepsilon.$$

Inserendo questo vincolo all'interno del sistema delle disequazioni si ottiene:

$$\begin{array}{ll} u \leq 3 - 26\varepsilon & (A) \\ u \leq 1 - 2\varepsilon & (C) \\ u \leq 4 - 38\varepsilon & (E) \end{array} \qquad \begin{array}{ll} u \leq 3 - 23\varepsilon & (B) \\ u \leq 2 - 16\varepsilon & (D) \\ u \leq 1 & (F) \end{array}$$

Si noti come, dato che ε rappresenta un valore estremamente piccolo e positivo, fra i termini posti sul lato destro quello con il valore minimo è:

$$u \leq 1 - 2\varepsilon;$$

In tal modo si dimostra che v_1 deve essere imposto pari a zero affinché l'unità F abbia $\theta^* = 1$. Possiamo pertanto concludere che l'entità economica in questione risulta essere inefficiente secondo la definizione che prevede che i pesi v^* ed u^* siano sempre positivi. Confrontando la composizione input-output delle unità C ed F si poteva già notare come quest'ultima fosse inefficiente. Infatti l'unità C, CCR-efficiente, per produrre un'unità di output impiega solamente otto unità di x_1 ed una di x_2 , rispetto a F, che rispettivamente ne impiega 10 ed 1 per produrre la medesima quantità di output (con la risultanza di utilizzare un eccesso di input). Si vuol dunque affermare che una DMU come F, con $\theta^* = 1$, e con un eccesso di input e/o una carenza di output è considerata efficiente nel rapporto ma inefficiente nel mix di input impiegati.

Nella seguente tabella vengono riportati tutti i risultati delle DMU del campione di analisi:

Figura 2.17: Soluzioni ottime e reference set del problema CCR 2 input – 1 output

DMU	A	B	C	D	E	F
θ^*	0.8571	0.6316	1	1	1	1
u^*	0.8571	0.6316	1	1	1	1
v_1^*	0.1429	0.0526	0.0833	0.1667	0.2143	0
v_2^*	0.1429	0.2105	0.3333	0.1667	0.1429	1
Reference set	D, E	C, D	C	D	E	C

(fonte: Cooper, Seiford, Tone, 2005)

2.10.4 - Tecnologia due output – un input

In questo terzo caso, a differenza delle precedenti versioni, le DMU maggiormente efficienti sono quelle in grado di produrre una maggiore quantità di entrambi gli output a parità di input. Graficamente, come negli altri casi, le DMU efficienti costituiscono la frontiera efficiente che, a differenza delle precedenti, racchiude al suo interno il “Production Possibility Set”.

Anche in questo caso per misurare l’efficienza delle DMU appartenenti all’insieme delle possibilità produttive è necessario far ricorso all’efficienza radiale. Prendendo in considerazione l’unità A, è possibile proiettare sulla frontiera la “virtual unit” P_A che, trovandosi sulla retta passante per l’origine e per la DMU_A , ha un ugual rapporto fra gli output della DMU considerata. L’indice di efficienza radiale si ottiene calcolando la distanza della DMU_A dall’origine e rapportandola alla distanza che la “virtual unit” ha rispetto all’origine:

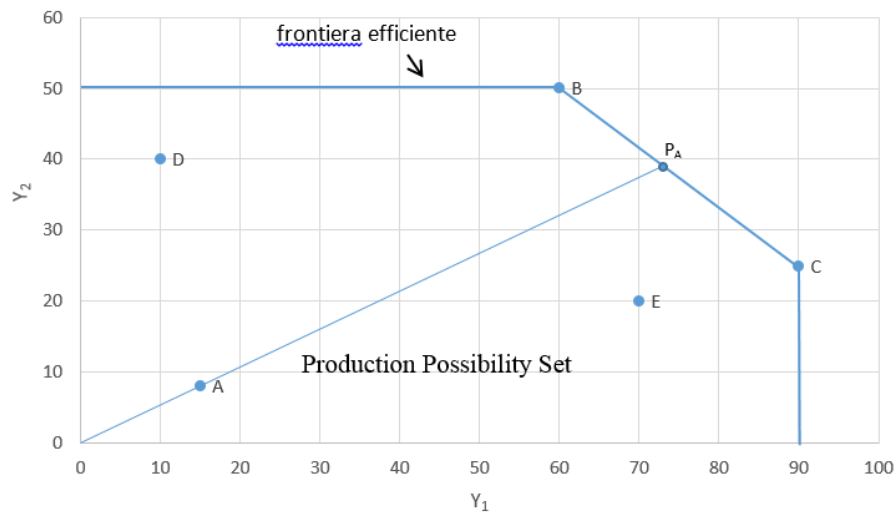
$$e_A = \frac{d(O, A)}{d(O, P_A)}$$

Tale rapporto, se inferiore ad uno, evidenzierà una situazione di inefficienza che potrà essere migliorata aumentando i valori di entrambi gli output e mantenendone invariata la proporzione. Per calcolare di quanto migliorare il livello degli output, una volta calcolata l'efficienza (ossia l'inefficienza) basta calcolarne il reciproco:

$$\frac{1}{e_A} = \delta$$

Ciò significa che, moltiplicando le coordinate del punto A per δ , si otterranno le coordinate del punto P_A , situato proprio sulla frontiera.

Figura 2.18: Frontiera efficiente problema CCR 2 output – 1 input



(fonte: Cooper, Seiford, Tone, 2005)

2.11 - Input ed output slack

Le variabili slack, o di scarto, quantificano per le entità economiche non efficienti il gap di input o di output ad esse associato. Evidenziano in che misura occorre “aggiustare i valori degli input e/o degli output” per eliminare le eventuali inefficienze.

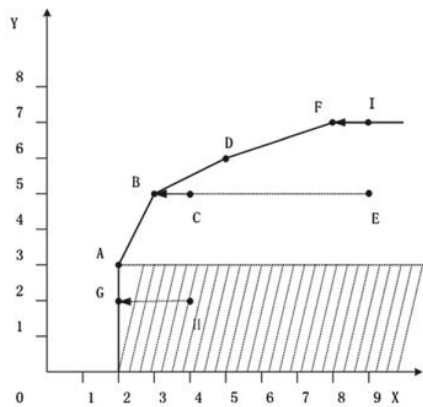
Le variabili slack vengono espone in tale lavoro con la seguente terminologia:

$$s^+ = \text{carenza di output}$$

$$s^- = \text{eccesso di input}$$

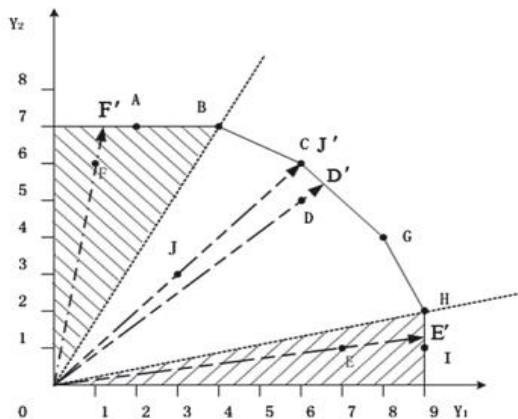
Consideriamo il caso di un modello VRS (con rendimenti di scala variabili) secondo un orientamento agli input (Figura 2.19) e dove le DMU utilizzano un solo input per produrre un solo output.

Figura 2.19: DEA slack under input-orientation



(fonte: da Zhu J., 2013)

Figura 2.20: DEA slack under output-orientation



(fonte: Zhu J., 2013)

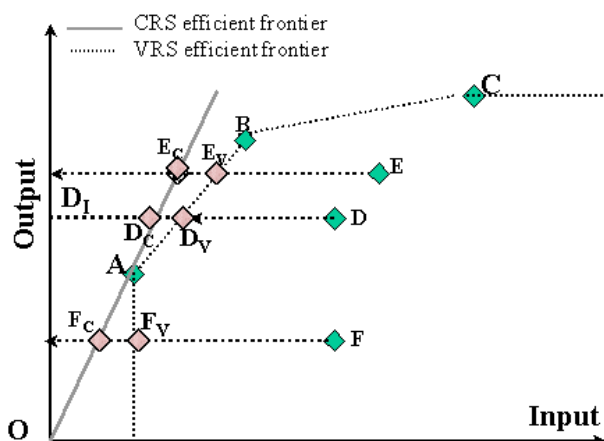
Ogni DMU presente nell'area ombreggiata, una volta diminuito il livello dell'input per raggiungere la frontiera efficiente, sarà soggetta ad uno slack di output. Ad esempio, nella Figura 2.19, si può notare come la DMU_B , tramite una riduzione degli input, riesca a raggiungere la frontiera efficiente nel punto G. Tuttavia, una volta raggiunta tale posizione, la stessa DMU dovrebbe aumentare il proprio livello di output (a parità di input impiegati) per raggiungere una situazione di efficienza forte in A.

Nella figura 2.20 viene riportato la situazione tramite un orientamento all'output. Si può notare come la DMU_I , posta sulla frontiera, sia efficiente in senso debole, con un livello di efficienza pari ad 1. Essa dovrà tendere alla massimizzazione del livello dell'output Y_1 (a parità di Y_2) per giungere ad una situazione di efficienza forte (in H). Nel grafico 2.20 tutte le entità economiche presenti nell'area ombreggiata presentano valori slack positivi. Le DMU J e D sono tecnicamente inefficienti ma senza la presenza di valori slack, in quanto i loro output possono essere proporzionalmente incrementati al fine di raggiungere i rispettivi punti di efficienza ottima (J' ed D').

2.12 - Il modello BCC

Il modello BCC fu ideato da Banker, Charnes e Cooper nel 1984 e rappresenta un'ulteriore estensione del modello CCR. La differenza rispetto a quest'ultimo riguarda principalmente i rendimenti di scala, non più considerati costanti (CRS) con una conseguente frontiera produttiva rappresentata da una semiretta passante per l'origine ma, il modello BCC è caratterizzato da una frontiera rappresentata da una funzione convessa, espressione di rendimenti di scala variabili (VRS). Per l'analisi si rende necessario conoscere a priori la scala produttiva con la quale operano le unità del campione di analisi, o sapere la dimensione degli input/output in corrispondenza dei quali l'inefficienza diviene una diretta conseguenza dei rendimenti di scala.

Figura 2.21: Confronto fra frontiera efficiente CRS e VRS



(fonte: Moez Hababou – York University)

Per comprendere le differenze con cui le frontiere efficienti dei modelli BCC e CCR valutano l'efficienza delle DMU, si consideri la Figura 2.21. Si può notare come i punti A, B e C siano efficienti per il modello BCC ma, di questi, solo il punto A ottimo anche per il modello CCR. Inoltre mentre per il modello BCC l'inefficienza del punto D con orientamento agli input è valutata dal rapporto $D_I D_V / D_I D$, per il modello CCR questa viene valutata come $D_I D_C / D_I D$ ed, in maniera analoga, anche adottando un orientamento agli output risultano divergenze di valutazione fra i due modelli. In generale l'efficienza-CCR non supera mai quella BCC.

Confrontando i due modelli e le rispettive frontiere efficienti si può notare come la produttività media lungo la retta caratterizzata da CRS, pari a $AP_j = \frac{y_j}{x_j}$ (in presenza di un solo input ed output), sia costante a differenza di quella VRS che varia in ogni punto. Il punto con la produttività media più elevata lungo la frontiera VRS è il punto A (punto di tangenza fra le due frontiere) e corrisponde a ciò che Banker definì come “*most productive scale size (MPSS)*”, ovvero il punto dove viene massimizzata la produttività media ed oltre il quale il rendimento di scala decresce. Si noti che la produttività media del punto MPSS è uguale alla produttività media della frontiera efficiente CRS.

Prendendo in considerazione il punto inefficiente F, la sua efficienza complessiva (tecnica e di scala) si ottiene paragonando la stessa unità con i punti A o F_C (DMU che raggiunge anch'essa la massima produttività media, appartenendo alla frontiera CRS).

Adottando un orientamento agli input si ottiene per il punto F : $\frac{x_{Fc}}{x_F}$.

L'efficienza di scala in ogni punto appartenente alla frontiera è uguale al rapporto fra la produttività media di quel punto e quella del MPSS. Pertanto l'efficienza di scala della DMU_F sarà pari a $\frac{x_{Fv}}{x_{Fc}}$. Si può infine notare come il rapporto fra efficienza complessiva ed efficienza di scala risulti essere l'efficienza tecnica pura:

$$\frac{x_{Fc}}{x_F} \cdot \frac{x_{Fv}}{x_{Fc}} = \frac{x_{Fv}}{x_F}$$

Questi concetti sono difficilmente applicabili in contesti più complessi, caratterizzati da situazioni multi-input e multi-output, data la difficoltà nel determinare un set comune di pesi che possa essere accettato da tutte le DMU nella ponderazione delle variabili. Per far fronte a questa problematica venne elaborato il modello BCC, con lo scopo di valutare la quota pura di "efficienza tecnica" in situazioni multi-input e multi-output.

L'elemento distintivo del modello BCC non presente nel modello CCR è l'inclusione di un nuovo vincolo che rappresenta la condizione di convessità (ammettendo quindi la variabilità dei rendimenti di scala):

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad \forall j \quad (3.7)$$

Data questa variazione nella forma della frontiera efficiente si rende necessaria una riformulazione del Production Possibility Set (P), poiché la frontiera produttiva non risulta più essere una semiretta ma una funzione convessa.

L'insieme delle possibilità produttive (P) viene definito da Banker, Charnes e Cooper come:

$$P_{BCC} = \{ (x,y) \mid x \geq \lambda X; y \leq \lambda Y, e\lambda = 1, \lambda \geq 0 \} \quad (3.8)$$

dove:

- $X = (x_j) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $Y = (y_j) \in \mathbb{R}^{s \times n}$ rappresentano le osservazioni sugli input e sugli output a disposizione;
- "e" è un vettore riga di "uno";
- $\lambda \in \mathbb{R}^n$.

L'elemento di discontinuità rispetto al modello CCR è rappresentato dalla condizione $e\lambda = 1$ che indica come la sommatoria dei diversi λ_j sia pari all'unità. Questa, assieme al termine $\lambda > 0$ impone una condizione di convessità sui possibili modi con cui le DMU possono essere combinate.

2.12.1 - Modello BCC: Input oriented

Il modello BCC con orientamento agli input, per ciascuna DMU_o ($o = 1, \dots, n$), viene esposto nella forma di un problema di programmazione lineare (PL):

(BCC_o)

$$\min_{\theta_B, \lambda} \theta_B \quad (3.9)$$

s.t.

$$\theta_B x_o - \lambda X \geq 0 \quad (4.0)$$

$$\lambda Y \geq y_o \quad (4.1)$$

$$e\lambda = 1 \quad (4.2)$$

$$\lambda \geq 0 \quad (4.3)$$

dove θ_B rappresenta uno scalare e la (4.2) rappresenta la condizione di convessità.

Anche in questo caso possiamo riscrivere il problema in forma duale:

$$\max_{v, u, u_o} z = uy_o - u_o \quad (4.4)$$

s.t.

$$vx_o = 1 \quad (4.5)$$

$$uY - vX - u_o e \leq 0 \quad (4.6)$$

$$v \geq 0, \quad u \geq 0 \quad (4.7)$$

dove v ed u sono i vettori pesi mentre z ed u_o sono scalari, con u_o variabile libera in grado di assumere qualsiasi valore (positivo, negativo o nullo).

La reale differenza fra il modello BCC ed CCR è rappresentata proprio dalla variabile u_o , che rappresenta la variabile duale corrispondente ad $e\lambda = I$ (4.2).

La risoluzione del problema BCC_o (3.9) avviene tramite una procedura in due fasi simile alla risoluzione del problema CCR: la prima fase consiste nella minimizzazione di θ_B al fine di trovare $\theta_B = \theta_B^*$; nella seconda fase si procede con la massimizzazione della somma degli slack (eccessi di input e/o carenze di output).

La soluzione ottima sarà data da $(\theta_B^*, \lambda^*, s^{-*}, s^{+*})$, dove s^{-*} ed s^{+*} rappresentano rispettivamente i massimi eccessi di input e deficit di output. Tutte le soluzioni che non soddisfano $\theta_B^* = 1$, $s^{-*} = 0$ e $s^{+*} = 0$ sono da considerarsi inefficienti.

2.12.2 - Modello BCC: Output oriented

L'orientamento all'output del modello viene definito come:

(BCC-O_o)

$$\max_{\eta_B, \lambda} \eta_B \quad (4.8)$$

s.t.

$$X\lambda \leq x_o \quad (4.9)$$

$$\eta_B y_o - Y\lambda \leq 0 \quad (5.0)$$

$$e\lambda = 1 \quad (5.1)$$

$$\lambda \geq 0 \quad (5.2)$$

la cui forma duale è:

$$\min_{v, u, v_o} z = vx_o - v_o \quad (5.3)$$

s.t.

$$uy_o = 1 \quad (5.4)$$

$$vX - uY - ue \leq 0 \quad (5.5)$$

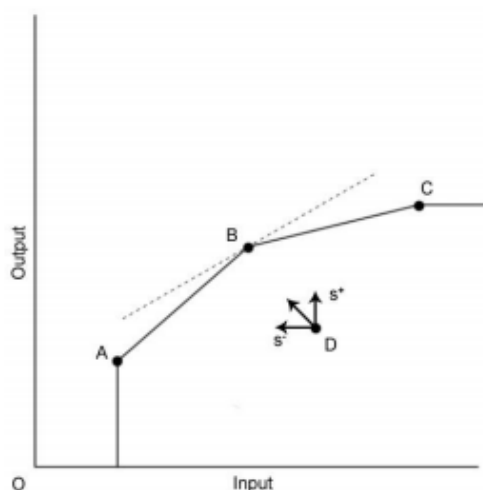
$$v \geq 0, \quad u \geq 0 \quad (5.6)$$

2.13 – Il modello Additivo

Il modello additivo fu elaborato da Charnes, Cooper, Golany, Seiford e Stutz nel 1985. La caratteristica base, nonché suo punto di forza, è la non necessaria definizione a priori dell'orientamento di analisi (input od output oriented) in quanto entrambi gli aspetti vengono considerati simultaneamente. Il modello additivo basa la valutazione di efficienza sulla massimizzazione degli slack (s^{-*} e s^{+*}) piuttosto che analizzarli solo in una seconda fase. È caratterizzato da rendimenti di scala variabili (VRS) ed è per questo che la frontiera efficiente, definita sempre in base alle DMU più efficienti, assume la medesima forma della frontiera BCC, come esposto in Figura 2.22.

Come si può notare dal grafico, l'adozione delle variabili slack se positive indicano (graficamente) la distanza e la direzione che l'unità inefficiente deve percorrere per raggiungere l'ottimo. In termini strategici ciò indica la variazione nelle quantità input-output che l'unità inefficiente deve apportare alle sue performance per divenire efficiente. Il punto B rappresenta l'ottimo, ossia il punto con i valori più alti che possono assumere s^{-*} ed s^{+*} .

Figura 2.22: Frontiera efficiente modello Additivo



(fonte: Cooper et al., 2006)

L'insieme delle possibilità produttive viene definito come segue:

$$P_B = \left\{ (x, y) \mid x = \sum_{j=1}^n X_j \mu_j, y = \sum_{j=1}^n Y_j \mu_j, \forall \mu_j \geq 0, \sum_{j=1}^n \mu_j = 1 \right\} \quad (5.7)$$

Ci sono vari tipi di modelli additivi ma quello che verrà qui esposto prevede l'adozione del vincolo $e\lambda = 1$, necessario facendo riferimento a rendimenti di scala variabili:

[Forma Envelopment]

(ADD_o)

$$\max_{\lambda, s^-, s^+} z = es^- + es^+ \quad (5.8)$$

s.t.

$$\lambda X + s^- = x_o \quad (5.9)$$

$$\lambda Y - s^+ = y_o \quad (6.0)$$

$$e\lambda = 1 \quad (6.1)$$

$$\lambda \geq 0, s^- \geq 0, s^+ \geq 0 \quad (6.2)$$

Il problema duale è il seguente:

[Forma Multipliers]

$$\min_{v, u, u_o} w = vx_o - uy_o + u_o \quad (6.3)$$

s.t.

$$vX - uY - u_o e \geq 0 \quad (6.4)$$

$$v \geq e, u \geq e \quad (6.5)$$

$$u_o \text{ variabile libera} \quad (6.6)$$

La soluzione ottima $(\lambda^*, s^{-*}, s^{+*})$ corrispondente ad una DMU pienamente efficiente e sarà raggiungibile se e sole se $s^{-*} = 0$ ed $s^{+*} = 0$ (Cooper, Seiford, Tone, 2005).

2.14 – Il modello Moltiplicativo

A differenza dei modelli precedenti, che tramite la stima di una funzione di produzione creavano una frontiera efficiente lineare a tratti, il modello Moltiplicativo, elaborato nel 1983 da Charnes, Cooper, Seiford e Stutz, sviluppa una frontiera efficiente non più lineare e a tratti ma una frontiera log-lineare a tratti o Cobb-Douglas a tratti.

La tipica formulazione di una funzione Cobb-Douglas è:

$$\alpha \prod_i x_i^\beta$$

l'efficienza verrà misurata come:

$$\frac{\prod output}{\prod input}$$

2.15 – Vantaggi e Svantaggi della metodologia DEA

Come abbiamo potuto esporre, la metodologia DEA, grazie alla sua notevole flessibilità, può essere applicata a contesti differenti e con scopi altrettanto diversi. Innanzitutto una prima distinzione può essere fatta fra le differenti frontiere efficienti tipiche dei diversi approcci:

- nel modello CCR si assume una frontiera avente la forma di una linea retta che ammette solo ritorni di scala costanti;
- nel modello BCC e nel modello Additivo si ammettono ritorni di scala variabili con una frontiera che assume una forma lineare spezzettata;
- nel modello Moltiplicativo la frontiera assume la forma di una spezzata log-lineare che ammette ritorni di scala variabili.

Riepiloghiamo inoltre le differenze fra i modelli esaminati:

- il primo modello esaminato, il CCR, fornisce una valutazione oggettiva dell'efficienza generale;
- il modello BCC invece è in grado di analizzare e distinguere le differenze fra le inefficienze tecniche e quelle di scala;
- il modello Additivo permette di valutare l'efficienza senza una predeterminazione dell'orientamento di analisi;
- il modello Moltiplicativo fornisce un'interpretazione Cobb-Douglas della funzione di produzione.

Riepilogate le caratteristiche dei modelli esaminati, analizziamo ora i vantaggi e gli svantaggi dell'utilizzo della metodologia DEA.

Vantaggi:

- l'analisi che si compie è relativamente economica in termini di costo e di tempo, soprattutto se paragonata ai modelli che hanno la necessità di stimare la funzione di produzione e di costo¹⁸;
- è una metodologia caratterizzata da una molteplicità di input e di output e che riesce ad elaborare un'unica misura di efficienza complessiva, senza la necessità di predefinire i fattori di ponderazione. Produce infatti una misura aggregata di efficienza per ciascuna DMU, utilizzando come variabili note i fattori produttivi (variabili indipendenti) ed i beni prodotti (variabili dipendenti);
- non sono richiesti processi di ottimizzazione o di stima, oltre a non essere necessario stabilire una forma funzionale per rappresentare i processi produttivi. Non è infatti necessario conoscere a priori i prezzi degli input e output;
- la frontiera efficiente è costituita a partire dalle DMU più efficienti effettivamente misurate, e non utilizzando dati stimati;
- è utile al management delle aziende in quanto suggerisce quali siano le DMU meno efficienti ed in quale direzione si deve lavorare per migliorare la propria performance;
- basa l'analisi sulle singole osservazioni e non semplicemente sulle medie;
- è in grado di considerare situazioni multi-input e multi-output;
- valuta l'efficienza di unità operative omogenee nell'utilizzo dei fattori produttivi;
- ottiene dei valori obiettivo a cui far convergere i valori degli input e output delle unità meno efficienti;
- ottiene soluzioni Pareto efficienti;
- può usare un qualsiasi tipo di unità di misura per analizzare l'efficienza delle DMU, non essendo limitata alle unità monetarie¹⁹.

¹⁸ Cfr. Ferrari, Basta, 2007

¹⁹ Cfr. Johns, Howcroft, Drake, 1997

Oltre agli aspetti positivi, occorre notare che nell'utilizzare la metodologia DEA ci sono tuttavia alcuni aspetti "negativi", che se non considerati potrebbe portare ad una alterazione della validità dell'intera analisi.

Svantaggi:

- ha una natura puramente deterministica: ogni scostamento dalla frontiera è inteso come una inefficienza del processo di produzione, senza considerare fattori casuali o disturbi esterni che possono aver influito sulle risultanze;
- la misura dell'efficienza elaborata si basa sulle sole variabili misurate e prese in considerazione. Può quindi portare ad una rappresentazione distorta dell'unità considerata in quanto alcuni input e output potrebbe non essere stati considerati fra le variabili del modello;
- è cruciale l'individuazione corretta degli input e degli indicatori di output per ottenere delle risultanze affidabili;
- le unità considerate devono essere "omogenee", ossia devono utilizzare la medesima tipologia di risorse per produrre lo stesso tipo di output;
- l'efficienza risultante è relativa, con l'impossibilità di dare una valutazione assoluta dell'efficienza di ogni singola DMU;
- la metodologia non prevede la possibilità che tutte le DMU risultino inefficienti;
- la necessità di possedere un campione di unità decisionali da analizzare estremamente superiore alla somma degli input e degli output affinché possa avvenire una significativa distinzione fra le unità efficienti e quelle inefficienti.

CAPITOLO 3

Applicazione al caso Pittarosso Service S.p.A.

In questo terzo capitolo viene affrontato il caso pratico con lo scopo di valutare la performance di alcuni punti vendita della società Pittarosso Service S.p.A. mediante la tecnica Data Envelopment Analysis. Come esposto in precedenza, l'impiego della metodologia DEA nel calcolo pratico dell'efficienza è molto diffuso, sia perché può essere utilizzata per studi svolti in settori diversi fra loro, sia perché permette di analizzare i processi operativi senza richiedere assunzioni a priori²⁰. I modelli descritti in precedenza hanno avuto il pregio di rappresentare una valida alternativa al precedente modello parametrico. Tuttavia, in base alle caratteristiche del fenomeno che si intende studiare, potrebbe risultare opportuno sviluppare modelli più articolati e complessi, che possano rispecchiare in maniera più coerente le esigenze della ricerca. La metodologia DEA svolge indubbiamente un ruolo importante nella valutazione della performance, ma deve essere supportata da una idonea pianificazione dell'analisi e da una coerente interpretazione dei risultati da parte del management.

Il caso in questione si presta a sviluppare una metodologia coerente per lo studio dell'efficienza di un campione composto da 41 punti vendita della società Pittarosso Service S.p.A. Vista l'importanza dei dati utilizzati, per ragioni di riserbo, viene omesso il nome delle singole strutture, identificando l'unità con dei numeri progressivi. Per poter essere utilizzati nell'indagine, i dati sono stati elaborati in base al periodo di analisi (2012-2013-2014) al fine di ottenere una sintetica visione d'insieme riguardante tutte le DMU del campione considerato.

²⁰ Cfr. Seiford e Thrall, 1990

3.1 – Le fasi dell’analisi

Lo scopo dell’indagine è quello di individuare quale, fra le unità considerate, sia la più efficiente e quali siano i miglioramenti da apportare alle unità inefficienti. Le fasi principali per attuare un’indagine DEA sono tre:

- definizione e scelta delle DMU;
- scelta delle variabili input e output;
- analisi ed interpretazione dei risultati ottenuti in relazione al modello utilizzato.

Occorre innanzitutto definire le DMU del campione di analisi. La DEA, per calcolare l’efficienza relativa, necessita che le unità siano fra loro comparabili. È pertanto necessario che le unità decisionali presentino le seguenti caratteristiche:

1. omogeneità: ogni DMU deve operare utilizzando la stessa tipologia di input e producendo la medesima tipologia di output;
2. indipendenza: ciascuna unità deve essere libera nella scelta del volume degli input da impiegare e degli output da produrre;
3. autonomia: ogni DMU deve poter scegliere come impiegare le risorse per ottenere i risultati in termini di prodotti.

Definite le caratteristiche che le unità devono possedere, è necessario stabilire la numerosità del campione che, secondo una regola empirica, prevede che il numero delle unità decisionali sia almeno il doppio del numero degli input e output considerati²¹. Effettuata tale scelta l’obiettivo successivo consiste nello scegliere con precisione le variabili da includere nel modello, le quali andranno a formare le matrici X e Y. Una scelta erranea di tali variabili potrebbe comportare sia una penalizzazione di certe unità piuttosto che altre, sia una non corretta rilevazione di determinate tipologie di inefficienza. Un secondo aspetto da considerare è la correlazione fra le variabili: è cruciale che ogni variabile considerata fornisca informazioni non incluse in altri fattori, riducendo la possibilità di ottenere come esito informazioni ridondanti. Infine, nonostante si possa assumere a priori la natura e lo status di una variabile, spesso nella realtà potrebbe risultarne difficile la categorizzazione, ovvero l’assegnazione di tale variabile alla classe degli input o degli output.

²¹ Cfr. Golany e Roll, 1989

Nel presente elaborato gli input considerati sono:

1. media annuale numero del personale addetto al relativo punto vendita (input 1);
2. spese complessive di gestione annuali (input 2).

Gli output:

1. quantità di vendita annuale (output 1);
2. numero di scontrini annuali (output 2);
3. ricavi no IVA annuali (output 3).

3.2 – Interpretazione dei risultati

I risultati proposti sono stati ottenuti utilizzando il software MaxDEA 6.6 Basic, per l'elaborazione del modello CCR, ed il software "Efficiency Measurement System" (EMS) per il calcolo della super-efficienza. Prima di effettuare l'analisi è utile argomentare sull'utilizzo che si può fare delle informazioni che si ottengono dall'applicazione della metodologia DEA. La misura dell'efficienza delle unità appartenenti al campione è la più evidente delle informazioni che la tecnica DEA permette di identificare. Occorre precisare che tale misura è "relativa" e pertanto ha valenza solo rispetto al contesto nel quale è avvenuta la misurazione. Cambiando le caratteristiche del campione di analisi, ad esempio aumentando il numero delle unità, oppure variando la tipologia del modello di analisi (rendimenti di scala, orientamento del modello) si possono ottenere unità efficienti diverse, o differenti valori dell'efficienza. La metodologia permette di identificare le forze e le debolezze di ogni DMU e, attraverso un'analisi benchmarking, gli obiettivi di miglioramento. Un secondo risultato significativo è rappresentato dai "valori obiettivo", ossia quei parametri target ai quali le unità inefficienti devono mirare per raggiungere la frontiera efficiente. Questi valori, che vengono individuati in base ai livelli di efficienza di ogni unità, corrispondono a modifiche del mix produttivo e quindi a modifiche nell'impiego delle risorse a parità di output oppure, viceversa, a variazione dei livelli produttivi a parità di input. Concretamente i valori obiettivo vengono individuati come somma algebrica fra i valori originali, gli slack ed i movimenti radiali. Una ulteriore informazione è rappresentata dai "*peer group*", ovvero dall'insieme delle unità che si

configurano come “*reference set*” per l’unità in esame. Il peer group è l’insieme delle unità efficienti che devono essere utilizzate come parametro di riferimento dall’unità inefficiente. La frequenza con la quale una unità diviene “peer unit” rappresenta un indicatore di buona condotta: se elevata rispetto al numero di unità del campione analizzato, significa che tale unità risulta efficiente non solo secondo il proprio sistema di pesi, ma anche con quello delle altre DMU. Viceversa, se la frequenza risulta bassa, l’unità sotto analisi non può essere considerata un esempio valido, risultando troppo particolare. Generalmente vengono denominate “*Mavericks*” le unità efficienti ma dal comportamento troppo anomalo, anche se non può essere escluso a priori che i pesi “particolari” di dette unità siano quelli in grado di rappresentare in maniera più indicativa la realtà produttiva analizzata. Per tale ragione l’analisi dei peer group permette di discriminare le unità efficienti, che adottano un sistema di pesi molto equilibrato, da quelle ugualmente efficienti ma per aver adottato un sistema di pesi molto particolare e, quindi, poco condivisibile.

3.3 - Analisi delle performance

L’analisi DEA è stata condotta utilizzando il modello a rendimenti di scala costanti (CCR) attraverso un approccio output-oriented, essendo l’interesse aziendale finalizzato alla massimizzazione del fatturato di vendita di ogni singola DMU. Il motivo di questa scelta è correlato al fatto che con il modello a rendimenti costanti si ottengono i punteggi di efficienza tecnica delle unità, rappresentativi della capacità delle stesse di produrre una determinata quantità di output a partire da un determinato set di input. Successivamente è stata condotta un’analisi di super-efficienza e una valutazione sulla scomposizioni della misura di efficienza nelle sue tre componenti: complessiva, tecnica pura e di scala.

Tabella 3.0: Dati anno 2012

<i>PDV</i>	<i>N° personale</i>	<i>Spese complessive di gestione</i>	<i>Quantità di vendita</i>	<i>N° scontrini</i>	<i>Ricavi no IVA</i>
1	5	558.317,08	89.293,02	43.351,95	1.696.723,90
2	6	728.152,83	100.944,06	53.065,80	1.944.693,01
3	7	612.424,71	134.245,50	71.409,12	2.540.655,19
4	4	369.024,20	74.704,11	39.677,52	1.372.133,28
5	6	724.563,62	98.128,02	53.283,42	1.959.039,35
6	8	632.878,19	151.545,36	78.676,14	2.844.233,73
7	13	879.028,09	233.098,92	106.164,15	4.411.437,89
8	5	446.912,74	88.546,23	45.148,71	1.690.288,23
9	8	639.632,85	141.613,89	76.798,47	2.762.960,45
10	5	246.494,71	55.862,31	25.569,42	959.099,48
11	7	595.341,71	120.808,86	56.687,22	2.310.051,60
12	5	385.373,85	51.482,94	24.404,13	895.274,72
13	7	593.294,47	137.767,41	67.848,15	2.619.067,97
14	8	640.889,74	148.288,50	68.009,97	2.709.213,00
15	9	693.116,54	173.159,49	85.809,24	3.311.426,48
16	7	620.235,13	128.898,00	65.767,74	2.457.710,44
17	6	562.548,80	100.291,20	56.168,28	1.949.597,70
18	9	760.707,18	175.142,25	79.405,26	3.250.990,39
19	13	937.958,88	231.399,81	119.785,86	4.572.280,58
20	6	498.475,10	122.063,43	58.211,49	2.262.962,34
21	5	515.250,27	95.112,96	45.555,12	1.853.896,10
22	4	209.970,84	39.332,49	20.574,39	629.399,55
23	9	604.097,78	159.152,76	78.530,13	3.025.343,63
24	4	402.597,65	74.139,60	33.460,47	1.285.218,49
25	6	581.055,72	109.101,09	51.068,16	1.946.605,98
26	11	703.882,55	194.324,43	89.965,41	3.779.562,90
27	8	761.645,52	138.609,06	57.498,18	2.722.923,64
28	4	542.118,87	83.807,88	43.567,71	1.479.569,48
29	9	705.627,01	158.843,07	77.785,20	3.025.295,03
30	6	549.194,57	116.500,17	56.610,96	2.174.808,91
31	5	689.726,93	100.343,28	50.621,76	1.760.608,34
32	5	367.410,47	54.821,64	23.986,56	1.019.086,13
33	8	830.414,39	139.337,25	72.447,00	2.732.079,28
34	4	219.510,58	38.808,90	21.220,74	608.956,59
35	6	559.803,46	114.068,22	58.900,62	2.258.166,89
36	5	456.169,17	93.921,63	47.350,95	1.827.485,26
37	5	474.307,22	71.179,41	36.948,90	1.213.863,85
38	5	343.021,17	54.392,91	22.722,69	893.289,78
39	4	214.703,68	45.959,67	23.090,04	804.385,88
40	8	772.936,25	148.852,08	69.526,80	2.841.080,97
41	5	310.175,43	62.342,55	30.012,03	1.041.885,26

Tabella 3.1: Dati anno 2013

<i>PDV</i>	<i>N° personale</i>	<i>Spese complessive di gestione</i>	<i>Quantità di vendita</i>	<i>N° scontrini</i>	<i>Ricavi no IVA</i>
1	5	564.035,27	90.024,93	54.165,06	1.686.053,58
2	5	751.528,18	99.437,46	64.030,50	1.909.382,19
3	7	634.225,91	130.227,90	87.555,78	2.534.838,54
4	4	373.511,30	74.623,20	48.782,22	1.328.190,61
5	6	730.262,13	99.981,51	67.483,59	1.958.437,18
6	8	631.286,45	141.575,76	95.846,73	2.746.082,28
7	12	910.668,96	215.728,38	129.190,95	4.317.498,70
8	5	452.472,29	86.051,97	54.695,16	1.643.540,14
9	7	649.804,24	132.098,13	92.177,88	2.617.930,74
10	5	264.644,23	57.252,66	32.438,40	955.491,63
11	6	650.108,59	112.239,84	67.954,17	2.150.077,17
12	4	373.261,64	47.767,59	30.030,63	838.402,39
13	8	666.978,21	136.724,88	85.564,65	2.732.815,25
14	8	704.645,54	145.800,75	87.091,71	2.783.623,19
15	9	694.280,19	170.928,42	108.218,52	3.237.984,17
16	7	622.991,85	120.196,92	81.355,47	2.352.886,26
17	6	660.338,57	112.034,31	76.514,82	2.173.895,48
18	9	783.771,48	156.558,06	95.524,02	3.095.759,91
19	14	984.946,66	225.010,71	149.059,47	4.734.103,68
20	8	567.333,34	141.264,21	82.604,46	2.642.114,00
21	5	501.087,75	93.410,13	55.457,76	1.812.927,63
22	4	224.282,20	39.049,77	25.668,00	620.601,14
23	9	622.334,14	160.030,68	99.362,13	3.034.919,27
24	4	425.751,67	82.572,84	45.767,16	1.468.245,28
25	5	610.177,07	102.223,74	62.670,84	1.871.206,71
26	11	728.461,70	192.295,17	114.965,67	3.779.323,31
27	9	818.727,49	143.327,88	76.829,16	3.035.615,67
28	4	539.621,25	83.547,48	55.638,18	1.464.358,00
29	9	735.553,17	156.156,30	102.459,96	3.210.956,24
30	7	596.954,51	122.833,47	74.319,09	2.312.476,17
31	5	595.514,79	93.931,86	60.751,32	1.651.278,49
32	5	395.010,09	61.990,08	33.814,80	1.133.828,41
33	8	849.362,90	131.164,41	87.357,69	2.717.542,12
34	4	228.646,04	35.471,13	24.408,78	567.273,74
35	6	576.814,05	106.770,51	71.942,01	2.131.976,41
36	6	527.106,04	109.216,41	67.082,76	2.211.267,60
37	5	355.808,28	65.231,13	43.358,46	1.096.474,47
38	5	323.169,84	55.732,11	31.067,58	956.118,28
39	4	237.356,08	45.876,90	28.592,85	787.433,87
40	8	804.844,40	152.714,37	91.309,26	2.961.668,43
41	5	345.533,71	64.210,92	39.521,28	1.031.333,61

Tabella 3.2: Dati anno 2014

<i>PDV</i>	<i>N° personale</i>	<i>Spese complessive di gestione</i>	<i>Quantità di vendita</i>	<i>N° scontrini</i>	<i>Ricavi no IVA</i>
1	4	566.186,64	75.240,72	44.666,97	1.463.693,44
2	5	761.500,86	96.706,98	61.673,88	1.909.079,04
3	7	661.976,04	122.431,71	82.790,46	2.516.664,68
4	4	368.587,68	74.038,23	48.017,76	1.384.549,81
5	6	753.266,29	100.965,45	68.548,44	2.112.474,98
6	8	613.833,18	133.239,24	90.722,43	2.681.417,92
7	13	873.902,54	206.046,15	126.094,98	4.592.427,85
8	5	454.526,38	80.606,82	51.102,57	1.575.550,54
9	7	636.170,83	126.347,94	86.962,44	2.542.373,18
10	5	260.461,15	58.181,73	32.803,89	1.043.573,25
11	7	662.142,87	111.287,52	68.093,67	2.317.093,73
12	4	364.410,88	44.014,11	27.188,55	799.848,98
13	8	673.835,77	133.290,39	83.049,00	2.822.959,71
14	8	688.111,14	139.561,38	84.845,76	2.854.861,64
15	10	697.318,56	163.228,02	104.656,62	3.352.536,85
16	6	613.059,52	109.774,41	73.750,86	2.249.845,72
17	7	655.793,12	115.499,49	76.950,06	2.336.233,75
18	9	798.636,22	146.259,24	90.294,63	3.126.905,63
19	14	948.553,41	212.069,76	140.773,17	4.743.143,56
20	9	510.252,31	146.445,24	87.284,22	3.053.257,41
21	4	519.497,43	80.834,67	47.678,31	1.566.919,82
22	4	225.691,07	35.912,88	23.029,59	596.702,72
23	9	615.665,38	151.941,54	94.407,09	3.062.314,33
24	5	440.057,80	85.555,35	47.164,95	1.603.388,80
25	5	596.845,44	99.743,43	60.777,36	1.895.082,81
26	11	676.505,90	173.054,40	106.915,59	3.729.855,92
27	9	805.948,86	141.288,39	77.136,99	3.316.064,69
28	4	544.599,23	74.655,75	50.127,93	1.442.269,88
29	9	700.455,19	144.691,26	96.463,32	3.287.823,58
30	7	582.182,23	128.987,28	76.750,11	2.564.167,96
31	5	615.489,35	96.080,16	61.654,35	1.796.223,73
32	5	374.694,44	64.248,12	34.573,68	1.188.973,89
33	8	816.147,47	117.070,26	79.136,49	2.723.857,68
34	4	221.455,82	32.100,81	21.628,08	542.518,56
35	6	553.931,03	108.642,60	72.469,32	2.214.151,94
36	7	494.439,11	115.797,09	69.853,23	2.483.419,06
37	5	427.256,16	56.358,00	37.237,20	1.000.554,98
38	5	330.917,70	53.852,58	30.066,90	953.985,50
39	4	236.381,83	42.209,91	26.605,44	773.268,66
40	9	815.287,03	142.098,42	86.467,68	3.013.299,59
41	5	331.755,65	59.374,92	36.555,51	1.005.577,42

Molti degli studi passati si sono concentrati esclusivamente sull'analisi degli indici e del punteggio di efficienza delle DMU, senza analizzare le cause dell'inefficienza. L'inefficienza tecnica veniva spiegata come una cattiva gestione delle risorse a disposizione quando l'output massimo non veniva raggiunto. Le informazioni risultanti non permettevano tuttavia di individuare con precisione gli elementi causa dell'inefficienza e di promuovere nuove modalità di impiego di tali risorse. Per tale ragione il solo studio degli indici risulta importante ma allo stesso tempo limitativo, necessitando il supporto di una metodologia in grado di valutare appieno le interazioni fra le variabili in esame.

Prima di procedere con l'analisi e l'esposizione dei risultati, nella Tabella 3.3 vengono presentati i risultati di due indici particolarmente significativi ricavabili dai dati a disposizione: l'incidenza dei costi generali sul fatturato ed il margine operativo lordo sui ricavi. Il primo espone quanto le spese di gestione generale (costi per servizi, costo del personale, costo materie prime) incidano sul fatturato di ogni punto vendita. Analizzandone la variazione triennale si nota come l'unità economica 20 abbia avuto la maggiore riduzione rispetto a tutte le altre unità del campione. Tale variazione è dovuta principalmente ad un aumento più che proporzionale dei ricavi (+26%), passati da 2262962 (2012) a 3053257 (2014), rispetto ai costi generali (+12%). Viceversa, per l'unità 21 si è assistito nell'arco triennale ad un aumento dell'incidenza dei costi generali superiore rispetto alle altre unità del campione, dovuta ad una riduzione dei ricavi (-18%), passati dai 1853896 (2012) ai 1566919 (2014), rispetto all'aumento dei costi generali (+1%).

Il secondo indice, Mol (margine operativo lordo) sui ricavi, è un importante indicatore di redditività del fatturato, con riferimento alla redditività netta dei costi di produzione diretti e dei costi del personale. L'indice evidenzia quanto margine operativo è prodotto per ogni unità monetaria di vendite. In riferimento a questo indice è auspicabile una analisi storica oltre ad un confronto con il settore economico, in quanto un rapporto Mol/Fatturato crescente indica un aumento della redditività lorda delle vendite ed una diminuzione dell'incidenza dei costi operativi.

Come esposto in Tabella 3.3, le unità che hanno conseguito la migliore variazione triennale sono la 31 e 32; viceversa l'unità 1 risulta la peggiore del triennio. In riferimento a questo parametro si possono fare delle considerazioni di carattere qualitativo basate sull'analisi di settore e delle forze competitive, in particolare: il margine sulle vendite è legato sia alle condizioni concorrenziali del settore nel quale le imprese si trovano a operare (ciclo di vita del prodotto, tasso di sviluppo, presenza di barriere all'entrata) sia ai vantaggi competitivi specifici dell'impresa (differenziazione del prodotto, vantaggi di costo).

La modifica di uno di questi fattori può far variare in positivo o in negativo il suddetto indice.

Tabella 3.3: Analisi per indici periodo 2012-2013-2014

Unità economica	Incidenza costi generali sul fatturato			Variazione (2012-2014)	Mol su ricavi			Variazione (2012-2014)
	2012	2013	2014		2012	2013	2014	
1	33%	33%	39%	15%	67%	67%	61%	-9%
2	37%	39%	40%	6%	63%	61%	60%	-4%
3	24%	25%	26%	8%	76%	75%	74%	-3%
4	27%	28%	27%	-1%	73%	72%	73%	0%
5	37%	37%	36%	-4%	63%	63%	64%	2%
6	22%	23%	23%	3%	78%	77%	77%	-1%
7	20%	21%	19%	-5%	80%	79%	81%	1%
8	26%	28%	29%	8%	74%	72%	71%	-3%
9	23%	25%	25%	7%	77%	75%	75%	-2%
10	26%	28%	25%	-3%	74%	72%	75%	1%
11	26%	30%	29%	10%	74%	70%	71%	-4%
12	43%	45%	46%	6%	57%	55%	54%	-5%
13	23%	24%	24%	5%	77%	76%	76%	-2%
14	24%	25%	24%	2%	76%	75%	76%	-1%
15	21%	21%	21%	-1%	79%	79%	79%	0%
16	25%	26%	27%	7%	75%	74%	73%	-3%
17	29%	30%	28%	-3%	71%	70%	72%	1%
18	23%	25%	26%	8%	77%	75%	74%	-3%
19	21%	21%	20%	-3%	79%	79%	80%	1%
20	22%	21%	17%	-32%	78%	79%	83%	6%
21	28%	28%	33%	16%	72%	72%	67%	-8%
22	33%	36%	38%	12%	67%	64%	62%	-7%
23	20%	21%	20%	1%	80%	79%	80%	0%
24	31%	29%	27%	-14%	69%	71%	73%	5%
25	30%	33%	31%	5%	70%	67%	69%	-2%
26	19%	19%	18%	-3%	81%	81%	82%	1%
27	28%	27%	24%	-15%	72%	73%	76%	5%
28	37%	37%	38%	3%	63%	63%	62%	-2%
29	23%	23%	21%	-9%	77%	77%	79%	3%
30	25%	26%	23%	-11%	75%	74%	77%	3%
31	39%	36%	34%	-14%	61%	64%	66%	7%
32	36%	35%	32%	-14%	64%	65%	68%	7%
33	30%	31%	30%	-1%	70%	69%	70%	1%
34	36%	40%	41%	12%	64%	60%	59%	-8%
35	25%	27%	25%	1%	75%	73%	75%	0%
36	25%	24%	20%	-25%	75%	76%	80%	6%
37	39%	32%	43%	8%	61%	68%	57%	-6%
38	38%	34%	35%	-11%	62%	66%	65%	6%
39	27%	30%	31%	13%	73%	70%	69%	-6%
40	27%	27%	27%	-1%	73%	73%	73%	0%
41	30%	34%	33%	10%	70%	66%	67%	-5%

3.4 - L'analisi DEA-CCR

Il modello CCR – Output oriented in forma lineare adottato per l'analisi è il seguente:

(DLPO₀)

$$\max_{\eta, \mu} \eta$$

s.t.

$$x_0 - \mu X \geq 0 \quad (3.4)$$

$$\eta y_0 - \mu Y \leq 0 \quad (3.5)$$

$$\mu \geq 0 \quad (3.6)$$

La seguente tabella riporta i risultati dell'efficienza emersi dall'applicazione del modello alle 41 unità di analisi: sono considerate efficienti tutte le unità che totalizzano un punteggio pari ad 1, mentre le restanti, evidenziate in rosso, risultano essere inefficienti. Saranno pertanto efficienti 32 unità su 41 (78%). Al contrario le unità 10, 12, 22, 32, 34, 37, 38, 39, 41 si dimostrano inefficienti. Come in precedenza esposto, date le caratteristiche del modello CCR, si sarebbe potuto pervenire al medesimo risultato anche utilizzando una formulazione input-oriented, che avrebbe tuttavia condotto ad una differente definizione dei movimenti radiali e degli slack.

Tabella 3.4: Efficienza CCR output-oriented

Unità	2012	2013	2014	Unità	2012	2013	2014
1	1	1	1	22	0,75377	0,716803	0,596515
2	1	1	1	23	1	1	1
3	1	1	1	24	1	1	1
4	1	1	1	25	1	1	1
5	1	1	1	26	1	1	1
6	1	1	1	27	1	1	1
7	1	1	1	28	1	1	1
8	1	1	1	29	1	1	1
9	1	1	1	30	1	1	1
10	0,820888	0,819543	0,778311	31	1	1	1
11	1	1	1	32	0,586651	0,657006	0,725887
12	0,545435	0,613805	0,59156	33	1	1	1
13	1	1	1	34	0,743663	0,668629	0,570926
14	1	1	1	35	1	1	1
15	1	1	1	36	1	1	1
16	1	1	1	37	0,742528	0,763239	0,62591
17	1	1	1	38	0,592209	0,653301	0,625645
18	1	1	1	39	0,827287	0,754501	0,661377
19	1	1	1	40	1	1	1
20	1	1	1	41	0,749142	0,718283	0,692614
21	1	1	1				

Analizzando questi primi dati otteniamo una prima indicazione di quali unità operino in maniera efficiente, ma nessuna informazione in merito ai possibili miglioramenti apportabili alle unità inefficienti. È necessario quindi focalizzare l'attenzione sull'analisi specifica di ogni singola unità.

Tabella 3.5: Analisi CCR output-oriented unità 1

Unità 1 (anno 2012)	
Efficienza	1,0000
Variabile	Val.originale Spostamento radiale Slack Val.Obiettivo
Input 1	5 0 0 5
Input 2	558.317 0 -26814,41147 531.503
Output 1	89.293 0 8584,837141 97.878
Output 2	43.352 0 822,001607 44.174
Output 3	1.696.724 0 0 1.696.724

Peer Group: 24(1,320183)

Times as a benchmark for another DMU : 0

Dalla Tabella 3.5, che esamina l'unità 1, si può notare come, seppur l'efficienza sia pari all'unità, i valori obiettivo non corrispondano ai valori originali. La spiegazione risiede nella presenza degli slack: l'unità 1 è efficiente ma solo in forma debole: essa si posiziona sulla frontiera efficiente ma presenta un utilizzo eccessivo dell'input 2 e una carenza nella produzione dell'output 1 e 2. Si può notare infatti come gli spostamenti radiali per tutte le variabili in esame siano pari a zero, a significare che l'unità non necessita di nessun spostamento radiale essendo già situata sulla frontiera efficiente. Data la condizione di efficienza in forma debole il suo "peer group" non è costituito dall'unità stessa, ma dall'unità 24 che ricopre il ruolo di unità benchmark. L'unità 1 per raggiungere la piena efficienza dovrà pertanto ridurre di circa 26000 euro le spese complessive di gestione annuale ed aumentare sia la quantità venduta che il numero degli scontrini.

Le medesime considerazioni sono valide anche per le altre unità le cui tabelle sono di seguito riportate:

Tabella 3.6: Analisi CCR output-oriented unità 2

Unità 2 (anno 2012)	
Efficienza	1,0000
Variabile	Val.originale Spostamento radiale Slack Val.Obiettivo
Input 1	6 0 0 6
Input 2	728.153 0 -205143,3045 523.010
Output 1	100.944 0 4932,36053 105.876
Output 2	53.066 0 3168,238437 56.234
Output 3	1.944.693 0 0 1.944.693

Peer Group: 04(1,417277)

Times as a benchmark for another DMU : 0

Tabella 3.7: Analisi CCR output-oriented unità 3

Unità 3		(anno 2012)		
Efficienza	1,0000			
Variabile	Val.originale	Spostamento radiale	Slack	Val.Obiettivo
Input 1	7	0	0	7
Input 2	612.425	0	0	612.425
Output 1	134.246	0	2289,981097	136.535
Output 2	71.409	0	0	71.409
Output 3	2.540.655	0	0	2.540.655

Peer Group: 04(0,786294); 06(0,467805); 23(0,043369)

Times as a benchmark for another DMU : 0

Tabella 3.8: Analisi CCR output-oriented unità 4

Unità 4		(anno 2012)		
Efficienza	1,0000			
Variabile	Val.originale	Spostamento radiale	Slack	Val.Obiettivo
Input 1	4	0	0	4
Input 2	369.024	0	0	369.024
Output 1	74.704	0	0	74.704
Output 2	39.678	0	0	39.678
Output 3	1.372.133	0	0	1.372.133

Peer Group: 04(1,000000)

Times as a benchmark for another DMU : 15

L'unità 4 è la prima del campione a risultare efficiente in forma forte: i proprio valori originali coincidono con i valori obiettivo e non sono previsti né movimenti radiali né slack. Il peer group è infatti costituito dall'unità stessa.

Tabella 3.9: Analisi CCR output-oriented unità 5

Unità 5		(anno 2012)		
Efficienza	1,0000			
Variabile	Val.originale	Spostamento radiale	Slack	Val.Obiettivo
Input 1	6	0	0	6
Input 2	724.564	0	-197695,7571	526.868
Output 1	98.128	0	8529,469454	106.657
Output 2	53.283	0	3365,466801	56.649
Output 3	1.959.039	0	0	1.959.039

Peer Group: 04(1,427733)

Times as a benchmark for another DMU : 0

Tabella 3.10: Analisi CCR output-oriented unità 6

Unità 6		(anno 2012)		
Efficienza	1,0000			
Variabile	Val.originale	Spostamento radiale	Slack	Val.Obiettivo
Input 1	8	0	0	8
Input 2	632.878	0	0	632.878
Output 1	151.545	0	0	151.545
Output 2	78.676	0	0	78.676
Output 3	2.844.234	0	0	2.844.234

Peer Group: 06(1,000000)

Times as a benchmark for another DMU : 4

Tabella 3.11: Analisi CCR output-oriented unità 7

Unità 7		(anno 2012)		
Efficienza	1,0000			
Variabile	Val.originale	Spostamento radiale	Slack	Val.Obiettivo
Input 1	13	0	0	13
Input 2	879.028	0	0	879.028
Output 1	233.099	0	0	233.099
Output 2	106.164	0	0	106.164
Output 3	4.411.438	0	0	4.411.438

Peer Group: 07(1,000000)

Times as a benchmark for another DMU : 3

Tabella 3.12: Analisi CCR output-oriented unità 8

Unità 8		(anno 2012)		
Efficienza	1,0000			
Variabile	Val.originale	Spostamento radiale	Slack	Val.Obiettivo
Input 1	5	0	0	5
Input 2	446.913	0	0	446.913
Output 1	88.546	0	3275,803956	91.822
Output 2	45.149	0	3400,806406	48.550
Output 3	1.690.288	0	0	1.690.288

Peer Group: 04(1,151094); 23(0,036635)

Times as a benchmark for another DMU : 0

Tabella 3.13: Analisi CCR output-oriented unità 9

Unità 9		(anno 2012)		
Efficienza	1,0000			
Variabile	Val.originale	Spostamento radiale	Slack	Val.Obiettivo
Input 1	8	0	0	8
Input 2	639.633	0	0	639.633
Output 1	141.614	0	6194,164673	147.808
Output 2	76.798	0	0	76.798
Output 3	2.762.960	0	0	2.762.960

Peer Group: 04(0,489126); 06(0,638116); 23(0,091515)

Times as a benchmark for another DMU : 0

Si analizza ora l'unità 10, la prima del campione a risultare inefficiente:

Tabella 3.14: Analisi CCR output-oriented unità 10

Unità 10		(anno 2012)		
Efficienza	0,8209			
Variabile	Val.originale	Spostamento radiale	Slack	Val.Obiettivo
Input 1	5	0	-1,218353	3,78
Input 2	246.495	0	0	246.495
Output 1	55.862	12188,73551	0	68.051
Output 2	25.569	5579,054957	356,77742	31.505
Output 3	959.099	209268,2875	155208,5099	1.323.576

Peer Group: 26(0,350193)

Times as a benchmark for another DMU : 0

L'unità 10 risulta inefficiente secondo il modello CCR, con un valore di efficienza pari a 0,8209 (<1). Si può notare come i valori originari differiscano dai valori obiettivo. Sono previsti dei movimenti radiali e degli slack che equivalgono ai miglioramenti che l'unità deve apportare per muoversi spazialmente fino alla frontiera efficiente. La somma algebrica dei valori originali, degli spostamenti radiali e degli slack configura proprio i valori obiettivo da raggiungere. In questo caso è sufficiente che l'unità 10 diminuisca di circa una unità il numero del personale addetto al relativo punto vendita e che contestualmente aumenti il livello del fatturato, della quantità venduta e del numero degli scontrini.

3.5 – Scomposizione dell'efficienza

La Tabella 3.16 mostra la decomposizione degli indicatori di efficienza in relazione al tipo di rendimento di scala (CRS, IRS o DRS) elencato nell'ultima colonna. Il modello CCR, a rendimenti costanti, ha permesso di misurare l'efficienza complessiva di ogni DMU mentre l'efficienza tecnica pura è misurata attraverso il modello a rendimenti variabili. Il rapporto fra l'efficienza complessiva e quella tecnica pura misura, invece, l'efficienza di scala:

$$\text{Efficienza di scala} = \frac{\text{Efficienza complessiva}}{\text{Efficienza tecnica pura}}$$

Quando il rapporto è pari ad uno (100%) vuol dire che l'unità esaminata opera ad una dimensione ottimale (*MPSS, most productive scale size*); se è inferiore all'unità significa che una variazione della dimensione produttiva può consentire all'unità un guadagno di efficienza.

Tabella 3.16: Efficienza complessiva, tecnica pura e di scala

Unità	Eff.Complessiva			Eff.Tecnica pura			Eff. Di scala			Rendimenti di scala		
	2012	2013	2014	2012	2013	2014	2012	2013	2014	2012	2013	2014
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	CRS	CRS	CRS
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	CRS	CRS	CRS
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	CRS	CRS	CRS
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	CRS	CRS	CRS
5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	CRS	CRS	CRS
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	CRS	CRS	CRS
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	CRS	CRS	CRS
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	CRS	CRS	CRS
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	CRS	CRS	CRS
10	0,82	0,82	0,78	1	1	1	0,82	0,82	0,78	IRS	IRS	IRS
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	CRS	CRS	CRS
12	0,55	0,61	0,59	0,59	0,63	0,60	0,93	0,97	0,99	IRS	IRS	IRS
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	CRS	CRS	CRS
14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	CRS	CRS	CRS
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	CRS	CRS	CRS
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	CRS	CRS	CRS
17	1	1	1	1	1	1	1	1	1	CRS	CRS	CRS
18	1	1	1	1	1	1	1	1	1	CRS	CRS	CRS
19	1	1	1	1	1	1	1	1	1	CRS	CRS	CRS
20	1	1	1	1	1	1	1	1	1	CRS	CRS	CRS
21	1	1	1	1	1	1	1	1	1	CRS	CRS	CRS
22	0,75	0,72	0,60	1	1	1	0,75	0,72	0,60	IRS	IRS	IRS
23	1	1	1	1	1	1	1	1	1	CRS	CRS	CRS
24	1	1	1	1	1	1	1	1	1	CRS	CRS	CRS
25	1	1	1	1	1	1	1	1	1	CRS	CRS	CRS
26	1	1	1	1	1	1	1	1	1	CRS	CRS	CRS
27	1	1	1	1	1	1	1	1	1	CRS	CRS	CRS
28	1	1	1	1	1	1	1	1	1	CRS	CRS	CRS
29	1	1	1	1	1	1	1	1	1	CRS	CRS	CRS
30	1	1	1	1	1	1	1	1	1	CRS	CRS	CRS
31	1	1	1	1	1	1	1	1	1	CRS	CRS	CRS
32	0,59	0,66	0,73	0,66	0,72	0,76	0,89	0,92	0,95	IRS	IRS	IRS
33	1	1	1	1	1	1	1	1	1	CRS	CRS	CRS
34	0,74	0,67	0,57	0,90	0,92	1	0,83	0,73	0,57	IRS	IRS	IRS
35	1	1	1	1	1	1	1	1	1	CRS	CRS	CRS
36	1	1	1	1	1	1	1	1	1	CRS	CRS	CRS
37	0,74	0,76	0,63	0,75	0,88	0,63	1	0,87	0,99	DRS	IRS	IRS
38	0,59	0,65	0,63	0,69	0,78	0,73	0,86	0,83	0,86	IRS	IRS	IRS
39	0,83	0,75	0,66	1	1	1	0,83	0,75	0,66	IRS	IRS	IRS
40	1	1	1	1	1	1	1	1	1	CRS	CRS	CRS
41	0,75	0,72	0,69	0,86	0,84	0,81	0,87	0,85	0,86	IRS	IRS	IRS

Per sapere se le dimensioni produttive di una unità possono essere ridotte o aumentate, occorre confrontare la misura di efficienza del modello a rendimenti costanti (efficienza complessiva) con quella a rendimenti variabili (efficienza tecnica pura): se la prima è inferiore alla seconda, siamo in presenza di rendimenti di scala crescenti (IRS) e dunque un'unità potrebbe migliorare la propria efficienza aumentando la dimensione produttiva; se invece la seconda misura è inferiore alla prima, siamo in presenza di rendimenti di scala decrescenti (DRS) dove i guadagni di efficienza si potrebbero conseguire solo riducendo le dimensioni produttive. In presenza di rendimenti di scala costanti (CRS) l'efficienza tecnica pura risulta pari all'unità, data la coincidenza fra efficienza complessiva ed efficienza di scala.

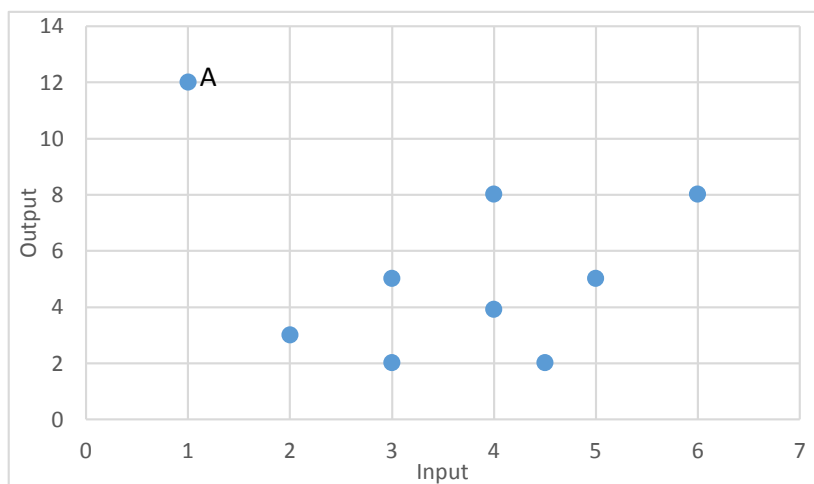
Si può notare il caso dell'unità 37 che inizialmente, nel 2012, presentava dei rendimenti di scala decrescenti per poi variare la scala produttiva nel 2013 e 2014. Ciò significa che nel 2012, ad un aumento (diminuzione) degli input seguiva un aumento (diminuzione) meno che proporzionale degli output, mentre nei due anni successivi alle variazioni degli input corrispondevano delle variazioni più che proporzionali degli output. Per analizzare dettagliatamente le cause si dovrebbero avere a disposizione ulteriori dati poiché i rendimenti di scala decrescenti sono ricollegabili all'esistenza di vincoli che impediscono a qualche fattore produttivo di aumentare nelle proporzioni ottime. Spesso si fa riferimento al limite della capacità organizzativa di un'impresa, per cui, al crescere delle dimensioni della stessa, aumenta lo spreco di risorse collegato ai difetti organizzativi. L'unità in questione per passare da una situazione DRS ad una IRS ha presumibilmente fatto leva sui fattori caratterizzanti i rendimenti di scala crescenti:

- fattori tecnici: collegati alla tecnica di produzione adottata o alle tipologie dei materiali di produzioni;
- fattori organizzativi: inerenti l'organizzazione del processo produttivo e riscontrabili nei vantaggi derivanti dalla cooperazione o dalla maggiore specializzazione del lavoro e del capitale;
- servizi alla produzione: migliore organizzazione delle attività a supporto delle produzioni (R&S, marketing, distribuzione, vendita, ...).

3.6 – Super-Efficienza

Nell'analisi non-parametrica, come esposto in precedenza, i risultati potrebbero essere inficiati dalla presenza di misure *outlier* all'interno del campione di analisi. Le unità outlier corrispondono ad osservazioni anomale che generano dei risultati chiaramente distanti da quelli delle altre osservazioni disponibili. Nella Tabella 3.17 l'unità A risulta outlier, discostandosi significativamente da tutte le altre DMU del campione.

Tabella 3.17: Campione di analisi con unità outlier



Quando si analizzano grandi campioni di dati è normale che alcuni di questi possano discostarsi dalla media del campione. Ciò può essere dovuto ad un errore sistematico nella raccolta dei dati, ad una imprecisione nella teoria che ha orientato l'assunzione di una data distribuzione campionaria di probabilità, ma anche al caso, che ha fatto sì che nella raccolta dei dati alcune osservazioni abbiano prodotto dei risultati molto lontani dai valori medi del campione.

Risulta quindi importante individuare ed escludere tali unità dal campione di analisi.

Un'ulteriore debolezza nell'analisi DEA di grandi campioni di dati, risiede nella possibilità che molte unità risultino efficienti, specialmente in presenza di situazioni multi-input e multi-output. Anderson e Peterson (1993), per ovviare a tale problematica, svilupparono quindi una nuova estensione del modello DEA: il modello della super-efficienza. La formulazione del modello della super-efficienza (S.E.) risulta simile a quella del modello DEA standard, con la differenza che la DMU sotto valutazione viene esclusa dal reference set. Lo scopo è di individuare una nuova modalità di classificazione delle unità efficienti, rendendo ammissibile la possibilità da parte delle DMU di ottenere punteggi di efficienza superiori al 100 %.

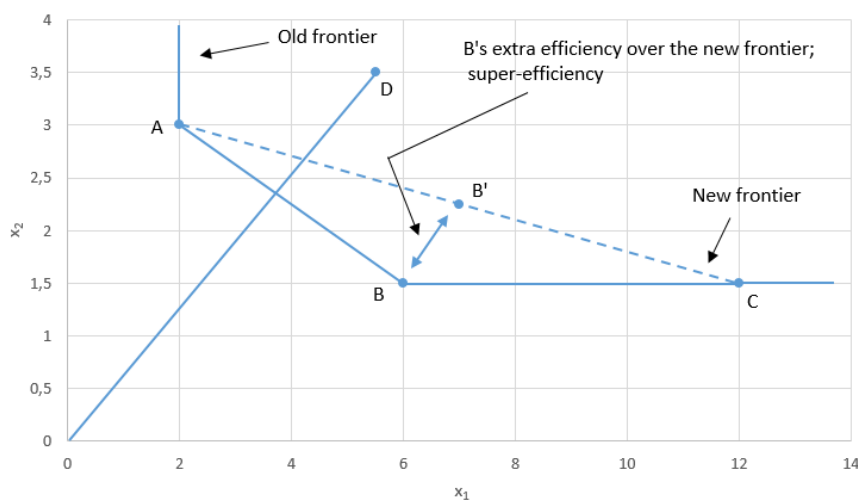
La misura di super-efficienza che se ne ricava rappresenta la misura di efficienza relativa rispetto alla frontiera produttiva formata dalle restanti unità. Il modello della super-efficienza è stato nel tempo adattato per differenti scopi scientifici: Petersen e Andersen (1993) lo utilizzarono per elaborare un ranking delle unità efficienti; Zhu (1996), Charnes (1992), Seiford e Zhu (1998) per l'analisi di sensibilità e stabilità delle classificazioni di efficienza; Wilson (1995), Banker e Chang (2006) per l'identificazione delle misure outlier; Färe, Grosskopf e Lovell (1994) per analizzare i cambiamenti tecnologici e produttivi.

Concretamente viene calcolata la distanza radiale fra la funzione di produzione (stimata escludendo l'unità decisionale scelta dal campione di analisi) e la DMU considerata.

In questa maniera si cerca la maggior efficienza possibile per la DMU_0 rispetto alle altre DMU, le quali sono esse stesse efficienti²², individuando il massimo ammontare per cui l'input può essere aumentato senza alterare il valore dell'efficienza.

La Tabella 3.18 illustra un esempio di super-efficienza con orientamento agli input. Le DMU utilizzano due input (x_1 e x_2) per produrre un singolo output (y). La frontiera efficiente è costituita dalle unità A, B e C che producono il medesimo output minimizzando la combinazione degli input utilizzati.

Tabella 3.18: Super-efficienza DEA input-oriented model

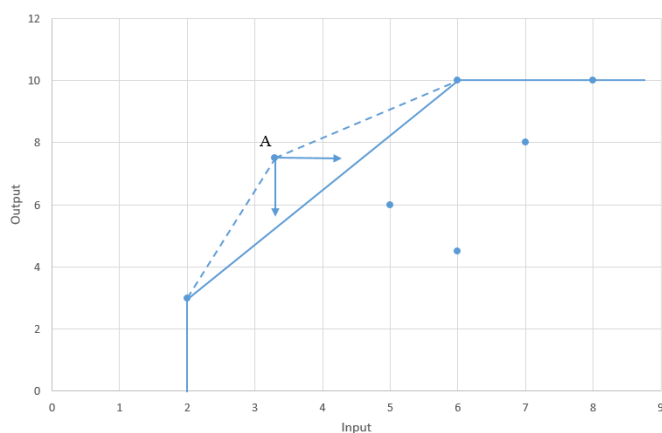


(fonte: Yawe B., 2010)

²² Cfr. Rizzi, 1999

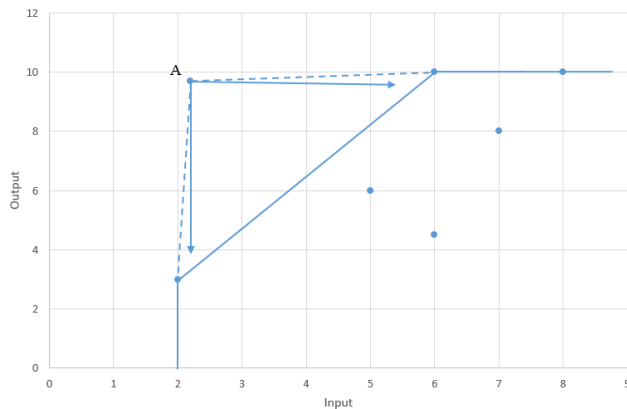
L'unità D, pur producendo lo stesso livello di output, è dominata dalle altre poiché, per produrre lo stesso quantitativo di output, utilizza quantità maggiori di entrambi gli input. L'inefficienza di D può essere misurata come distanza radiale dalla frontiera efficiente, calcolata lungo la retta che congiunge l'origine al punto D e che interseca la frontiera lungo il segmento AB. Consideriamo ora l'unità B: inizialmente essa compone la frontiera, ma se viene esclusa dal "reference set", la conseguenza è la formazione di una nuova frontiera efficiente composta solamente dalle unità A e C. Si può di conseguenza calcolare la misura di super-efficienza per l'unità B, che si ottiene misurando la distanza che tale unità ha dalla nuova frontiera: in tale maniera l'efficienza "extra" o "addizionale" che si ricava rappresenta l'incremento di risorse consentito all'unità affinché essa possa raggiungere la nuova frontiera, senza perdita di efficienza.

Tabella 3.19: Super-efficienza bassa



(fonte: Mezzacapo A.M., 2010)

Tabella 3.20: Super-efficienza alta



(fonte: Mezzacapo A.M., 2010)

Le Tabelle 3.19 e 3.20 rappresentano due tipiche situazioni: nel primo caso la misura di super-efficienza risulta bassa, con l'unità A che non rappresenta una situazione anomala. Viceversa, nella seconda tabella si ha una situazione anomala, con una misura di super-efficienza particolarmente elevata che configura l'unità A come outlier. Vengono ora esposti i risultati dell'applicazione del modello di super-efficienza alle 41 unità del campione di analisi e la loro classificazione in base al ranking, ottenuti imponendo rendimenti di scala costanti.

Tabella 3.20: Super-efficienza 2012-2013-2014

Unità	2012	2013	2014
1	100,00%	100,00%	100,00%
2	100,00%	100,00%	100,00%
3	100,00%	100,00%	100,00%
4	101,76%	103,30%	104,28%
5	100,00%	100,00%	100,00%
6	101,74%	101,94%	103,26%
7	100,51%	100,00%	100,00%
8	100,00%	100,00%	100,00%
9	100,00%	100,00%	100,00%
10	82,09%	81,95%	77,83%
11	100,00%	100,00%	100,00%
12	54,54%	61,38%	59,16%
13	100,00%	100,00%	100,00%
14	100,25%	100,00%	100,00%
15	100,00%	100,10%	100,00%
16	100,00%	100,00%	100,00%
17	100,00%	100,00%	100,00%
18	100,00%	100,00%	100,00%
19	100,00%	100,00%	100,00%
20	100,35%	100,56%	112,20%
21	100,00%	100,00%	100,00%
22	75,38%	71,68%	59,65%
23	102,28%	101,91%	100,00%
24	102,65%	100,00%	100,00%
25	100,00%	100,00%	100,00%
26	107,00%	106,39%	100,00%
27	100,00%	100,00%	100,00%
28	102,07%	103,27%	100,22%
29	100,00%	100,00%	100,00%
30	100,00%	100,00%	100,00%
31	100,21%	100,00%	100,03%
32	58,67%	65,70%	72,59%
33	100,00%	100,00%	100,00%
34	74,37%	66,86%	57,09%
35	100,00%	100,00%	100,00%
36	100,00%	100,00%	100,00%
37	74,25%	76,32%	62,59%
38	59,22%	65,33%	62,56%
39	82,73%	75,45%	66,14%
40	100,00%	100,00%	100,00%
41	74,91%	71,83%	69,26%

Tabella 3.21: Ranking delle unità in base al modello della Super-efficienza 2012-2013-2014

Unità	2012	Unità	2013	Unità	2014
26	107,00%	26	106,39%	20	112,20%
24	102,65%	4	103,30%	4	104,28%
23	102,28%	28	103,27%	6	103,26%
28	102,07%	6	101,94%	28	100,22%
4	101,76%	23	101,91%	31	100,03%
6	101,74%	20	100,56%	1	100,00%
7	100,51%	15	100,10%	2	100,00%
20	100,35%	1	100,00%	3	100,00%
14	100,25%	2	100,00%	5	100,00%
31	100,21%	3	100,00%	7	100,00%
1	100,00%	5	100,00%	8	100,00%
2	100,00%	7	100,00%	9	100,00%
3	100,00%	8	100,00%	11	100,00%
5	100,00%	9	100,00%	13	100,00%
8	100,00%	11	100,00%	14	100,00%
9	100,00%	13	100,00%	15	100,00%
11	100,00%	14	100,00%	16	100,00%
13	100,00%	16	100,00%	17	100,00%
15	100,00%	17	100,00%	18	100,00%
16	100,00%	18	100,00%	19	100,00%
17	100,00%	19	100,00%	21	100,00%
18	100,00%	21	100,00%	23	100,00%
19	100,00%	24	100,00%	24	100,00%
21	100,00%	25	100,00%	25	100,00%
25	100,00%	27	100,00%	26	100,00%
27	100,00%	29	100,00%	27	100,00%
29	100,00%	30	100,00%	29	100,00%
30	100,00%	31	100,00%	30	100,00%
33	100,00%	33	100,00%	33	100,00%
35	100,00%	35	100,00%	35	100,00%
36	100,00%	36	100,00%	36	100,00%
40	100,00%	40	100,00%	40	100,00%
39	82,73%	10	81,95%	10	77,83%
10	82,09%	37	76,32%	32	72,59%
22	75,38%	39	75,45%	41	69,26%
41	74,91%	41	71,83%	39	66,14%
34	74,37%	22	71,68%	37	62,59%
37	74,25%	34	66,86%	38	62,56%
38	59,22%	32	65,70%	22	59,65%
32	58,67%	38	65,33%	12	59,16%
12	54,54%	12	61,38%	34	57,09%

Si può notare dalla Tabella 3.20 che le unità con un valore di super-efficienza inferiore al 100% sono esattamente le DMU risultanti inefficienti in base all'applicazione del modello CCR output-oriented (Tabella 3.4). Ciò ha senso dal momento che il modello della super-efficienza basa la propria analisi sulla ricerca della maggiore efficienza dell'unità considerata rispetto alle altre unità tecnicamente efficienti. Vengono evidenziate in rosso le unità con un valore di super-efficienza superiore al 100%.

La Tabella 3.21 espone la classificazione delle unità secondo il ranking di super-efficienza, che permette di quantificare, per una DMU efficiente, di quanto l'indice di efficienza calcolato con i pesi ottimali superi quello dell'unità che si posiziona al posto precedente.

CONCLUSIONI

Nel corso degli anni si è assistito ad un susseguirsi di svariati modelli volti a misurare le performance aziendali, in relazione alle esigenze economiche del periodo; su questi si è affermata la metodologia non-parametrica DEA.

Molte aziende hanno adottato tale modello per lo studio dell'efficienza e dell'analisi benchmarking verso omologhe aziende di settore, in quanto presenta dei vantaggi molto significativi: la flessibilità, data dalla possibilità di adottare un orientamento agli input, agli output o addittivo; la possibilità di considerare situazioni multi-input e multi-output; l'economicità dell'analisi in termini di costo e di tempo oltre alla non specificazione a priori della forma funzionale per la rappresentazione dei processi produttivi.

Si è quindi applicato il modello nella versione formulata da Charnes, Cooper e Rhodes (CCR) in modalità output-oriented, essendo la massimizzazione dell'output l'obiettivo aziendale.

I dati quantitativi a disposizione erano: la media annuale del personale (input), i costi annuali di gestione (input), la quantità annuale di vendita (output), il numero di scontrini annuale (output), i ricavi no Iva annuali (output).

Per ottenere una prima visione generale dell'efficienza delle DMU aziendali, prima di applicare il modello, si sono calcolati gli indici di incidenza dei costi generali sul fatturato ed il Mol sui ricavi; si sono quindi valutate le variazioni di questi in un arco temporale triennale. È stato quindi applicato il modello, e da questo è risultata l'efficienza relativa di ognuna delle 41 DMU considerate: delle unità inefficienti si sono valutate le variazioni a livello di input e/o output che si sarebbero dovute apportare per renderle efficienti. Si è poi osservato come le DMU efficienti possano essere discriminate in efficienti in forma debole o forte. Le efficienti in forma debole, seppur efficienti, presentano dei valori slack, (eccessi di input e/o carenza di output) che ne limitano l'ottimalità paretiana: gli slack corrispondono al movimento spaziale che le unità devono attuare per divenire Pareto-Koopmans efficienti.

Si è poi valutato il modello della super-efficienza, che permette di definire un ranking delle unità efficienti, consentendo a queste di ottenere dei valori di efficienza relativa superiori all'unità. Tale modello inoltre permette di identificare le unità outlier, unità efficienti ma anomale, che potrebbero inficiare la valutazione del campione di analisi.

Se la misura "extra" dell'efficienza risulta particolarmente elevata vuol dire che l'unità considerata è anomala e che quindi dovrebbe essere esclusa dal campione di analisi per

poi valutare l'efficienza relativa delle restanti unità: a tal scopo il metodo della super-efficienza è stato applicato nel nostro studio.

Nel complesso: il 78% delle DMU analizzate è CCR-efficiente: per contestualizzare i risultati occorrerebbe fare uno studio di settore per evidenziare se l'andamento è consono con le unità produttive delle aziende concorrenti.

Per quanto riguarda le unità inefficienti, i miglioramenti da apportare per aumentare le performance sono facilmente realizzabili, il che configura un possibile margine di miglioramento aziendale.

Il metodo DEA si è quindi dimostrato idoneo allo studio dell'efficienza dell'azienda dando risultati significativi e utili all'ottimizzazione dell'operato aziendale.

BIBLIOGRAFIA

Bonaccorsi A. (2001), *La scienza come impresa: contributi alla analisi economica della scienza e dei sistemi nazionali di ricerca*, Editore Franco Angeli.

Salehi A., Izadikhah M. (2014), *Finding strong defining hyperplanes of production possibility set with stochastic data*. Journal of Data Envelopment Analysis and Decision Scienze.

Mehdiloozad M., Roshdi I. (2014), *Analyzing the concept of super-efficiency in data envelopment analysis: A directional distance function approach*. Cornell University Library

Yu G., Wei Q., Brockett P., Zhou L. (1995), *Construction of all DEA efficient surfaces of the production possibility set under the Generalized Data Envelopment Analysis Model*. European Journal of Operational Research 95.

Laureti T. (2006), *L'efficienza rispetto alla frontiera delle possibilità produttive*. Firenze University Press.

Baldin A. (2012), *Metodologia Data Envelopment Analysis e Indici di Malmquist per la valutazione delle performance produttive dei teatri d'opera italiani e tedeschi*. Università Ca' Foscari Venezia.

Balassone F., Francese M., Giordano R. (2003), *BDI – Banca d'Italia: L'efficienza nei servizi pubblici*. Banca d'Italia.

Santinon G. (2013), *Famiglie di fondi: valutazione dell'efficienza con un approccio DEA*.

Xue M., Harker P.T. (2015), *Ranking DMUs with Infeasible Super-Efficiency DEA Models*. Institute for Operations Research and the Management Science (INFORMS).

Cvetkoska V. (2011), *Data Envelopment Analysis Approach and Its Application in Information and Communication Technologies*. Haicta 2011.

Charnes A., Cooper W.W., Lewin A.Y., Seiford L.M (1994), *Data Envelopment Analysis: theory, methodology and applications*. Springer Netherlands.

Pittarello F. (2014), *Corporate Governance ed Efficienza Bancaria: un'analisi con il metodo DEA*.

Cooper W.W., Seiford L.M., Tone K. (2007), *Data Envelopment Analysis. A comprehensive text with models, applications, references and DEA-solver software*. Springer US.

Thanassoulis E. (2001), *Introduction to the theory and application of data envelopment analysis*. Springer US.

Walden J.B., Kirkley J.E. (200), *Measuring technical efficiency and capacity in fisheries by data envelopment analysis using the general algebraic modelling system (GAMS): A workbook (NOAA technical memorandum NMFS-NE*. National Technical Information Service.

Ebadi S. (2012), *Using a Super Efficiency Model for Ranking Units in DEA*. *Applied Mathematical Science*, Vol. 6, no.41, 2043-2048.

Soldan B. (2013), *BDL Hotels: valutazione della performance mediante Data Envelopment Analysis*.

Vitetta A. (2013), *Linee guida per l'analisi e il progetto di reti urbane di trasporto*. Maggioli Editore.

Marchese U., Ferrari C., Benacchio M. (2000), *L'efficienza tecnica delle imprese terminaliste dedicate alla movimentazione di container: un approccio DEA*. EUT - Edizioni Università di Trieste.

Banker R.D., William W.W., Seiford L.M., Thrall R.M., Zhu J. (2004), *Returns to scale in different DEA models*. European Journal of Operational Research, Volume 154, Page 345-362.

Cifalinò A. (2012), *Misurazione delle performance aziendali e valutazione della formazione*. Franco Angeli Editore.

Porcelli F. (2009), *Measurement of Technical Efficiency: A brief survey on parametric and non-parametric techniques*.

Dallari F., Creazza A., Briante M. (2009), *La misura delle prestazioni dei sistemi di trasporto su strada*. Liuc Papers, n. 227, Serie Tecnologia.

Costabile M., Cariola A. (2004), *La misurazione delle performance dell'impresa che innova: aspetti definitivi e verifiche empiriche*. Luiss Sinergie Journal.

Bozzolan S. (2007), *I modelli multidimensionali*. The McGraw-Hill Companies s.r.l.

Ostinelli C. (1995), *La mappatura e l'analisi dei processi gestionali: al cuore dell'activity-based management*. Liuc Papers n.22, Serie Economia Aziendale.

Taticchi P., Asfalti A., Sole F. (2010), *Business Performance Measurement and Management: New contexts, Themes and Challenges*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Simons R. (2004), *Sistemi di controllo e misure di performance*. Egea Editore.

Neely A., Kennerley M. (2000), *Framework per la misurazione della performance*. Papers incluso nel libro curato da Nelly A. "Business Performance Measurement – Theory and Practice (2002) edito da Cambridge University Press.

Tasinato A. (2011), *Impostazione di un approccio di change management per l'allineamento dei sistemi informativi alle strategie di business*.

Zhu J. (2013), *Quantitative Models for Performance Evaluation and Benchmarking. Data Envelopment Analysis with Spreadsheets*. Springer International Publishing.

Rizzi D. (2001), *L'efficienza dei dipartimenti dell'Università Ca' Foscari di Venezia via DEA e DFA*. Franco Angeli Editore.

Muraro L. (2012), *La Data Envelopment Analysis: una metodologia per la valutazione dell'efficienza nelle vendite*.

Lovell C.A.K, Rouse A.P.B. (2003), *Equivalent standard DEA models to provide super-efficiency scores*. Journal of the Operational Research Society n.54, 101-108.

Shanling L., Jahanshahloo G.R., Khodabakhshi M. (2006), *A super-efficiency model for ranking efficient units in data envelopment analysis*. Journal Applied Mathematics and Computation, volume 184, pages 638-648.

Donisi E. (2013), *Valutazione dell'efficienza museale tramite la metodologia DEA: un'applicazione ai musei civici liguri*.

SITOGRAFIA:

- <http://www.researchgate.net>
- <http://www.informare.it>
- <http://www.ispacs.com>
- <http://www.nefsc.noaa.gov>
- <http://www.fao.org>
- <http://www.revel.unice.fr> (European Review of industrial economic al policy)
- <http://www.ryerson.ca>
- <http://www.qualitiamo.com>
- <http://www.sciencedirect.com>
- <http://www.springer.com>
- <http://www.biblio.liuc.it>
- <http://www.advisorperspectives.com>
- <http://www.lumsa.it>
- <http://www.performancemanagementreview.org>
- <http://www.ateneonline.it>
- <http://www.rescoop.com>